**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021
Iniciação Científica

**Milena Carolina dos Santos Man-
gueira**

Instituto Federal de Educação e Tec-
nologia do Estado do Ceará
milena.carolina24@gmail.com

Renata Passos Machado Vieira

Instituto Federal de Educação e Tec-
nologia do Estado do Ceará
re.passosm@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação e Tec-
nologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

**Paula Maria Machado Cruz Ca-
tarino**

Universidade de Trás-os-Montes e
Alto Douro - Portugal
pcatarino23@gmail.com

Os números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme

The hybrid numbers of k -Mersenne and k -Oresme

Resumo

Baseada nas sequências de k -Mersenne e k -Oresme, este artigo traz um estudo referente aos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme. Desse modo, tem-se uma investigação em torno da fórmula de Binet e das funções geradoras para esses números. Diante disso, foi possível definir algumas identidades pertencentes a essas sequências híbridas generalizadas, ocorrendo um estudo do processo de complexificação e evolução dessas sequências.

Palavras-chave: Números híbridos. Sequência de k -Mersenne. Sequência de k -Oresme.

Abstract

Based on the k -Mersenne and k -Oresme sequences, this article presents a study regarding the hybrid numbers of k -Mersenne and k -Oresme. Thus, there is an investigation around Binet's formula and the generating functions for these numbers. Therefore, it was possible to define some identities belonging to these generalized hybrid sequences, taking place a study of the process of complexification and evolution of these sequences.

Keywords: Hybrid numbers. k -Mersenne sequence. k -Oresme sequence.

1 Introdução

A sequência de Mersenne e de Oresme são sequências numéricas, lineares e recorrentes de segunda ordem, apresentando as suas respectivas relações de recorrência dadas por Alves (2019), Alves, Catarino e Manguiera (2019) e Catarino, Campos e Vasco (2016): $M_n = 3M_{n-1} - 2M_{n-2}$, $n \geq 2$, e $O_n = O_{n-1} - \frac{1}{4}O_{n-2}$, $n \geq 2$, com os valores iniciais iguais a $M_0 = 2$, $M_1 = 3$ e $O_0 = \frac{1}{2}$, $O_1 = \frac{2}{4}$. A sequência híbrida de Mersenne é dada por: $HM_n = M_n + M_{n+1}i + M_{n+2}\varepsilon + M_{n+3}h$ e a sequência híbrida de Oresme é dada por: $HO_n = O_n + O_{n+1}i + O_{n+2}\varepsilon + O_{n+3}h$.

Tem-se desse modo, um estudo referente a generalização dessas sequências, em torno da sua fórmula de recorrência, denominadas de sequência de k -Mersenne e k -Oresme.

Definição 1 A recorrência da sequência de k -Mersenne e k -Oresme, respectivamente, são dadas por:

$$M_{k,n} = 3kM_{k,n-1} - 2M_{k,n-2}, n \geq 2,$$

$$O_{k,n} = kO_{k,n-1} - \frac{1}{4}O_{k,n-2}, n \geq 2$$

sendo $M_0 = 2$, $M_1 = 3$ e $O_0 = \frac{1}{2}$, $O_1 = \frac{2}{4}$ as condições iniciais.

Visando realizar uma investigação em torno dessas sequências, tem-se o processo de complexificação envolvendo os números híbridos, definido por Özdemir (2018), que apresenta os números complexos, hiperbólicos e duais juntos, combinados uns com os outros.

Definição 2 Um número híbrido é definido como:

$$\mathbb{K} = \{z = a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}.$$

Assim, tem-se algumas operações com esses números, sejam elas: soma, subtração, multiplicação por escalar. Quanto a multiplicação entre dois números híbridos, este produto é obtido distribuindo-se os termos à direita, preservando a ordem de multiplicação das unidades e utilizando as igualdades $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$, $ih = -hi = \varepsilon + i$.

Com base na multiplicação das unidades imaginárias, apresenta-se a tabela da multiplicação de um número híbrido, como mostra a Tabela 1.

$\cdot$	1	i	ε	h
1	1	i	ε	h
i	i	-1	$1 - h$	$\varepsilon + i$
ε	ε	$1 + h$	0	$-\varepsilon$
h	h	$-\varepsilon - i$	ε	1

Tabela 1: Tabela de multiplicação para $\mathbb{K}$.

O seu conjugado, denotado por $\bar{z}$ é definido como

$$\bar{z} = a - bi - c\varepsilon - dh$$

e o número real

$$C(z) = z\bar{z} = \bar{z}z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = a^2 + b^2 - 2bc - d^2$$

é chamado de caráter do número híbrido, onde a raiz desse número real será a norma do número híbrido z , assim temos que: $\|z\| = \sqrt{|C(z)|}$.

A partir disso, tem-se o processo de hibridização das sequências, como realizado em Catarino (2019), Cerda-Morales (2018), Mangueira, Vieira, Alves e Catarino (2020), Mangueira, Alves e Catarino (2020), Szynal-Liana (2018), Szynal-Liana e Wloch (2019).

Doravante, serão realizados estudos em torno desses números híbridos, desenvolvendo propriedades e teoremas.

2 Resultados

Com base nas definições dos números híbridos e dos números k -Mersenne e k -Oresme, nesta seção será apresentado algumas definições e teoremas em torno dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme.

Definição 3 Os números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, denominado por $HM_{k,n}$ e $HO_{k,n}$, são definidos como:

$$HM_{k,n} = M_{k,n} + M_{k,n+1}i + M_{k,n+2}\varepsilon + M_{k,n+3}h,$$

$$HO_{k,n} = O_{k,n} + O_{k,n+1}i + O_{k,n+2}\varepsilon + O_{k,n+3}h,$$

seja $HM_{k,0} = 2 + 3i + 5\varepsilon + 7h$ e $HM_{k,1} = 3 + 5i + 7\varepsilon + 13h$ as condições iniciais para os híbridos de k -Mersenne e $HO_{k,0} = \frac{1}{2} + \frac{2}{4}i + \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{4}{16}h$ e $HO_{k,1} = \frac{2}{4} + \frac{3}{8}i + \frac{4}{16}\varepsilon + \frac{5}{32}h$ as condições iniciais para os híbridos de k -Oresme.

Teorema 1 A sequência de números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, com $n \geq 2$, satisfazem as suas respectivas recorrências

$$HM_{k,n} = 3kHM_{k,n-1} - 2HM_{k,n-2}$$

$$HO_{k,n} = kHO_{k,n-1} - \frac{1}{4}HO_{k,n-2}.$$

Demonstração 1 Para os números híbridos de k -Mersenne, temos que:

$$\begin{aligned} 3HM_{k,n+1} - 2HM_{k,n} &= 3(M_{k,n+1} + M_{k,n+2}i + M_{k,n+3}\varepsilon + M_{k,n+4}h) - \\ &\quad 2(M_{k,n} + M_{k,n+1}i + M_{k,n+2}\varepsilon + M_{k,n+3}h) \\ &= (3M_{k,n+1} - 2M_{k,n}) + (3M_{k,n+2} - 2M_{k,n+1})i + (3M_{k,n+3} - 2M_{k,n+2})\varepsilon + \\ &\quad (3M_{k,n+4} - 2M_{k,n+3})h \\ &= M_{k,n+2} + M_{k,n+3}i + M_{k,n+4}\varepsilon + M_{k,n+5}h \\ &= HM_{k,n+2} \end{aligned}$$

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é de forma análoga.

Teorema 2 Para os híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, os polinômios característicos são dados por:

$$v^2 - 3kv + 2 = 0,$$

$$4r^2 - 4kr + 1 = 0,$$

onde são equações de segundo grau possuindo raízes reais, sejam elas: $v_1 = \frac{3k + \sqrt{9k^2 - 8}}{2}$,
 $v_2 = \frac{3k - \sqrt{9k^2 - 8}}{2}$, $r_1 = \frac{4k + \sqrt{16k^2 - 16}}{8}$ e $r_2 = \frac{4k - \sqrt{16k^2 - 16}}{8}$.

Demonstração 2 Utilizando o Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico dos híbridos de k -Mersenne é dado por Gomes e Oliveira (2019):

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Z),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e tem-se que a matriz base da sequência de Mersenne, dada por:

$$Z = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3k \end{bmatrix}. \text{ Assim, } \lambda I - Z = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3k \end{bmatrix}.$$

E ainda,

$$\det(\lambda I - Z) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda - 3k \end{vmatrix} = \lambda^2 - 3k\lambda + 2.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - 3k\lambda + 2 = 0$. Logo, $v^2 - 3kv + 2 = 0$.

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é de forma análoga.

Definição 4 O conjugado dos números híbridos k -Mersenne e k -Oresme, denotado por $\overline{HM_{k,n}}$ e $\overline{HO_{k,n}}$, são definidos como:

$$\overline{HM_{k,n}} = M_{k,n} - M_{k,n+1}i - M_{k,n+2}\varepsilon - M_{k,n+3}h.$$

$$\overline{HO_{k,n}} = O_{k,n} - O_{k,n+1}i - O_{k,n+2}\varepsilon - O_{k,n+3}h.$$

Definição 5 O caráter dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, denotados por $C(HM_{k,n})$ e $C(HO_{k,n})$, com $n \in \mathbb{N}$, são definidos como:

$$C(HM_{k,n}) = M_{k,n}^2 + (M_{k,n+1} - M_{k,n+2})^2 - M_{k,n+2}^2 - M_{k,n+3}^2.$$

$$C(HO_{k,n}) = O_{k,n}^2 + (O_{k,n+1} - O_{k,n+2})^2 - O_{k,n+2}^2 - O_{k,n+3}^2.$$

Proposição 1 A norma dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme são definidos como:

$$\|HM_{k,n}\|^2 = |M_{k,n}^2 - 3M_{k,n+1}^2 + 10M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 9M_{k,n+2}^2|,$$

$$\|HO_{k,n}\|^2 = |O_{k,n}^2 + \frac{15}{16}O_{k,n+1}^2 - \frac{3}{2}O_{k,n+1}O_{k,n+2} - O_{k,n+2}^2|.$$

Demonstração 3

$$\begin{aligned} \|HM_{k,n}\| &= \sqrt{|C(HM_{k,n})|} \\ \|HM_{k,n}\|^2 &= |M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{k,n+2} - M_{k,n+3}^2| \\ &= |M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{k,n+2} - (3HM_{k,n+2} - 2HM_{k,n+1})^2| \\ &= |M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 9M_{k,n+2}^2 + 12M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 4M_{k,n+1}^2| \\ &= |M_{k,n}^2 - 3M_{k,n+1}^2 + 10M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 9M_{k,n+2}^2|. \end{aligned}$$

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é de forma análoga.

Definição 6 O inverso dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, com $\|HM_n\| \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, são dados por:

$$HM_{k,n}^{-1} = \frac{\overline{HM_{k,n}}}{C(HM_{k,n})},$$

$$HO_{k,n}^{-1} = \frac{\overline{HO_{k,n}}}{C(HO_{k,n})}.$$

Proposição 2 A matriz dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, com $n \in \mathbb{N}$, são definidas por:

$$\varphi_{HM_{k,n}} = \begin{bmatrix} M_{k,n} + M_{k,n+2} & -M_{k,n+1} + 2M_{k,n+2} \\ 4M_{k,n+2} - 3M_{k,n+1} & M_{k,n} - M_{k,n+2} \end{bmatrix},$$

$$\varphi_{HO_{k,n}} = \begin{bmatrix} O_{k,n} + O_{k,n+2} & \frac{3}{4}O_{k,n+1} \\ 2O_{k,n+2} - \frac{5}{4}O_{k,n+1} & O_{k,n} - O_{k,n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração 4

$$\begin{aligned} \varphi_{HM_{k,n}} &= M_{k,n} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + M_{k,n+1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} + M_{k,n+2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} + M_{k,n+3} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{k,n} + M_{k,n+2} & M_{k,n+1} - M_{k,n+2} + M_{k,n+3} \\ M_{k,n+2} - M_{k,n+1} + M_{k,n+3} & M_{k,n} - M_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{k,n} + M_{k,n+2} & M_{k,n+1} - M_{k,n+2} + 3M_{k,n+2} - 2M_{k,n+1} \\ M_{k,n+2} - M_{k,n+1} + 3M_{k,n+2} - 2M_{k,n+1} & M_{k,n} - M_{k,n+2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} M_{k,n} + M_{k,n+2} & -M_{k,n+1} + 2M_{k,n+2} \\ 4M_{k,n+2} - 3M_{k,n+1} & M_{k,n} - M_{k,n+2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é realizada de forma análoga.

Proposição 3 Se $\varphi_{HM_{k,n}}$ e $\varphi_{HO_{k,n}}$ correspondem as matrizes híbridas dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, então $C(HM_{k,n}) = \det \varphi_{HM_{k,n}}$ e $\|HM_{k,n}\| = \sqrt{|\det \varphi_{HM_{k,n}}|}$, consequentemente $C(HO_{k,n}) = \det \varphi_{HO_{k,n}}$ e $\|HO_{k,n}\| = \sqrt{|\det \varphi_{HO_{k,n}}|}$.

Demonstração 5 Seja $HM_{k,n} = M_{k,n} + M_{k,n+1}i + M_{k,n+2}\varepsilon + M_{k,n+3}h$, obtemos:

$$\begin{aligned} \det \varphi_{HM_{k,n}} &= \begin{vmatrix} M_{k,n} + M_{k,n+2} & -M_{k,n+1} + 2M_{k,n+2} \\ 4M_{k,n+2} - 3M_{k,n+1} & M_{k,n} - M_{k,n+2} \end{vmatrix} \\ &= M_{k,n}^2 - M_{k,n+2}^2 + 4M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 3M_{k,n+1}^2 - 8M_{k,n+2}^2 + 6M_{k,n+1}M_{k,n+2} \\ &= M_{k,n}^2 - M_{k,n+2}^2 + 10M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 3M_{k,n+1}^2 - 8M_{k,n+2}^2 \\ &= M_{k,n}^2 - 3M_{k,n+1}^2 + 10M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 9M_{k,n+2}^2 \\ &= M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 9M_{k,n+2}^2 + 12M_{k,n+1}M_{k,n+2} - 4M_{k,n+1}^2 \\ &= M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{n+2} + M_{n+2}^2 - M_{n+2}^2 - (3HM_{n+2} - 2HM_{n+1})^2 \\ &= M_{k,n}^2 + M_{k,n+1}^2 - 2M_{k,n+1}M_{k,n+2} + M_{k,n+2}^2 - M_{k,n+2}^2 - M_{k,n+3}^2 \\ &= M_{k,n}^2 + (M_{k,n+1} - M_{k,n+2})^2 - M_{k,n+2}^2 - M_{k,n+3}^2 \\ &= C(HM_{k,n}) \end{aligned}$$

Agora, tendo em conta que $\|HM_{k,n}\| = \sqrt{|C(HM_{k,n})|}$, temos que $\|HM_{k,n}\| = \sqrt{|\det \varphi_{HM_{k,n}}|}$, como pretendíamos provar.

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é realizada de forma análoga.

Teorema 3 A matriz geradora híbrida de k -Mersenne e k -Oresme, para $n \geq 1$, é dada por:

$$\begin{bmatrix} HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \\ HM_{k,0} & -2HM_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HM_{k,n+1} & 2HM_{k,n} \\ HM_{k,n} & 2HM_{k,n-1} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} HO_{k,1} & HO_{k,0} \\ HO_{k,0} & HO_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k & 1 \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} HO_{k,n+1} & HO_{k,n} \\ HO_{k,n} & HO_{k,n-1} \end{bmatrix}.$$

Demonstração 6 Pelo princípio da indução infinita, tem-se que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \\ HM_{k,0} & -2HM_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 3kHM_{k,1} - 2HM_{k,0} & -2HM_{k,1} \\ 3kHM_{k,0} - 2HM_{k,-1} & -2HM_{k,0} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HM_{k,2} & -2HM_{k,1} \\ HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Supondo que seja válido para $n = y$, $y \in \mathbb{Z}$:

$$\begin{bmatrix} HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \\ HM_{k,0} & -2HM_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} HM_{k,y+1} & 2HM_{k,y} \\ HM_{k,y} & 2HM_{k,y-1} \end{bmatrix}$$

Dessa forma, demonstra-se que é válido para $n = y + 1$, $y \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \\ HM_{k,0} & -2HM_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^{k+1} &= \begin{bmatrix} HM_{k,1} & -2HM_{k,0} \\ HM_{k,0} & -2HM_{k,-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HM_{k,y+1} & 2HM_{k,y} \\ HM_{k,y} & 2HM_{k,y-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3k & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3kHM_{k,y+1} + 2HM_{k,y} & -2HM_{k,y+1} \\ 3kHM_{k,y} + 2HM_{k,y-1} & -2HM_{k,y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} HM_{k,y+2} & 2HM_{k,y+1} \\ HM_{k,y+1} & 2HM_{k,y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é de forma análoga.

Teorema 4 A função geradora dos números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme, denotados por $G_{HM_{k,n}}(v)$ e , são dados por:

$$G_{HM_{k,n}}(v) = \frac{HM_{k,0} + (HM_{k,1} - 3kHM_{k,0})v}{(1 - 3kv + 2v^2)},$$

$$G_{HO_{k,n}}(r) = \frac{HO_{k,0} + (HO_{k,1} - kHO_{k,0})r}{(1 - kr + \frac{1}{4}r^2)}.$$

Demonstração 7 Para definir a função geradora do número híbrido de k -Mersenne, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes

$$G_{HM_{k,n}}(v) = \sum_{n=0}^{\infty} HM_{k,n} v^n.$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{HM_{k,n}}(v) &= HM_{k,0} + HM_{k,1}v + HM_{k,2}v^2 + \dots + HM_{k,n}v^n + \dots \\ -3kvG_{HM_{k,n}}(v) &= -3kHM_{k,0}v - 3kHM_{k,1}v^2 - 3kHM_{k,2}v^3 - \dots - 3kHM_{k,n}v^{n+1} - \dots \\ 2v^2G_{HM_{k,n}}(v) &= 2HM_{k,0}v^2 + 2HM_{k,1}v^3 + 2HM_{k,2}v^4 + \dots + 2HM_{k,n}v^{n+2} + \dots \end{aligned}$$

Somando cada membro, temos:

$$\begin{aligned} (1 - 3kv + 2v^2)G_{HM_{k,n}}(v) &= HM_{k,0} + (HM_{k,1} - 3kHM_{k,0})v + (HM_{k,2} - 3kHM_{k,1} + 2HM_{k,0})v^2 + \\ &\quad (HM_{k,3} - 3kHM_{k,2} + 2HM_{k,1})v^3 + \dots + \\ &\quad (HM_{k,n} - 3kHM_{k,n-1} + 2HM_{k,n-2})v^n \\ &= HM_{k,0} + (HM_{k,1} - 3kHM_{k,0})v + 0v^2 + 0v^3 + \dots + 0v^n \\ G_{HM_{k,n}}(v) &= \frac{HM_{k,0} + (HM_{k,1} - 3kHM_{k,0})v}{(1 - 3kv + 2v^2)} \end{aligned}$$

A demonstração para os números híbridos de k -Oresme é realizada de forma análoga.

Teorema 5 Para $n \geq 0$, tem-se que a fórmula de Binet para o número híbrido de k -Mersenne, é dado por:

$$HM_{k,n} = \frac{(HM_{k,0}v_2 - HM_{k,1})v_1^n - (HM_{k,0}v_1 - HM_{k,1})v_2^n}{v_2 - v_1},$$

seja v_1 e v_2 a raiz da equação característica da sequência.

Demonstração 8 Tem-se que a fórmula de Binet pode ser representada da seguinte maneira:

$$HM_{k,n} = Av_1^n + Bv_2^n.$$

Para $n = 0$, tem-se: $A + B = HM_{k,0}$ e, para $n = 1$, temos $Av_1 + Bv_2 = HM_{k,1}$.

Podemos construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B &= HM_{k,0} \\ Av_1 + Bv_2 &= HM_{k,1} \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, temos que os coeficientes encontrados foram: $A = \frac{HM_{k,0}v_2 - HM_{k,1}}{v_2 - v_1}$

$$\text{e } B = \frac{HM_{k,1} - HM_{k,0}v_1}{v_2 - v_1}.$$

Fazendo as devidas substituições na fórmula de Binet, temos:

$$HM_{k,n} = \frac{(HM_{k,0}v_2 - HM_{k,1})v_1^n - (HM_{k,0}v_1 - HM_{k,1})v_2^n}{v_2 - v_1}.$$

Definição 7 Os números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme com índices negativos são definidos por:

$$\begin{aligned} MH_{k,-n} &= M_{k,-n} + M_{k,-n+1}i + M_{k,-n+2}\varepsilon + M_{k,-n+3}h, \\ OH_{k,-n} &= O_{k,-n} + O_{k,-n+1}i + O_{k,-n+2}\varepsilon + O_{k,-n+3}h, \end{aligned}$$

seja $HM_{k,-1} = -\frac{1}{2} + \varepsilon + 3h$, $HM_{k,-2} = -\frac{3}{4} - \frac{1}{2}i + h$, as condições iniciais para os híbridos de k -Mersenne e $HO_{k,-1} = -2 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{2}{4}h$ e $HO_{k,-2} = -8 - 2i + \frac{1}{2}h$ as condições iniciais para os híbridos de k -Oresme.

Teorema 6 A matriz geradora híbrida de Mersenne para índice inteiro não positivo, $n > 0$, é dada por:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} HM_0 & HM_{-1} \\ HM_1 & HM_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{3}{2}k \end{bmatrix}^n &= \begin{bmatrix} HM_{-n} & HM_{-n-1} \\ HM_{-n+1} & HM_{-n} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} HO_1 & HO_0 \\ HO_0 & HO_{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4k \end{bmatrix}^n &= \begin{bmatrix} HO_{-n+1} & HO_{-n} \\ HO_{-n} & HO_{-n-1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Demonstração 9 De modo análogo à demonstração do Teorema 3, pode-se validar este teorema.

3 Conclusão

Com o presente estudo foi possível investigar matematicamente as sequências de Mersenne e Oresme, generalizando-as em relação a sua recursividade. Diante disso, foram estudadas as sequências híbridas de k -Mersenne e k -Oresme, obtendo teoremas e propriedades em vista do processo de complexificação e aprofundamento das sequências estudadas. Desse modo, pode-se afirmar que os resultados apresentados possuem o viés de motivar novas investigações sobre os números de híbridos de k -Mersenne e k -Oresme.

4 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

5 Referências Bibliográficas

ALVES, F. R. V. Sequência de Oresme e algumas propriedades (matriciais) generalizadas. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 16, p. 28-52, 2019. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/v16a03-sequencia-de-oresmee-algumas-propriedades.pdf>. Acesso em: 23 nov. 2021.

MANGUEIRA, M. C. S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Os números híbridos de k -Mersenne e k -Oresme. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 21, p. 50–58, dez. 2021. Edição Iniciação Científica.

DOI: 10.21167/cqdvol21ic202123169664mcsmrpmvfrvappmmcc5058 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd

ALVES, F.; CATARINO, P.; MANGUEIRA, M. Discovering theorems about the gaussian Mersenne sequence with the maple's help. *Annals. Computer Science Series*, v. 17, n. 2, 2019.

CATARINO, P.; CAMPOS, H.; VASCO, P. On the Mersenne sequence. *Annales Mathematicae et Informaticae*, v. 46, p. 37-53, 2016.

CATARINO, P. On k -Pell hybrid numbers. *Journal of Discrete Mathematical Sciences and Cryptography*, v. 22, n. 1, p. 83-89, 2019.

CERDA-MORALES, G. Investigation of generalized hybrid Fibonacci numbers and their properties. **arXiv:1806.02231v1 [math.RA]**, 2018, Disponível em: <https://arxiv.org/pdf/1806.02231.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2021.

GOMES, C. A.; OLIVEIRA, R. B. d. O. O Teorema de Cayley-Hamilton. [S.l.]: IME-USP, 2019.

MANGUEIRA, M. C. dos S.; VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. The hybrid numbers of Padovan and some identities. *Annales Mathematicae Silesianae*, v. 34, n. 2, p. 256-267, 2020.

MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Números híbridos de Mersenne. **C.Q.D.-Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 18, p. 1-11, 2020. Edição Iniciação Científica. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd2228/j2001-compilado-com-errata-2.pdf>. Acesso em: 22 nov. 2021.

ÖZDEMİR, M. Introduction to hybrid numbers. *Advances in Applied Clifford Algebras*, v. 28, n. 1, art. 11, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1007/s00006-018-0833-3>. Disponível em: <https://link.springer.com/article/10.1007/s00006-018-0833-3>. Acesso em: 23 nov. 2021.

SZYNAL-LIANA, A. The Horadam hybrid numbers. *Discussiones Mathematicae-General Algebra and Applications, Sciendo*, v. 38, n. 1, p. 91-98, 2018.

SZYNAL-LIANA, A.; WŁOCH, I. On Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas Hybrid Numbers. In: *Annales Mathematicae Silesianae*, v. 33, n. 1, p. 276-283, 2019. Disponível em: <https://content.sciendo.com/view/journals/amsil/33/1/article-p276.xml>. Acesso em: 22 nov. 2021.