**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Renata Passos Machado Vieira

SEDUC-CE

Secretaria de Educação do Estado
do Ceará

re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves

IFCE/Fortaleza

Instituto Federal de Educação, Ciên-
cia e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@gmx.fr

**Paula Maria Machado Cruz Ca-
tarino**

UTAD/Portugal

Universidade de Trás os Montes de
Alto Douro

pcatarino23@gmail.com

A generalização da sequência de Padovan-Perrin

The generalization of the Padovan-Perrin sequence

Resumo

O trabalho retrata um estudo referente à sequência mista, unindo características matemáticas da sequência de Padovan e Perrin, denominada de sequência de Padovan-Perrin. Esses números representam uma sequência recorrente linear de terceira ordem, definindo nesta pesquisa a sua recorrência e outros aspectos matemáticos. Esse trabalho contém um estudo em relação a sua equação característica, fórmula de Binet, função geradora e forma matricial desses números, realizando assim uma investigação e aprofundamento matemáticos em torno do assunto de sequências numéricas. Para trabalhos futuros, busca-se uma aplicação desse estudo em outras áreas, tais como ensino e informática, podendo assim ocorrer uma ligação desse assunto, gerando uma melhor compreensão do conteúdo matemático abordado, sem perder o seu rigor.

Palavras-chave: Sequência mista. Sequência de Padovan. Sequência de Perrin. Sequência de Padovan-Perrin.

Abstract

The work portrays a study regarding the mixed sequence, joining mathematical characteristics of the Padovan and Perrin sequence, called the Padovan-Perrin sequence. These numbers represent a third-order linear recurring sequence, defining in this research its recurrence and other mathematical aspects. This work contains a study in relation to its characteristic equation, Binet's formula, generating function and matrix form of these numbers, thus carrying out a mathematical investigation and deepening around the subject of numerical sequences. For future work, an application of this study in other areas is sought, such as teaching and information technology, so that this subject may be linked, generating a better understanding of the mathematical content covered, without losing its rigor.

Keywords: Mixed sequence. Padovan sequence. Perrin's Sequence. Padovan-Perrin sequence.

1 Introdução

Os números de Padovan, denominados de Pa_n e os números de Perrin, denominados de Pe_n , são sequências lineares e recorrentes de terceira ordem [1]. A sequência de Padovan, possui a sua fórmula de recorrência, dada por:

$$Pa_n = Pa_{n-2} + Pa_{n-3}, n \geq 3, Pa_0 = Pa_1 = Pa_2 = 1.$$

Esses números possuem esse nome em homenagem ao arquiteto italiano Richard Padovan (1945-), após realizar estudos referentes ao trabalho do arquiteto Hans van der Laan (1904-1991), criando assim a sequência de Padovan [2,3].

Já os números de Perrin, foram criados pelo engenheiro francês Olivier Raoul Perrin (1841-1910), possuindo algumas relações matemáticas similares aos números de Padovan [4]. De modo similar como acontece com a sequência de Fibonacci e Lucas, em que possuem a mesma relação de recorrência, sendo essa dada por $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 2$. Assim, observa-se diferença nos valores iniciais entre essas duas sequências, onde a sequência de Fibonacci possui os seus termos iniciais iguais a $F_0 = F_1 = 1$ e Lucas possui os seus valores iniciais $L_0 = 2, L_1 = 1$ [5,6]. Desse modo, tem-se a sequência de Padovan e Perrin, onde apresenta uma alteração dos valores iniciais, carregando propriedades matemáticas oriundas dos números de Padovan.

A sequência de Perrin, possui a sua recorrência dada por:

$$Pe_n = Pe_{n-2} + Pe_{n-3}, n \geq 3, Pe_0 = 3, Pe_1 = 0, Pe_2 = 2.$$

Assim, percebe-se semelhanças entre esses dois números, permitindo observar a diferença em relação aos valores iniciais dessas sequências apresentadas. Tão logo, o polinômio característico de ambas são representados por: $x^3 - x - 1 = 0$ [2], possuindo como soluções duas raízes complexas e uma raiz real. Alguns outros aspectos matemáticos, podem ser estudados em outros trabalhos, tratando da sua respectiva forma matricial, fórmula de Binet, função geradora e entre outros aspectos [7,8].

Ademais, é introduzida a sequência de Padovan-Perrin, com base no trabalho [5], estudando alguns teoremas matemáticos, definições e algumas identidades envolvendo características matemáticas referente a essa nova sequência apresentada neste trabalho. Por fim, apresenta-se a extensão da sequência, generalizando-a para os números inteiros, obtendo determinados teoremas.

O trabalho é uma generalização das sequências de Padovan e Perrin, baseados na referência [5], onde é estabelecida uma generalização das sequências de Fibonacci e Lucas. Em [5], fica claro que, variando os valores de a e b , tem-se a sequência de Fibonacci e a sequência De Lucas como casos particulares. Na generalização apresentada neste artigo, se a, b e c são inteiros, nenhuma das sequências, nem a Padovan nem a Perrin, são obtidas como casos particulares.

2 A sequência de Padovan-Perrin

A sequência de Padovan-Perrin, é uma sequência de terceira ordem, linear e recorrente, em que carrega consigo características matemáticas oriundas dos números de Padovan e Perrin.

Definição 1. A sequência recorrente $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$

$$S_n = S_{n-2} + S_{n-3}, n \geq 3, S_0 = 3a, S_1 = 1, S_2 = 2b,$$

com a e b sendo números inteiros, é chamada de sequência de Padovan-Perrin. Dessa forma, têm-se os primeiros termos dessa sequência, como sendo:

$$\begin{aligned} S_0 &= 3a, \\ S_1 &= 1, \\ S_2 &= 2b, \\ S_3 &= 3a + 1, \\ S_4 &= 2b + 1, \\ S_5 &= 3a + 2b + 1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_6 &= 3a + 2b + 2, \\ S_7 &= 3a + 4b + 2, \\ S_8 &= 6a + 4b + 3, \\ S_9 &= 6a + 6b + 4, \\ S_{10} &= 9a + 8b + 5. \end{aligned}$$

Definição 2. O polinômio característico da sequência Padovan-Perrin é dada por:

$$\lambda^3 - \lambda - 1 = 0$$

As raízes desse polinômio de terceiro grau são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}}, \\ \lambda_2 &= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 + 0,56228i, \\ \lambda_3 &= \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{23}{3}}} \approx -0,662359 - 0,56228i, \end{aligned}$$

sendo portanto uma delas um número real e as outras duas números complexos não reais. A raiz real é conhecida como número plástico [10].

Teorema 3. A fórmula de Binet de Padovan-Perrin é dada por:

$$S_n = At_1^n + Bt_2^n + Ct_3^n$$

onde $n \in \mathbb{Z}$, t_1, t_2 e t_3 são as raízes do polinômio característico e os coeficientes são dados por:

$$A = \frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)}, B = \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)}, C = \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)}.$$

Demonstração. De forma a realizar a demonstração de uma forma mais diferenciada do que as demais existentes em determinados estudos referentes à demonstração da fórmula de Binet, tem-se a utilização do método de BenTaher-Rachidi [11].

Dessa forma, tem-se a sua respectiva forma polinomial $p(\lambda) = \lambda^3 - \lambda - 1$. A derivada é então calculada, resultando em $p'(\lambda) = 3\lambda^2 - 1$. Portanto, de acordo com o método e os coeficientes de sequência, tem-se que: $A_0 = a_2S_0 + a_1S_1 + a_0S_2 = 3a + 1$, $A_1 = a_2S_1 + a_1S_2 = 2b + 1$ e $A_2 = a_2S_2 = 2b$.

Assim na fórmula, veja [11]:

$$V_n = \sum_{i=1}^r \frac{1}{p'(\lambda_i)} \left(\sum_{p=0}^{r-1} \frac{A_p}{\lambda_i^{p+1}} \right) \lambda_i^n,$$

para $n \geq r$, onde $A_p = a_{r-1}V_p + \dots + a_pV_{r-1}$.

É possível obter:

$$S_n = \frac{1}{p'(\lambda_1)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_1^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_1^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_1^{2+1}} \right) \lambda_1^n + \frac{1}{p'(\lambda_2)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_2^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_2^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_2^{2+1}} \right) \lambda_2^n + \frac{1}{p'(\lambda_3)} \cdot \left(\frac{A_0}{\lambda_3^{0+1}} + \frac{A_1}{\lambda_3^{1+1}} + \frac{A_2}{\lambda_3^{2+1}} \right) \lambda_3^n$$

Realizando a substituição dos valores calculados anteriormente e utilizando relações de Girard $t_1t_2t_3 = 1, t_1 + t_2 + t_3 = 0$ e $t_1t_2 + t_1t_3 + t_2t_3 = -1$, tem-se que:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3t_1^2 - 1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_1} + \frac{2b+1}{t_1^2} + \frac{2b}{t_1^3} \right) (t_1)^n + \frac{1}{3t_2^2 - 1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_2} + \frac{2b+1}{t_2^2} + \frac{2b}{t_2^3} \right) (t_2)^n \\ &+ \frac{1}{3t_3^2 - 1} \cdot \left(\frac{3a+1}{t_3} + \frac{2b+1}{t_3^2} + \frac{2b}{t_3^3} \right) (t_3)^n \\ &= \left(\frac{3at_1^2 + t_1 + 2bt_1 + t_1 + 2b}{3t_1^5 - t_1^3} \right) (t_1)^n + \left(\frac{3at_2^2 + t_2 + 2bt_2 + t_2 + 2b}{3t_2^5 - t_2^3} \right) (t_2)^n + \left(\frac{3at_3^2 + t_3 + 2bt_3 + t_3 + 2b}{3t_3^5 - t_3^3} \right) (t_3)^n \\ &= \left[\frac{3at_1^2 + t_1 + 2bt_1 + t_1 + 2bt_1t_2t_3}{t_1(3t_1^4 - t_1^2)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_2^2 + t_2 + 2bt_2 + t_2 + 2bt_1t_2t_3}{t_2(3t_2^4 - t_2^2)} \right] (t_2)^n \\ &+ \left[\frac{3at_3^2 + t_3 + 2bt_3 + t_3 + 2bt_1t_2t_3}{t_3(3t_3^4 - t_3^2)} \right] (t_3)^n \\ &= \left[\frac{3at_1 + t_1 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_2 - 2bt_1t_3}{t_1(3t_1^3 - t_1)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_2 + t_2 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_2 - 2bt_2t_3}{t_2(3t_2^3 - t_2)} \right] (t_2)^n \\ &+ \left[\frac{3at_3 + t_3 + t_1t_2t_3 - 2bt_1t_3 - 2bt_2t_3}{t_3(3t_3^3 - t_3)} \right] (t_3)^n \\ &= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{t_1(3t_1^2 - 1)} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{t_2(3t_2^2 - 1)} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{t_3(3t_3^2 - 1)} \right] (t_3)^n \\ &= \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{3t_1^2 - 1} \right) (t_1)^n + \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{3t_2^2 - 1} \right) (t_2)^n + \left(\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{3t_3^2 - 1} \right) (t_3)^n \\ &= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{2t_1^2 + t_1^2 - 1} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{2t_2^2 + t_2^2 - 1} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{2t_3^2 + t_3^2 - 1} \right] (t_3)^n \\ &= \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{t_1^2 - t_1t_2 - t_1t_3 + t_2t_3} \right] (t_1)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{t_2^2 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1t_3} \right] (t_2)^n + \left[\frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{t_3^2 - t_1t_3 - t_3t_3 + t_1t_2} \right] (t_3)^n \\ &= \frac{3at_1t_2t_3 - t_2 - t_3 + 2b}{(t_1 - t_2)(t_1 - t_3)} (t_1)^n + \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_3 + 2b}{(t_2 - t_1)(t_2 - t_3)} (t_2)^n + \frac{3at_1t_2t_3 - t_1 - t_2 + 2b}{(t_3 - t_1)(t_3 - t_2)} (t_3)^n \end{aligned}$$

Obtendo a respectiva fórmula de Binet. □

Uma função geradora é uma função que possibilita a resolução de recorrências lineares com coeficientes constantes [12].

Definição 4. Uma função $f(x)$ é uma função geradora para uma sequência de números reais $(a_0, a_1, a_2, \dots)$, relativa à sequência de funções $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots)$ se [13]:

$$f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \dots + a_n f_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n(x)$$

Uma série formal é uma série onde os seus coeficientes carregam consigo informações sobre uma sucessão a_n com n pertencendo aos números naturais, e sendo uma função $g(a_n, x)$ definida pela série ordinária:

$$g(a_n, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 x^0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

A função geradora da sucessão de Fibonacci é dada por [14]:

$$G(F_n, x) = \frac{x}{(1 - x - x^2)}.$$

Dessa forma, realizando a divisão direta pode-se obter os termos da sequência de Fibonacci, onde o expoente de x indica a posição do termo da sequência. Este procedimento demonstrou como obter os números de Fibonacci sem haver a necessidade de calcular todos os números que o precedem.

De forma semelhante como ocorre com a sequência de Padovan [7], essa função é multiplicada por x^2, x^3 nas equações abaixo devido a sua relação de recorrência.

Teorema 5. A função geradora de Padovan-Perrin, é dada por:

$$G(S_n, x) = \frac{3a + x + (2b - 3a)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função $G(S_n, x) = S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + S_3 x^3 + S_4 x^4 + \dots$ por x^2 e x^3 , tem-se:

$$\begin{aligned} G(S_n, x) &= S_0 + S_1 x + S_2 x^2 + S_3 x^3 + S_4 x^4 + \dots \\ x^2 G(S_n, x) &= S_0 x^2 + S_1 x^3 + S_2 x^4 + S_3 x^5 + S_4 x^6 + \dots \\ x^3 G(S_n, x) &= S_0 x^3 + S_1 x^4 + S_2 x^5 + S_3 x^6 + S_4 x^7 + \dots \end{aligned}$$

Dessa forma $G(S_n, x) - [x^2 G(S_n, x) + x^3 G(S_n, x)]$, com os valores iniciais $S_0 = 3a, S_1 = 1, S_2 = 2b$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} G(S_n, x)(1 - x^2 - x^3) &= S_0 + S_1 x + (S_2 - S_0)x^2 \\ &= S_0 + S_1 x + (S_2 - S_0)x^2 \\ G(S_n, x) &= \frac{3a + x + (2b - 3a)x^2}{(1 - x^2 - x^3)}. \end{aligned}$$

□

Teorema 6. A forma matricial da sequência Padovan-Perrin, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+2} & S_{n+1} & S_n \end{bmatrix}, n > 0.$$

Demonstração. Por meio do princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3a & 2b & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_3 & S_2 & S_1 \end{bmatrix}.$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k, k \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_k \end{bmatrix}.$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} S_{k+2} & S_{k+1} & S_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+1} + S_k & S_{k+2} & S_{k+1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} S_{k+3} & S_{k+2} & S_{k+1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

É importante ressaltar que além da forma matricial apresentada no Teorema 6, existem outras cinco formas matriciais de Padovan-Perrin, obtidas a partir da permutação das linhas e colunas das duas matrizes que compõe a forma matricial.

Teorema 7. Outras formas matriciais da sequência Padovan-Perrin, são dadas por:

$$\begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_n & S_{n+2} & S_{n+1} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+2} & S_n & S_{n+1} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_n & S_{n+1} & S_{n+2} \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+1} & S_{n+2} & S_n \end{bmatrix}, n > 0.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} S_{n+1} & S_n & S_{n+2} \end{bmatrix}, n > 0.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 6. □

3 Identidades da sequência de Padovan-Perrin

Com base na definição da sequência, tem-se que são estudadas algumas identidades matemáticas relacionadas a esses números.

Identidade 8. A soma dos n primeiros termos de índice ímpar de Padovan-Perrin é dado por:

$$\sum_{i=1}^n S_{2i-1} = S_{2n+2} - 2b.$$

Demonstração. Partindo da definição dos números de Padovan-Perrin descritos na definição notacional e considerando apenas os termos de índice ímpar, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n S_{2i-1} &= S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2n-1} \\ &= (S_4 - S_2) + (S_6 - S_4) + (S_8 - S_6) + \dots + (S_{2n+2} - S_{2n}). \end{aligned}$$

Considerando:

$$S_{2i-1} = S_{2i+2} - S_{2i}.$$

Dessa forma, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^n S_{2i-1} = S_{2n+2} - S_2 = S_{2n+2} - 2b,$$

onde, na segunda igualdade, utilizamos o fato de que $S_{2i-1} = S_{2i+2} - S_{2i}$. □

Identidade 9. A soma dos n primeiros termos de índice par de Padovan-Perrin é dada por:

$$\sum_{i=1}^n S_{2i} = S_{2n+3} - 3a - 1.$$

Demonstração. De forma similar, em que parte da apresentação dos números de Padovan-Perrin por meio da definição notacional, porém, considerando apenas os termos de índice par, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n S_{2i} &= S_2 + S_4 + S_6 + \dots + S_{2n} \\ &= (S_5 - S_3) + (S_7 - S_5) + (S_9 - S_7) + \dots + (S_{2n+3} - S_{2n+1}) \\ &= S_{2n+3} - S_3 \\ &= S_{2n+3} - 3a - 1.\end{aligned}$$

□

Identidade 10. A soma dos n primeiros termos de Padovan-Perrin é dada por:

$$\sum_{i=1}^n S_i = S_{n+5} - 2b - 3a - 1.$$

Demonstração. Para realizar a presente demonstração, pode-se separar a soma de todos os primeiros termos como sendo a soma daqueles que tem índices ímpares, mais a soma daqueles que tem índices pares.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n S_i &= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 + \dots + S_n \\ &= (S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2n-1}) + (S_2 + S_4 + \dots + S_{2n}).\end{aligned}$$

Assim, utilizando as Identidades 8 e 9, tem-se:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n S_i &= (S_1 + S_3 + S_5 + \dots + S_{2n-1}) + (S_2 + S_4 + \dots + S_{2n}) \\ &= S_{2n+2} - 2b + S_{2n+3} - 3a - 1 \\ &= S_{2n+3} + S_{2n+2} - 2b - 3a - 1 \\ &= S_{n+5} - 2b - 3a - 1.\end{aligned}$$

□

Identidade 11. A soma de quaisquer três termos consecutivos de Padovan-Perrin é dada por:

$$S_n + S_{n+1} + S_{n+2} = S_{n+5}.$$

Demonstração. Aplicando a definição da sequência, tem-se:

$$\begin{aligned}S_n + S_{n+1} + S_{n+2} &= S_{n+3} + S_{n+2} \\ &= S_{n+5}.\end{aligned}$$

□

Identidade 12. A soma de quaisquer sete termos consecutivos de Padovan-Perrin é dada por:

$$\sum_{i=0}^6 S_{n+i} = 2S_{n+8}.$$

Demonstração. De posse da definição da sequência, é possível obter:

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=0}^6 S_{n+i} &= S_n + S_{n+1} + S_{n+2} + S_{n+3} + S_{n+4} + S_{n+5} + S_{n+6} \\
 &= S_{n+3} + S_{n+2} + S_{n+3} + S_{n+4} + S_{n+5} + S_{n+6} \\
 &= S_{n+5} + S_{n+6} + S_{n+5} + S_{n+6} \\
 &= S_{n+8} + S_{n+8} \\
 &= 2S_{n+8}.
 \end{aligned}$$

□

4 A generalização da sequência de Padovan-Perrin

Nesta seção, é então realizada a extensão da sequência para os números inteiros, com o viés de obter a generalização dessa sequência numérica. Assim, a partir da Definição 2 e da relação $S_n = S_{m+3} - S_{m+1}$, onde $m, n \in \mathbb{N}$, com $m, n < 0$, tem-se que os primeiros termos são dados por:

$$\begin{aligned}
 S_{-1} &= -3a + 2b, \\
 S_{-2} &= 3a - 2b + 1, \\
 S_{-3} &= 2b - 1, \\
 S_{-4} &= -3a + 1, \\
 S_{-5} &= 6a - 2b, \\
 S_{-6} &= -6a + 4b - 1, \\
 S_{-7} &= 3a - 4b + 2, \\
 S_{-8} &= 3a + 2b - 2, \\
 S_{-9} &= -9a + 2b + 1, \\
 S_{-10} &= 12a - 6b + 1.
 \end{aligned}$$

Dessa forma são discutidos os teoremas apresentados abaixo.

Teorema 13. *A função geradora da sequência de Padovan-Perrin para os números inteiros não positivos, é dada por:*

$$G(S_{-n}, x) = \frac{-3a - 2bx - x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. A função $G(S_{-n}, x)$ é multiplicada por x^3 e x , resultando em:

$$\begin{aligned}
 G(S_{-n}, x) &= S_0 + S_{-1}x + S_{-2}x^2 + S_{-3}x^3 + S_{-4}x^4 + \dots \\
 xG(S_{-n}, x) &= S_0x + S_{-1}x^2 + S_{-2}x^3 + S_{-3}x^4 + S_{-4}x^5 + \dots \\
 x^3G(S_{-n}, x) &= S_0x^3 + S_{-1}x^4 + S_{-2}x^5 + S_{-3}x^6 + S_{-4}x^7 + \dots
 \end{aligned}$$

Assim, realizando a operação $G(S_{-n}, x) - [xG(S_{-n}, x) + x^3G(S_{-n}, x)]$, com os valores iniciais $S_0 = 3a, S_{-1} = -3a + 2b, S_{-2} = 3a - 2b + 1$, obtêm-se:

$$\begin{aligned} G(S_{-n}, x)(x^3 - x - 1) &= -S_0x - S_{-1}x^2 - S_0 - S_{-1}x - S_{-2}x^2 \\ G(S_{-n}, x)(x^3 - x - 1) &= -3ax - (-3a + 2b)x^2 - 3a - (-3a + 2b)x - (3a - 2b + 1)x^2 \\ G(S_{-n}, x)(x^3 - x - 1) &= -3a - 2bx - x^2 \\ G(S_{-n}, x) &= \frac{-3a - 2bx - x^2}{x^3 - x - 1}. \end{aligned}$$

□

Antes de iniciarmos os estudos da forma matricial da sequência de Padovan-Perrin generalizada, tem-se que A é uma matriz da sequência de Padovan, em que carrega consigo as informações da fórmula de recorrência da sequência. Dessa forma, ao ser elevada a n -ésima potência, pode-se obter os termos da sequência de Padovan.

Assim, tem-se $A^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}$, em que A^{-n} é a inversa da matriz A^n , com $n > 0$ e P_n é o n -ésimo termo da sequência de Padovan.

Teorema 14. *As formas matriciais da sequência Padovan-Perrin para os números inteiros não positivos, com $n > 0, n \in \mathbb{N}$, são dadas por:*

$$\begin{bmatrix} 2b & 1 & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n+2} & S_{-n+1} & S_{-n} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 2b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n} & S_{-n+2} & S_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 2b & 3a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n+2} & S_{-n} & S_{-n+1} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3a & 1 & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n} & S_{-n+1} & S_{-n+2} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2b & 3a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n+1} & S_{-n+2} & S_{-n} \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3a & 2b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-n} = \begin{bmatrix} S_{-n+1} & S_{-n} & S_{-n+2} \end{bmatrix}.$$

Demonstração. De modo análogo à demonstração do Teorema 6.

□

5 Conclusão

O presente estudo realizado possibilitou a introdução da sequência de Padovan-Perrin, bem como da sua respectiva generalização para os números inteiros. Dessa forma, foram abordados aspectos matemáticos em torno desses números, destacando a sua função geradora, fórmula de Binet, equação característica, forma matricial e algumas identidades.

Diante disso, busca-se para estudos futuros, aplicações desses números em outras áreas, abordando uma forma de visualização dessa sequência, com base nos aspectos matemáticos estudados.

6 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES).

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P (FCT), no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

7 Referências Bibliográficas

- [1] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a sequência de Padovan mediante de investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim GEPEM**, v. 74, p. 162-169, 2019.
- [2] SOKHUMA, K. Padovan Q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 56, p. 2777-2780, 2013.
- [3] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. A Historical Analysis of The Padovan Sequence. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, v. 3, n. 1, p. 8-12, 2020.
- [4] ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M.; CATARINO, P. M. M. C. Visualizing the Newtons fractal from the recurring linear sequence with Google Colab: an example of Brazil X Portugal research. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 3, p. 1-19, 2020.
- [5] SINGH, B.; SIKHWAL, O.; GUPTA, Y. K. Generalized Fibonacci-Lucas Sequence. **Turkish Journal of Analysis and Number Theory**, v. 2, n. 6, p. 193-197, 2014.
- [6] SILVA, B. A. **Números de Fibonacci e números de Lucas**. 2017. 81 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) - Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2017.
- [7] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Propriedades das extensões da Sequência de Padovan. **C.Q.D.- Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, v. 15, p. 24-40, 2019. Edição Iniciação Científica.
- [8] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Sequences of Tridovan and their identities. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 185-197, 2019.

- [9] GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. R. B. **O Teorema de Cayley-Hamilton**. [São Paulo]: IME/USP, [2019]. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~oliveira/ELE-Cayley-Hamilton.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2021.
- [10] AARTS, J.; FOKKINK, R.; KRUIJTZER, G. Morphic numbers. **Nieuw Archief voor Wiskunde**, v. 5, n. 2, p. 56-58, 2001.
- [11] TAHER, R. B.; RACHIDI, M. Solving some generalized Vandermonde systems and inverse of their associate matrices via new approaches for the Binet formula. **Applied Mathematics and Computation**, v. 290, p. 267-280, 2016.
- [12] KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley-Interscience, 2001.
- [13] SÁ, L. S. C.; SPREAFICO, E. V. P. Funções geradoras em recorrências lineares. **PORANDU - Revista de Divulgação Científica em Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 3, n. 1, p. 33-40, 2019.
- [14] JESUS, M. D. do N. de. **Sucessão de Fibonacci e uma sua generalização**. Coimbra: Universidade de Coimbra, [2012?]. Projeto Educacional I do Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e no Secundário. Disponível em: <http://www.mat.uc.pt/nep/PagWebEscola/ProjetoEI%28Final%29.pdf>. Acesso em: 09 nov. 2021.