Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 8, dez. 2016

Andréa Prokopczyk

Departamento de Matemática,
Universidade Estadual Paulista
Júlio de Mesquita Filho - São
José do Rio Preto - SP
andreacp@ibilce.unesp.br

Laura Rezzieri Gambera

aluna do curso de Doutorado do
PPGMAT da Universidade
Estadual Paulista Júlio de
Mesquita Filho - São José do
Rio Preto - SP
laura.rgambera@gmail.com

Família cosseno e equações diferenciais de segunda ordem

Cosine family and second order differential equations

Resumo

Neste trabalho estudamos a relação entre uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em um espaço de Banach X e o problema de Cauchy abstrato de segunda ordem $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, quando $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ é um operador linear e $D(A)$ é denso em X .

Palavras-chave: Família cosseno. Equações diferenciais de segunda ordem. Problema de Cauchy homogêneo. Problema bem posto

Abstract

In this work we study the relation between a strongly continuous cosine family of bounded linear operators on a Banach space X and the second order abstract Cauchy problem $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, when $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ is a linear operator and $D(A)$ is dense in X .

Keywords: Cosine family. Second order differential equation. Homogeneous Cauchy problem. Well-posed problem.

1 Introdução

Uma das ferramentas empregadas no estudo de equações diferenciais abstratas de primeira ordem definidas em espaços de Banach é a teoria de semigrupos de operadores lineares limitados. Essa abordagem teve início com os trabalhos de Hille e Yosida em 1948 e, desde então, tem motivado um grande número de artigos.

Em particular, essa teoria também é usada no estudo de equações diferenciais abstratas de segunda ordem pois, assim como na teoria de equações diferenciais ordinárias, podemos transformar uma equação de segunda ordem em um sistema de primeira ordem. Aliás, a inspiração para definir o conceito de semigrupos vem exatamente das equações ordinárias, sendo sua caracterização baseada nas propriedades da função exponencial, que está presente na solução de muitas EDO's.

Contudo, existe uma outra abordagem para o problema abstrato de segunda ordem, tendo como referência as soluções de equações ordinárias de segunda ordem que envolvem as funções seno e cosseno. Nesse caso, trabalha-se com duas famílias de operadores lineares limitados: as famílias seno e cosseno, cujas propriedades se assemelham em muito às propriedades das funções seno e cosseno de números reais. Os primeiros resultados dessa linha de pesquisa apareceram no final da década de 60, com os trabalhos de Da Prato [1], Giusti [2] e Fattorini [3, 4]. Além disso, uma compilação dessa teoria pode ser encontrada, por exemplo, em [5, 6, 7], que são as referências principais deste artigo.

Seguindo essa linha de raciocínio, uma das questões levantadas é se existe uma relação entre as famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados e o problema de Cauchy homogêneo de segunda ordem, assim como ocorre no caso da teoria de semigrupos de operadores lineares limitados e do problema de Cauchy de primeira ordem. A resposta neste caso também é positiva e será o objeto de estudo deste trabalho.

Dessa forma, mostraremos que toda equação diferencial abstrata de segunda ordem da forma $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$, que está bem posta em certo sentido, dá origem a uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados e, inversamente, toda família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados com gerador infinitesimal A pode ser associada à equação diferencial de segunda ordem bem posta $u''(t) = Au(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Observamos que este tipo de problema apareceu na literatura em anos mais recentes, como por exemplo no trabalho de Bátikai, Engel e Haase de 2005, onde os autores consideram a mesma equação acima porém, com o operador A sendo um operador diferencial satisfazendo condições de fronteira do tipo Wentzell generalizada, ver [8].

Ressaltamos ainda que a escolha deste tema para escrevermos este trabalho se deve a sua importância dentro da abordagem de equações diferenciais através da teoria de operadores e, além disso, ao fato deste resultado ser enunciado em vários trabalhos porém, sem uma demonstração detalhada.

O presente artigo está dividido em cinco seções: a primeira é esta introdução, que contextualiza o problema considerado neste trabalho. A segunda, apresenta alguns resultados básicos relativos às famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados definidos em espaços de Banach. Na terceira seção estudamos a relação dessas famílias com o problema de Cauchy homogêneo de segunda ordem e na quarta, apresentamos dois exemplos para ilustrar os resultados da Seção 3. Por fim, na última seção, fazemos uma conclusão sobre nosso estudo.

2 Famílias seno e cosseno

Nesta seção apresentamos alguns dos resultados da teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados que serão utilizados no estudo do problema de Cauchy homogêneo. Como nosso objetivo é relacionar uma família cosseno à uma equação de segunda ordem, omitiremos as demonstrações dos resultados, dando apenas uma referência de onde encontrá-las.

No que segue, X será um espaço de Banach munido da norma $\|\cdot\|$, $\mathcal{L}(X)$ será o espaço das transformações lineares limitadas de X em X , $C(\mathbb{R};X)$, $C^1(\mathbb{R};X)$ e $C^2(\mathbb{R};X)$ serão os espaços das funções de $\mathbb{R}$ em X que são, respectivamente, contínuas, continuamente diferenciáveis e duas vezes continuamente diferenciáveis.

Iniciamos com as definições das famílias cosseno e seno.

Definição 1 Uma família a um parâmetro $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$, de operadores lineares limitados de X em X , é chamada de família cosseno fortemente contínua se:

- (i) $C(0) = I$, onde I denota o operador identidade em X ;
- (ii) $C(s+t) + C(s-t) = 2C(s)C(t)$ para quaisquer $t, s \in \mathbb{R}$;
- (iii) A função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$ fixo.

Definição 2 Seja $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X . A família de operadores lineares limitados $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$, definida por

$$S(t)x = \int_0^t C(s)x ds, \quad x \in X, \quad t \in \mathbb{R},$$

é chamada família seno associada à família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$.

Usando que $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e a continuidade da função $s \mapsto C(s)x$ no compacto $[0, t]$, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$ fixo, podemos mostrar que $S(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. A seguir apresentamos algumas propriedades básicas dessas famílias.

Proposição 1 [6, Proposition 2.1, pág. 76] Seja $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X . Então:

- (a) $C(t) = C(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (b) $C(s), S(s), C(t), S(t)$ comutam entre si para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$;
- (c) $t \mapsto S(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$ fixo;
- (d) $S(s+t) + S(s-t) = 2S(s)C(t)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$;
- (e) $S(t) = -S(-t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (f) $S(t+s) = S(s)C(t) + S(t)C(s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$;
- (g) Existem constantes $K \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$;

$$(h) \quad \|S(t) - S(\hat{t})\| \leq K \left| \int_{\hat{t}}^t e^{w|s|} ds \right| \text{ para quaisquer } t, \hat{t} \in \mathbb{R}.$$

Agora, iremos definir o conceito de gerador infinitesimal de uma família cosseno, o que nos permitirá estabelecer a relação entre essa família e uma equação de segunda ordem.

Definição 3 O gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é o operador linear $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ definido por

$$Ax = \frac{d^2}{dt^2} C(t)x \Big|_{t=0} = C''(0)x,$$

onde $D(A) = \{x \in X; t \mapsto C(t)x \in C^2(\mathbb{R}; X)\}$.

Outro conjunto que utilizaremos ao longo deste trabalho é o conjunto E , dado por

$$E = \{x \in X; t \mapsto C(t)x \in C^1(\mathbb{R}; X)\}.$$

O próximo resultado é a generalização do Teorema fundamental do cálculo para funções tomando valores em espaços de Banach.

Lema 1 [9, Theorem 1.3.4, pág. 6] Se $f : [a, b] \rightarrow X$ é continuamente diferenciável em (a, b) , então, para qualquer $\alpha, \beta \in (a, b)$,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f'(s) ds = f(\beta) - f(\alpha).$$

Agora, usando a definição de família seno e o Lema 1, obtemos a derivada da função $t \mapsto S(t)x$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $x \in X$.

Proposição 2 Sejam $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua e $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ sua família seno associada. Então,

$$\frac{d}{dt} S(t)x = C(t)x, \text{ para quaisquer } t \in \mathbb{R} \text{ e } x \in X.$$

Proposição 3 [6, Proposition 2.2, pág. 77] Seja $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua em X com gerador infinitesimal A e seja $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ a família seno associada a $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$. Então:

- (a) Se $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$, então $z = \int_r^s S(u)x du \in D(A)$ e $Az = C(s)x - C(r)x$;
- (b) Se $x \in X$ e $r, s \in \mathbb{R}$, então $z = \int_0^r \int_0^s C(u)C(v)x du dv \in D(A)$ e $Az = \frac{1}{2}(C(s+r)x - C(s-r)x)$;
- (c) Se $x \in X$, então $S(t)x \in E$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (d) Se $x \in E$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d}{dt} C(t)x = AS(t)x$;

- (e) Se $x \in D(A)$, então $C(t)x \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = C(t)Ax$;
- (f) Se $x \in E$, então $\lim_{t \rightarrow 0} AS(t)x = 0$;
- (g) Se $x \in E$, então $S(t)x \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e $\frac{d^2}{dt^2}S(t)x = AS(t)x$;
- (h) Se $x \in D(A)$, então $S(t)x \in D(A)$ e $AS(t)x = S(t)Ax$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (i) $C(t+s) - C(t-s) = 2AS(t)S(s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$;
- (j) $C(s+t) = C(t)C(s) + AS(t)S(s)$ para quaisquer $s, t \in \mathbb{R}$;
- (k) $D(A)$ é denso em X e A é um operador fechado.

O próximo resultado nos dá condições para estender um operador linear.

Teorema 1 (Extensão linear limitada). [10, Theorem 2.7-11 pág. 100] *Seja $T : \mathcal{D}(T) \subset X \rightarrow Y$ um operador linear limitado, onde X é um espaço normado e Y é um espaço de Banach. Então, T tem uma extensão $\tilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \rightarrow Y$, onde $\tilde{T}$ é um operador linear limitado com norma $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.*

3 O problema de Cauchy homogêneo

Seja $A : D(A) \subset X \rightarrow X$ um operador linear, não necessariamente limitado, com $D(A)$ sub-espaço vetorial de X e $\overline{D(A)} = X$. Um problema de valor inicial, PVI, para a equação homogênea de segunda ordem é dado por

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

$$u(0) = x, \quad (2)$$

$$u'(0) = y, \quad (3)$$

com $x, y \in X$ previamente fixados.

A seguir, estabeleceremos o conceito de solução para o PVI (1) – (3) e, assumindo que A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno de operadores lineares limitados, estudaremos a relação entre a existência de solução para este PVI e a família cosseno gerada por A .

Definição 4 *Uma função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ é solução do PVI (1)-(3) se:*

- (i) $u \in C^2(\mathbb{R}; X)$;
- (ii) $u(t) \in D(A)$ para todo $t \in \mathbb{R}$;
- (iii) as equações (1)-(3) são satisfeitas.

Notação: $u(\cdot) = u(\cdot, x, y)$.

Observemos que, se (1) e (2) são satisfeitas, então x deve estar necessariamente em $D(A)$. Assim, quando $D(A) \not\subset X$, podemos não ter solução para o PVI para todo $x \in X$.

No caso em que temos garantida a existência de uma única solução de (1) – (3) para todo $x \in D(A)$, podemos considerar o conceito de problema bem posto, o que nos permite definir uma família cosseno a partir das soluções do PVI.

Definição 5 Dizemos que o PVI (1)-(3) é bem posto se:

- (i) (1)-(3) possui uma única solução $u(\cdot, x, 0)$ para cada $x \in D(A)$ e $y = 0$;
- (ii) para toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} u(t, x_n, 0) = 0$, uniformemente para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Agora, usaremos as soluções do PVI para construirmos uma família cosseno de operadores lineares limitados.

Teorema 2 Suponha que o PVI (1)-(3) seja bem posto. Para cada $t \in \mathbb{R}$, seja $C(t)$ a extensão da aplicação $x \mapsto u(t, x, 0)$, para $x \in D(A)$, em $\mathcal{L}(X)$. Então, $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ será uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X .

Demonstração. Mostremos, primeiramente, que a aplicação $x \mapsto u(t, x, 0)$, com $x \in D(A)$, $t \in \mathbb{R}$ fixo e $u(\cdot, x, 0)$ solução de (1) – (3) com $y = 0$, pode ser estendida a um operador em $\mathcal{L}(X)$.

Para isso usaremos o Teorema 1 e então, precisaremos mostrar que, para cada $t \in \mathbb{R}$ fixo, a aplicação $\tilde{C}(t) : D(A) \rightarrow X$, definida por $\tilde{C}(t)x = u(t, x, 0)$, pertence a $\mathcal{L}(D(A), X)$.

(a) Mostremos que $\tilde{C}(t)$ é um operador linear.

Sejam $x, y \in D(A)$ e $\alpha \in \mathbb{K}$, onde $\mathbb{K}$ denota o corpo de escalares de X . Assim,

$$\tilde{C}(t)(x+y) = u(t, x+y, 0) \text{ e } \tilde{C}(t)(\alpha x) = u(t, \alpha x, 0),$$

onde $u(\cdot, x+y, 0)$ e $u(\cdot, \alpha x, 0)$ são soluções de (1)-(3) com condição inicial (2) igual a $x+y$ e αx , respectivamente, e condição (3) nula.

Por outro lado, sejam $v : \mathbb{R} \rightarrow X$ e $w : \mathbb{R} \rightarrow X$ dadas por

$$v(t) = u(t, x, 0) + u(t, y, 0) \text{ e } w(t) = \alpha u(t, x, 0).$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned} v'(t) &= u'(t, x, 0) + u'(t, y, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v''(t) &= u''(t, x, 0) + u''(t, y, 0) = Au(t, x, 0) + Au(t, y, 0) = Av(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v(0) &= u(0, x, 0) + u(0, y, 0) = x + y, \\ v'(0) &= u'(0, x, 0) + u'(0, y, 0) = 0, \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}w'(t) &= \alpha u'(t, x, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\w''(t) &= \alpha u''(t, x, 0) = \alpha Au(t, x, 0) = Aw(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\w(0) &= \alpha u(0, x, 0) = \alpha x, \\w'(0) &= \alpha u'(0, x, 0) = \alpha 0 = 0.\end{aligned}$$

Logo, concluímos que v é solução de (1) com condições iniciais $v(0) = x + y$ e $v'(0) = 0$, e w é solução de (1) com condições iniciais $w(0) = \alpha x$ e $w'(0) = 0$. Portanto, visto que o PVI é bem posto, temos $v(t) = u(t, x + y, 0)$ e $w(t) = u(t, \alpha x, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Consequentemente, segue que

$$\tilde{C}(t)(x + y) = v(t) = u(t, x, 0) + u(t, y, 0) = \tilde{C}(t)x + \tilde{C}(t)y,$$

e

$$\tilde{C}(t)(\alpha x) = w(t) = \alpha u(t, x, 0) = \alpha \tilde{C}(t)x,$$

garantindo que $\tilde{C}(t)$ é um operador linear.

Para que $\tilde{C}(t) \in \mathcal{L}(D(A), X)$, falta mostrarmos que $\tilde{C}(t)$ é contínua em $D(A)$.

(b) Mostremos que $\tilde{C}(t)$ é contínua em $D(A)$.

Sejam $x \in D(A)$ e $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Defina $y_n = x_n - x$, $n \in \mathbb{N}$. Assim, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $D(A)$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Logo, visto que o PVI é bem posto, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}(t)y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t, y_n, 0) = 0,$$

sendo essa convergência uniforme para t em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Portanto, visto que $\tilde{C}(t)$ é um operador linear e $y_n = x_n - x$ para todo $n \in \mathbb{N}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}(t)x_n = \tilde{C}(t)x,$$

implicando que $\tilde{C}(t)$ é contínua em x para todo $x \in D(A)$.

Desse modo, concluímos que $\tilde{C}(t) \in \mathcal{L}(D(A), X)$ e então, pelo Teorema 1, obtemos que $\tilde{C}(t)$ pode ser estendido a um operador linear limitado em X .

Denotemos a extensão de $\tilde{C}(t)$ por $C(t)$. Assim, $C(t) \in \mathcal{L}(X)$, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, iremos mostrar que a família de operadores lineares limitados $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua em X , isto é, provaremos que $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz as três propriedades da Definição 1.

(i) Para $x \in D(A)$,

$$C(0)x = \tilde{C}(0)x = u(0, x, 0) = x,$$

já que $u(\cdot, x, 0)$ é solução de (1)-(3) para $y = 0$.

Além disso, como $\overline{D(A)} = X$, dado $x \in X$, existe uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Desse modo, visto que $C(0) \in \mathcal{L}(X)$,

$$C(0)x = \lim_{n \rightarrow \infty} C(0)x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x.$$

Portanto, $C(0)x = x$ para todo $x \in X$, ou seja, $C(0) = I$.

(ii) Sejam $t, s \in \mathbb{R}$ e $x \in D(A)$.

Tomemos $v_1(t) = u(-t, x, 0)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $u(\cdot, x, 0)$ é a solução de (1)-(3) para $y = 0$. Então,

$$\begin{aligned} v_1'(t) &= -u'(-t, x, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_1''(t) &= u''(-t, x, 0) = Au(-t, x, 0) = Av_1(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_1(0) &= u(0, x, 0) = x, \\ v_1'(0) &= -u'(0, x, 0) = 0, \end{aligned}$$

isto é, v_1 é solução de (1)-(3) para $y = 0$. Consequentemente, visto que o PVI é bem posto, concluímos que $v_1(t) = u(t, x, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ou ainda, $u(-t, x, 0) = u(t, x, 0)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

Agora, fixando $s \in \mathbb{R}$, tomemos $v_2(t) = u(t + s, x, 0) + u(t - s, x, 0)$, com $t \in \mathbb{R}$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} v_2'(t) &= u'(t + s, x, 0) + u'(t - s, x, 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_2''(t) &= u''(t + s, x, 0) + u''(t - s, x, 0) = Au(t + s, x, 0) + Au(t - s, x, 0) \\ &= A[u(t + s, x, 0) + u(t - s, x, 0)] = Av_2(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_2(0) &= u(s, x, 0) + u(-s, x, 0) = 2u(s, x, 0), \\ v_2'(0) &= u'(s, x, 0) + u'(-s, x, 0) = 0, \end{aligned}$$

sendo a última igualdade válida pois $u'(-s, x, 0) = -v_1'(s) = -u'(s, x, 0)$. Dessa forma, v_2 é solução da equação (1) com condições iniciais $v_2(0) = 2u(s, x, 0)$ e $v_2'(0) = 0$.

Por fim, ainda fixando $s \in \mathbb{R}$, definamos $v_3(t) = 2u(t, u(s, x, 0), 0)$, $t \in \mathbb{R}$, onde $u(\cdot, u(s, x, 0), 0)$ é solução de (1) com condições iniciais $u(s, x, 0)$ e 0 para $u(0)$ e $u'(0)$, respectivamente, e notemos que

$$2u(t, u(s, x, 0), 0) = 2C(t)[u(s, x, 0)] = 2C(t)C(s)x,$$

pois $x \in D(A)$ e, como $u(\cdot, x, 0)$ é solução de (1)-(3) para $y = 0$, $u(s, x, 0) \in D(A)$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Além disso,

$$\begin{aligned} v_3'(t) &= 2u'(t, u(s, x, 0), 0), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_3''(t) &= 2u''(t, u(s, x, 0), 0) = 2Au(t, u(s, x, 0), 0) = Av_3(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ v_3(0) &= 2u(0, u(s, x, 0), 0) = 2u(s, x, 0), \\ v_3'(0) &= 2u'(0, u(s, x, 0), 0) = 0, \end{aligned}$$

o que garante que v_3 é solução de (1) com condições iniciais $v_3(0) = 2u(s, x, 0)$ e $v_3'(0) = 0$.

Logo, pelo fato de (1)-(3) ser bem posto, concluímos que $v_2(t) = v_3(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, e assim,

$$\begin{aligned} C(t+s)x + C(t-s)x &= u(t+s, x, 0) + u(t-s, x, 0) = v_2(t) = v_3(t) \\ &= 2u(t, u(s, x, 0), 0) = 2C(t)C(s)x, \quad t, s \in \mathbb{R}, \quad x \in D(A). \end{aligned}$$

Para finalizar a demonstração deste item, dado $x \in X$, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$. Então, visto que $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned} C(t+s)x + C(t-s)x &= \lim_{n \rightarrow \infty} [C(t+s)x_n + C(t-s)x_n] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 2C(t)C(s)x_n \\ &= 2C(t)C(s)x, \quad t, s \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Portanto, segue que

$$C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s), \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(iii) Dado $x \in D(A)$, $C(t)x = u(t, x, 0)$, onde $u(\cdot, x, 0)$ é solução de (1)-(3) para $y = 0$. Então, $u(\cdot, x, 0)$ é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e assim, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$.

Antes de considerarmos o caso em que $x \in X$, mostraremos que $\tilde{C}(t) : D(A) \rightarrow X$ é uniformemente limitada em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Com esse objetivo, suponhamos, por absurdo, que $\tilde{C}(t)$ não é limitado em um compacto $J \subset \mathbb{R}$. Então, dado $M > 0$, existe $t_M \in J$ tal que $\|\tilde{C}(t_M)\| > M$. Mais ainda, como $\|\tilde{C}(t_M)\| = \sup_{\substack{x \in D(A) \\ \|x\| \leq 1}} \|\tilde{C}(t_M)x\|$, existe

$x_M \in D(A)$ de modo que $\|x_M\| \leq 1$ e $\|\tilde{C}(t_M)x_M\| \geq M$.

Em particular, tomando $M = n \in \mathbb{N}$, obtemos uma sequência $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em J e uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$, com $\|x_n\| \leq 1$, tais que

$$\|\tilde{C}(t_n)x_n\| \geq n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (4)$$

Seja $y_n = \frac{x_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Dessa forma, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência em $D(A)$ e, como $\|y_n\| \leq \frac{1}{n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$. Logo, visto que (1)-(3) é bem posto, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{C}(t)y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u(t, y_n, 0) = 0,$$

uniformemente em J , isto é, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ de modo que

$$\|\tilde{C}(t)y_n\| < \varepsilon, \quad n \geq n_0, \quad t \in J. \quad (5)$$

Por outro lado, de (4), segue que

$$\|\tilde{C}(t_n)y_n\| = \left\| \tilde{C}(t_n) \frac{x_n}{n} \right\| = \frac{\|\tilde{C}(t_n)x_n\|}{n} \geq 1, \quad n \in \mathbb{N},$$

o que contraria (5) já que $t_n \in J$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Portanto, existe $M > 0$ tal que $\|\tilde{C}(t)\| \leq M$, para todo $t \in J$.

Além disso, como $C(t)$ é uma extensão de $\tilde{C}(t)$, temos $\|C(t)\| = \|\tilde{C}(t)\|$ e então, $C(t) : X \rightarrow X$ também é uniformemente limitado em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Agora, dados $x \in X$ e $t \in \mathbb{R}$, sejam $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $D(A)$, $J = [a, b] \subset \mathbb{R}$ e $M_J > 0$ tais que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$, $t \in (a, b)$ e $\|C(s)\| \leq M_J$, para todo $s \in J$. Para mostrarmos que a função $s \mapsto C(s)x$ é contínua em t , dado $\varepsilon > 0$, tomemos $n_0 \in \mathbb{N}$ e $\delta > 0$ de modo que

$$\|x_n - x\| < \frac{\varepsilon}{3M_J}, \quad n \geq n_0, \quad \text{e} \quad \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \text{para} \quad |h| < \delta.$$

Dessa forma, para $h \in \mathbb{R}$ tal que $t+h \in J$ e $|h| < \delta$, segue que

$$\begin{aligned} \|C(t+h)x - C(t)x\| &\leq \|C(t+h)x - C(t+h)x_{n_0}\| + \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| \\ &\quad + \|C(t)x_{n_0} - C(t)x\| \\ &\leq M_J\|x - x_{n_0}\| + \|C(t+h)x_{n_0} - C(t)x_{n_0}\| \\ &\quad + M_J\|x_{n_0} - x\| \\ &< M_J \frac{\varepsilon}{3M_J} + \frac{\varepsilon}{3} + M_J \frac{\varepsilon}{3M_J} \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

ou seja, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em t .

Por fim, como o resultado é válido para todo $t \in \mathbb{R}$, a função $t \mapsto C(t)x$ é contínua em $\mathbb{R}$ para todo $x \in X$.

Portanto, de (i)-(iii), concluímos que $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua. $\square$

O próximo resultado estabelece uma relação inversa à do Teorema 2, isto é, garante a existência de solução para o PVI (1)-(3) quando assumimos que o operador A é o gerador infinitesimal de uma família cosseno fortemente contínua.

Teorema 3 *Sejam $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X , com gerador infinitesimal A , e $(S(t))_{t \in \mathbb{R}}$ a família seno associada a ela. Então, o PVI (1) – (3) é bem posto. Mais ainda, se $x \in D(A)$ e $y \in E$, a única solução $u(\cdot, x, y)$ de (1) – (3) é dada por*

$$u(t, x, y) = C(t)x + S(t)y, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Demonstração. Suponha que $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ seja uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados, com gerador infinitesimal A . Dados $x \in D(A)$, mostremos que a função $u : \mathbb{R} \rightarrow X$ definida por $u(t) = C(t)x$ é uma solução de (1) – (3) para $y = 0$.

Primeiramente, usando a definição de $D(A)$ e o fato de $x \in D(A)$, concluímos que $u \in C^2(\mathbb{R}; X)$.

Além disso, do item (e) da Proposição 3, $u(t) \in D(A)$ e $u''(t) = \frac{d^2}{dt^2}C(t)x = AC(t)x = Au(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por fim, $u(0) = C(0)x = x$ e, do item (d) da Proposição 3 e do fato de $D(A) \subset E$,

$$u'(0) = \left. \frac{d}{dt}C(t)x \right|_{t=0} = AS(0)x = 0.$$

Portanto, u é solução de (1)-(3).

Para mostrarmos que o PVI é bem posto, precisamos garantir a unicidade de solução e também a dependência contínua da condição inicial. Para a unicidade de solução, seja $w : \mathbb{R} \rightarrow X$ outra solução de (1)-(3) para $y = 0$. Então, $w''(t) = Aw(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $w(0) = x$ e $w'(0) = 0$. Mais ainda, do item (d) da Proposição 3 e da Proposição 2, as funções $s \mapsto C(t-s)w(s)$ e $s \mapsto S(t-s)w'(s)$ são diferenciáveis em $\mathbb{R}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, com

$$\frac{d}{ds}C(t-s)w(s) = -AS(t-s)w(s) + C(t-s)w'(s) \quad (6)$$

e

$$\frac{d}{ds}S(t-s)w'(s) = -C(t-s)w'(s) + S(t-s)w''(s). \quad (7)$$

Logo, integrando (6) de zero até t e usando o item (h) da Proposição 3, a igualdade (7) e o Lema 1, temos

$$\begin{aligned} w(t) - C(t)x &= C(0)w(t) - C(t)w(0) = \int_0^t \frac{d}{ds}C(t-s)w(s)ds \\ &= \int_0^t -AS(t-s)w(s) + C(t-s)w'(s)ds \\ &= \int_0^t -S(t-s)Aw(s) + C(t-s)w'(s)ds \\ &= \int_0^t -S(t-s)w''(s) + C(t-s)w'(s)ds \\ &= \int_0^t -\left[\frac{d}{ds}S(t-s)w'(s)\right]ds \\ &= -S(0)w'(t) + S(t)w'(0) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, $w(t) = C(t)x$ para todo $t \in \mathbb{R}$, garantindo a unicidade de solução para o PVI (1) – (3) com $y = 0$.

Agora, mostraremos que a solução do PVI depende continuamente da condição inicial. Para isso, seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência em $D(A)$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$. Dos resultados anteriores, sabemos que a solução $u_n = u_n(\cdot, x_n, 0)$ de (1) – (3), em que $x = x_n$ e $y = 0$, é dada por $u_n(t) = C(t)x_n$, para todo $t \in \mathbb{R}$, e é única.

Dessa forma, visto que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ e $C(t) \in \mathcal{L}(X)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, segue que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u(t, x_n, 0) = \lim_{n \rightarrow \infty} C(t)x_n = C(t)0 = 0.$$

Notemos ainda que, do item (g) da Proposição 1, existem constantes $K \geq 1$ e $w \geq 0$ tais que $\|C(t)\| \leq Ke^{w|t|}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Em particular, se $t \in J$, com $J \subset \mathbb{R}$ compacto, então $\|C(t)\| \leq M$ para todo $t \in J$ e algum $M > 0$. Logo, visto que

$$\|u(t, x_n, 0)\| \leq \|C(t)\| \|x_n\| \leq M \|x_n\|, \quad t \in J, \quad n \in \mathbb{N},$$

concluimos que a convergência acima é uniforme em subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$.

Portanto, segue que o PVI (1) – (3) é bem posto.

Para finalizarmos a demonstração deste teorema, sejam $x \in D(A)$ e $y \in E$, e suponha que w seja uma solução de (1) – (3). Então, as expressões em (6) e (7) ainda são válidas e assim, procedendo como anteriormente, obtemos

$$\begin{aligned} w(t) - C(t)x &= -S(0)w'(t) + S(t)w'(0) \\ &= S(t)y, \end{aligned}$$

pois agora $w'(0) = y$.

Consequentemente, segue que $w(t) = u(t, x, y) = C(t)x + S(t)y$ para todo $t \in \mathbb{R}$. □

4 Exemplos

Nesta seção, apresentamos dois exemplos de famílias cosseno que se relacionam com um problema de Cauchy homogêneo de segunda ordem, ilustrando assim, os resultados demonstrados na Seção 3. O primeiro exemplo, tem como inspiração as séries de potência das funções seno e cosseno de números reais. Já o segundo, se baseia no grupo de translações.

Exemplo 1 *Sejam X um espaço de Banach qualquer e $A \in \mathcal{L}(X)$. A família de operadores $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$, definidos por*

$$C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{2n}}{(2n)!}, \quad t \in \mathbb{R},$$

está bem definida, pois A é um operador limitado, e é uma família de operadores lineares limitados. Mais ainda, $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ satisfaz as condições da Definição 1 e então, é uma família cosseno fortemente contínua, cujo gerador infinitesimal é o operador A .

Além disso, a família seno associada a $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é dada por

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n t^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em particular, quando tomamos $X = \mathbb{R}$ e $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definido por $Ax = ax$, com $a > 0$, obtemos

$$C(t) = \cosh(t\sqrt{a}) \quad e \quad S(t) = \frac{\sinh(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Note que a função $u(t) = \cosh(t\sqrt{a}) + \frac{\sinh(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}$ é solução da equação

$$u''(t) = Au(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Observe ainda que, para o caso em que $A : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por $Ax = -ax$, com $a > 0$, temos

$$C(t) = \cos(t\sqrt{a}) \text{ e } S(t) = \frac{\sin(t\sqrt{a})}{\sqrt{a}}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Exemplo 2 Seja $X = C_b(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ o espaço de Banach formado pelas funções contínuas e limitadas em $\mathbb{R}$ munido da norma da convergência uniforme, isto é, $\|f\|_\infty = \sup_{t \in \mathbb{R}} |f(t)|$, $f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Consideremos o grupo de translações $(T(t))_{t \in \mathbb{R}}$ em X . Assim, temos $(T(t)f)(x) = f(x+t)$, com $f \in X$ e $t, x \in \mathbb{R}$. Agora, defina a família de operadores $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ da seguinte forma

$$(C(t)f)(x) = \frac{f(x+t) + f(x-t)}{2}, \quad f \in X, t, x \in \mathbb{R}.$$

Então, $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados em X e a família seno associada a ela é dada por

$$(S(t)f)(x) = \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} f(\tau) d\tau, \quad f \in X, t, x \in \mathbb{R}.$$

Além disso, o gerador infinitesimal de $(C(t))_{t \in \mathbb{R}}$ é dado por $A : D(A) \subset X \rightarrow X$,

$$Af = f'',$$

com $D(A) = \{f \in X; f \text{ é duas vezes diferenciável em } \mathbb{R} \text{ e } f'' \in X\}$.

Já o conjunto E , definido no início da página 3, é descrito por

$$E = \{f \in X; f \text{ é diferenciável em } \mathbb{R} \text{ e } f' \in X\}.$$

Logo, se $f \in D(A)$ e $g \in E$, então a função

$$\begin{aligned} u(x, t) &= (C(t)f)(x) + (S(t)g)(x) \\ &= \frac{1}{2} \left(f(x+t) + f(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} g(s) ds \right) \end{aligned}$$

é a solução clássica de D'Alembert para a equação da onda 1-dimensional descrita por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t), \quad (x, t) \in \mathbb{R}^2, \\ u(x, 0) &= f(x), \quad x \in \mathbb{R}, \\ u'(x, 0) &= g(x), \quad x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

cujas forma abstrata é dada por

$$\begin{aligned} w''(t) &= Aw(t), \quad t \in \mathbb{R}, \\ w(0) &= f, \\ w'(0) &= g. \end{aligned}$$

5 Conclusão

O uso de famílias de operadores lineares no estudo de equações diferenciais vem sendo empregado desde a década de 40, quando Hille e Yosida apresentaram o conceito de semigrupos de operadores lineares limitados. Desde então, essa linha de pesquisa se desenvolveu de inúmeras formas. Uma delas é a teoria das famílias seno e cosseno de operadores lineares limitados, cujas propriedades básicas foram apresentadas na segunda seção deste trabalho.

Essas duas famílias de operadores podem ser relacionadas diretamente com o problema de Cauchy homogêneo de segunda ordem, assim como os semigrupos estão relacionados com o problema de Cauchy de primeira ordem, sendo tal relação baseada no conceito de “problema bem posto”. Mais especificamente, um problema de Cauchy bem posto gera, através de suas soluções, uma família cosseno fortemente contínua de operadores lineares limitados e, por outro lado, assim como no caso das equações diferenciais ordinárias de segunda ordem, podemos obter uma solução para o problema de Cauchy homogêneo de segunda ordem composta por famílias cosseno e seno de operadores lineares limitados. Esses dois resultados são conhecidos na literatura matemática porém, neste artigo, fazemos a demonstração detalha de ambos (ver teoremas 2 e 3).

Portanto, além de abordar um tema de grande relevância na área de equações diferenciais, acreditamos que o presente artigo servirá de referência para futuros estudantes desses problemas.

Referências

- [1] DA PRATO, G.; GIUSTI, E. Una Caratterizzazione dei generatori di funzioni coseno astratte. **Boll. Unione Mat. Italiana**, v. 22, n. 3, p. 357-362, 1967.
- [2] GIUSTI, E. Funzioni coseno periodiche. **Boll. Unione Mat. Italiana**, v. 22, n. 3, p. 478-485, 1967.
- [3] FATTORINI, H. O. Ordinary differential equations in linear topological spaces, I. **J. Differential Equations**, v. 5, n. 1, p. 72-105, 1968.
- [4] FATTORINI, H. O. Ordinary differential equations in linear topological spaces, II. **J. Differential Equations**, v. 6, n.1, p. 50-70, 1969.
- [5] TRAVIS, C. C.; WEBB, G. F. Compactness, regularity, and uniform continuity properties of strongly continuous cosine families. **Houston J. Math.**, v. 3, n. 4, p. 555-567, 1977.
- [6] TRAVIS, C. C.; WEBB, G. F. Cosine families and abstract nonlinear second order differential equations. **Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae**, v. 32, n. 3-4, p. 75-96, 1978.
- [7] TRAVIS, C. C.; WEBB, G. F. Second order differential equations in Banach spaces. In: INTERNATIONAL SYMPOS. ON NONLINEAR EQUATIONS IN ABSTRACT SPACES. 1978. Arlington. **Proceedings on International Sympos. on Nonlinear Equations in Abstract spaces**. Arlington: University of Texas, 1978. p. 331-361.
- [8] BÁTKAI, A.; ENGEL, K. J.; HAASE, M. Cosine families generated by second-order differential operators on $W_{1,1}(0,1)$ with generalized Wentzell boundary conditions. **Applicable Analysis**, v. 84, n. 9, p. 867-876, 2005.

- [9] LADAS, G. E.; LAKSHMIKANTHAM, V. **Differential Equations in abstract spaces.** New York: Academic Press, 1972.
- [10] KREYSZIG, E. **Introductory functional analysis with applications.** New York: John Wiley & Sons. Inc., 1989.