**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Milena Carolina dos Santos Mangueira

Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
milencarolina24@gmail.com

Francisco Régis Vieira Alves

Instituto Federal de Educação e Tecnologia do Estado do Ceará
fregis@ifce.edu.br

Paula Maria Machado Cruz Catarino

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro - Portugal
pcatarino23@gmail.com

Os biquaternions elípticos de Leonardo

Leonardo's elliptical biquaternions

Resumo

Este trabalho mostra um processo evolutivo matemático da sequência de Leonardo, assim é apresentado os números biquaternions elípticos de Leonardo. Estes números foram desenvolvidos a partir do conjunto dos números complexos, quaternions e dos biquaternions elípticos. Portanto, são apresentados definições e propriedades em torno desses números, tais quais: sua recorrência, equação característica, fórmula de Binet, função geradora, forma matricial e, também, sua extensão para os números inteiros não positivos.

Palavras-chave: Biquaternions elípticos. Forma matricial. Números de Leonardo. Quaternions.

Abstract

This work shows a mathematical evolutionary process of Leonardo's sequence, in which Leonardo's elliptical biquaternion numbers are presented. These numbers were developed from the set of complex numbers, quaternions and elliptical biquaternions. Therefore, definitions and properties involving these numbers are presented, such as: its recurrence, characteristic equation, Binet formula, generating function, matrix form and, also, its extension for non-positive integers.

Keywords: Elliptical biquaternions. Matrix form. Leonardo numbers. Quaternions.

1 Introdução

Os números de Leonardo Le_n , $n \in \mathbb{N}$, fazem parte de uma sequência linear e recorrente, a qual vem sendo estudada e explorada recentemente pelos autores Alves e Vieira (2020), Shannon (2019), Vieira, Alves e Catarino (2019) e Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2020). No trabalho Catarino e Borges (2020), ressalta-se que esta sequência possui uma realação com a sequência de Fibonacci e percebe-se grande similiariedade entre as sequências. Com isso, temos que a sua recorrência é definida pela fórmula abaixo:

$$Le_n = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1, n \geq 2,$$

com $Le_0 = Le_1 = 1$.

Reescrevendo essa recorrência para $n + 1$ obtêm $Le_{n+1} = Le_n + Le_{n-1} + 1$. E ainda, subtraindo $Le_n - Le_{n+1}$ encontra-se uma outra relação de recorrência para esta sequência:

$$Le_n - Le_{n+1} = Le_{n-1} + Le_{n-2} + 1 - Le_n - Le_{n-1} - 1,$$

$$Le_{n+1} = 2Le_n - Le_{n-2},$$

onde $Le_0 = Le_1 = 1$ e $Le_2 = 3$ são as condições iniciais.

Temos ainda que a sua equação característica é dada por $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$, existindo três raízes reais $x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $x_3 = 1$. Sendo x_1 e x_2 iguais as raízes da equação característica da sequência de Fibonacci.

Por outro lado, Oliveira (2018) apresenta um quaternion como uma extensão dos números complexos desenvolvidos em 1843 pelo matemático irlandês William Rowan Hamilton (1805-1865), para quais existem duas estruturas quaterniônicas: a primeira é os quaternions em $\mathbb{R}$, possuindo componentes reais e a segunda é os biquaternions ou quaternions complexos em $\mathbb{C}$, possuindo componentes complexas.

Definição 1 O conjunto de quaternions reais Q é apresentado por:

$$Q : \{q_0 + q_1i + q_2j + q_3k : q_0, q_1, q_2, q_3 \in \mathbb{R}\}$$

onde satisfazem as igualdades: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$.

Definição 2 O conjunto de quaternions complexos (biquaternions) é apresentado por:

$$G : \{g_0 + g_1i + g_2j + g_3k : g_0, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{C}\},$$

onde satisfazem as igualdades: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$.

Como consequência, um biquaternion complexo também pode ser apresentado na forma:

$$G = \{q_0 + q_1i, i^2 = -1, q_0, q_1 \in Q\}$$

Assim, Özen e Tosun (2018a) introduziram o conjunto de biquaternions elípticos que abragem os conjuntos dos quaternions complexos e reais. O conjunto de biquaternions elípticos é apresentado na forma cartesiana, como a seguir:

Definição 3 O conjunto de biquaternions elípticos é definido por:

$$H\mathbb{C}_p : \{A_0 + A_1i + A_2j + A_3k : A_0; A_1; A_2; A_3 \in \mathbb{C}_p\},$$

onde $\mathbb{C}_p : \{x + Iy : x, y \in \mathbb{R}, I^2 = p, p \in \mathbb{R}^-\}$ é o conjunto dos números elípticos. Consideramos o caso $p \in \mathbb{R}^-$ como os números elípticos de Leonardo.

A partir da sua definição é possível realizar operações com números biquaternions elípticos. E ainda, em Özen e Tosun (2018a) é apresentado três tipos de conjugado: Hamiltoniano, complexo e o total, tem-se ainda o produto interno e a semi-norma desses números.

Com isso, neste trabalho, apresentaremos o Biquaternion Elíptico de Leonardo, como sendo uma forma generalizada dos quaternions complexos de Leonardo, com o intuito de explorar algumas propriedades e apresentar um novo conjunto numérico.

2 Biquaternion elíptico de Leonardo e suas propriedades

Nesta seção será abordado o Biquaternions Elíptico de Leonardo, para isso primeiramente apresentaremos como se comporta os números quaternions e biquaternions de Leonardo. Assim, tem-se:

Definição 4 O quaternion de Leonardo, com $n \geq 0$, é definido pela equação:

$$QLe_n = Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}j + Le_{n+3}k,$$

sendo $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$ e $ki = -ik = j$.

Com isso, pode-se realizar uma complexificação dos quaternions de Leonardo apresentando os quaternions complexo de Leonardo, na qual, le_n, le_{n+1}, le_{n+2} e $le_{n+3} \in \mathbb{C}$, sendo $le_n = Le_n + Le_n^*i$, onde Le_n e Le_n^* são quaternions reais e $i^2 = -1$. Assim, o conjunto dos quaternions complexo de Leonardo é representado como:

Definição 5 O conjunto do biquaternion de Leonardo, com $n \geq 0$, é definido por:

$$CLe_n = \{le_n + le_{n+1}i + le_{n+2}j + le_{n+3}k\},$$

sendo le_n, le_{n+1}, le_{n+2} e $le_{n+3} \in \mathbb{C}$ e $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

Definição 6 O número complexo de Leonardo é definido pela equação:

$$(T_{le})_n = Le_n + Le_{n+1}I, I^2 = le \in \mathbb{R}.$$

Assim, considerando o caso em que $le \in \mathbb{R}^-$ tem-se os números elípticos de Leonardo.

Definição 7 O número elíptico de Leonardo é definido pela equação:

$$(T_{le})_n = Le_n + Le_{n+1}I, I^2 = le \in \mathbb{R}^-,$$

$$(T_{le})_{n+1} = 2(T_{le})_n - (T_{le})_{n-2}, \forall n \geq 2.$$

Expandindo essa definição para os biquaternions elípticos de Leonardo, tem-se:

Definição 8 O número biquaternion elíptico de Leonardo é definido por:

$$(K_{le})_n = QLe_n + QLe_{n+1}I, I^2 = le \in \mathbb{R}^-,$$

onde $QLe_n = Le_n + Le_{n+1}i + Le_{n+2}j + Le_{n+3}k$ e $QLe_{n+1} = Le_{n+1} + Le_{n+2}i + Le_{n+3}j + Le_{n+4}k$ são os números quaternions de Leonardo.

Portanto, o biquaternion elíptico de Leonardo $(K_{le})_n$ pode ser escrito da seguinte maneira:

$$(K_{le})_n = (Le_n + Le_{n+1}I) + (Le_{n+1} + Le_{n+2}I)i + (Le_{n+2} + Le_{n+3}I)j + (Le_{n+3} + Le_{n+4}I)k.$$

Por outro lado, ainda pode-se reescrever esta equação da seguinte forma:

$$(K_{le})_n = (T_{le})_n + (T_{le})_{n+1}i + (T_{le})_{n+2}j + (T_{le})_{n+3}k.$$

Proposição 1 Os números biquaternions elípticos de Leonardo, $(K_{le})_n$, com $n \geq 2$, satisfaz a recorrência $(K_{le})_{n+1} = 2(K_{le})_n - (K_{le})_{n-2}$.

Demonstração 1

$$\begin{aligned} 2(K_{le})_n - (K_{le})_{n-2} &= 2(T_{le})_n + 2(T_{le})_{n+1}i + 2(T_{le})_{n+2}j + 2(T_{le})_{n+3}k - \\ &\quad [(T_{le})_{n-2} + (T_{le})_{n-1}i + (T_{le})_nj + (T_{le})_{n+1}k] \\ &= [2(T_{le})_n - (T_{le})_{n-2}] + [2(T_{le})_{n+1} - (T_{le})_{n-1}]i + \\ &\quad [2(T_{le})_{n+2} - (T_{le})_n]j + [2(T_{le})_{n+3} - (T_{le})_{n+1}]k \\ &= (T_{le})_{n+1} + (T_{le})_{n+2}i + (T_{le})_{n+3}j + (T_{le})_{n+4}k \\ &= (K_{le})_{n+1}. \end{aligned}$$

Sendo $(K_{le})_0 = (T_{le})_0 + (T_{le})_1i + (T_{le})_2j + (T_{le})_3k$, $(K_{le})_1 = (T_{le})_1 + (T_{le})_2i + (T_{le})_3j + (T_{le})_4k$ e $(K_{le})_2 = (T_{le})_2 + (T_{le})_3i + (T_{le})_4j + (T_{le})_5k$ as condições iniciais dos biquaternions elípticos de Leonardo.

Teorema 1 Para os biquaternions elípticos de Leonardo, o polinômio característico é dado por:

$$t^3 - 2t^2 + 1 = 0,$$

possuindo três raízes, sendo duas iguais as raízes do polinômio característico da sequência de

Fibonacci, $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $t_3 = 1$.

Demonstração 2 Com base no Teorema de Cayley-Hamilton, tem-se que o polinômio característico de Leonardo é dado por:

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - Q),$$

com $\lambda \in \mathbb{Z}$ ou $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$ e, no trabalho de Vieira, Mangueira, Alves e Catarino (2020),

tem-se a matriz base da sequência de Leonardo, dada por: $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\text{Assim, } \lambda I - Q = \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

E ainda,

$$\det(\lambda I - Q) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 1 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda^2 + 1.$$

Então, $p(\lambda) = 0$, tem-se $\lambda^2 - 2\lambda^2 + 1 = 0$. Logo, $t^3 - 2t^2 + 1 = 0$.

Teorema 2 (Função Geradora) A função geradora dos biquaternions elípticos de Leonardo, denotado por $G_{(K_{le})_n}(t)$, é:

$$G_{(K_{le})_n}(t) = \frac{[(K_{le})_0 + (K_{le})_1 t](1 - 2t) + (K_{le})_2 t^2}{1 - 2t + t^3}$$

Demonstração 3 Para definir a função geradora dos biquaternions elípticos de Leonardo, denotado por $G_{(K_{le})_n}(t)$, vamos escrever uma sequência em que cada termo da sequência corresponde aos coeficientes.

$$G_{(K_{le})_n}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (K_{le})_n t^n$$

Fazendo manipulações algébricas devido a relação de recorrência podemos escrever essa sequência como:

$$\begin{aligned} G_{(K_{le})_n}(t) &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (K_{le})_n t^n \\ &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (2(K_{le})_{n-1} - (K_{le})_{n-3}) t^n \\ &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 + 2t \sum_{n=3}^{\infty} (K_{le})_{n-1} t^{n-1} - t^3 \sum_{n=3}^{\infty} (K_{le})_{n-3} t^{n-3} \\ &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 + 2t \left(\sum_{n=0}^{\infty} [(K_{le})_n t^n] - (K_{le})_0 - (K_{le})_1 t \right) - \\ &\quad t^3 \sum_{n=0}^{\infty} (K_{le})_n t^n \\ &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 - 2(K_{le})_0 t - 2(K_{le})_1 t^2 + 2t \sum_{n=0}^{\infty} (K_{le})_n t^n - \\ &\quad t^3 \sum_{n=0}^{\infty} (K_{le})_n t^n \\ &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1 t + (K_{le})_2 t^2 - 2(K_{le})_0 t - 2(K_{le})_1 t^2 + 2t G_{(K_{le})_n} - \\ &\quad t^3 G_{(K_{le})_n} \end{aligned}$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} G_{(K_{le})_n}(t) - 2tG_{(K_{le})_n}(t) + t^3G_{(K_{le})_n}(t) &= (K_{le})_0 + (K_{le})_1t + (K_{le})_2t^2 - 2(K_{le})_0t - \\ &\quad 2(K_{le})_1t^2 \\ G_{(K_{le})_n}(t)(1 - 2t + t^3) &= (K_{le})_0(1 - 2t) + (K_{le})_1t(1 - 2t) + (K_{le})_2t^2 \\ G_{(K_{le})_n}(t) &= \frac{[(K_{le})_0 + (K_{le})_1t](1 - 2t) + (K_{le})_2t^2}{1 - 2t + t^3} \end{aligned}$$

Teorema 3 (Fórmula de Binet) Para os biquaternions elípticos de Leonardo a fórmula de Binet, com $n \geq 0$, é dada por:

$$(K_{le})_n = At_1^n + Bt_2^n + Ct_3^n.$$

onde $t_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ e $t_3 = 1$ são as raízes da equação característica (1) e A , B e C os coeficientes iguais a:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_2 - t_3)(K_{le})_1 + t_2t_3(K_{le})_0}{t_1^2 - t_1t_2 - t_1t_3 + t_2t_3} \\ B &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_1 - t_3)(K_{le})_1 + t_1t_3(K_{le})_0}{t_2^2 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1t_3} \\ C &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_1 - t_2)(K_{le})_1 + t_1t_2(K_{le})_0}{t_3^2 + t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3} \end{aligned}$$

Demonstração 4 Seguindo a fórmula geral de Binet, dada por: $f(n) = A_1x_1^n + A_2x_2^n + \dots + A_rx_r^n$, em que $A_1, A_2, \dots, A_r$ são coeficientes e $x_1, x_2, \dots, x_r$ são as raízes do polinômio característico da sequência (WHITFORD, 1977).

Tem-se que a fórmula de Binet para os biquaternions elípticos de Leonardo, para $n \geq 0$, é representado da seguinte maneira:

$$(K_{le})_n = A(t_1)^n + B(t_2)^n + C(t_3)^n$$

Assim, tem-se que para $n = 0$ obtêm $A + B + C = (K_{le})_0$, para $n = 1$ tem $At_1 + Bt_2 + Ct_3 = (K_{le})_1$ e para $n = 2$ tem $At_1^2 + Bt_2^2 + Ct_3^2 = (K_{le})_2$. Com isso, pode-se construir um sistema de equações lineares da seguinte forma:

$$\begin{cases} A + B + C = (K_{le})_0 \\ At_1 + Bt_2 + Ct_3 = (K_{le})_1 \\ At_1^2 + Bt_2^2 + Ct_3^2 = (K_{le})_2 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema linear, pela regra de Cramer, tem-se que os coeficientes encontrados foram:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_2 - t_3)(K_{le})_1 + t_2t_3(K_{le})_0}{t_1^2 - t_1t_2 - t_1t_3 + t_2t_3} \\ B &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_1 - t_3)(K_{le})_1 + t_1t_3(K_{le})_0}{t_2^2 - t_2t_3 - t_1t_2 + t_1t_3} \\ C &= \frac{(K_{le})_2 + (-t_1 - t_2)(K_{le})_1 + t_1t_2(K_{le})_0}{t_3^2 + t_1t_2 - t_1t_3 - t_2t_3} \end{aligned}$$

Lema 1 Os números inteiros não positivos do biquaternion elíptico de Leonardo são definidos por:

$$(K_{le})_{-n} = (Le_{-n} + Le_{-n+1}I) + (Le_{-n+1} + Le_{-n+2}I)i + (Le_{-n+2} + Le_{-n+3}I)j + (Le_{-n+3} + Le_{-n+4}I)k,$$

onde $Le_{-n} = 2Le_{-n+2} - Le_{-n+3}$.

Demonstração 5 De acordo com a definição dos biquaternions elípticos de Leonardo, temos que:

$$\begin{aligned} (K_{le})_{-n} &= QLe_{-n} + QLe_{-n+1}I \\ &= Le_{-n} + Le_{-n+1}i + Le_{-n+2}j + Le_{-n+3}k + Le_{-n+1}I + Le_{-n+2}Ii + \\ &\quad Le_{-n+3}Ij + Le_{-n+4}Ik \\ &= (Le_{-n} + Le_{-n+1}I) + (Le_{-n+1} + Le_{-n+2}I)i + (Le_{-n+2} + Le_{-n+3}I)j + \\ &\quad (Le_{-n+3} + Le_{-n+4}I)k \end{aligned}$$

Logo, com base na recorrência para os termos positivos, podemos definir o comportamento desses elementos para o conjunto dos números inteiros não positivos.

Definição 9 A recorrência para os termos inteiros não positivos dos números biquaternions elípticos de Leonardo, para $n \geq 3$, é definido por:

$$(K_{le})_{-n} = 2(K_{le})_{-n+2} - (K_{le})_{-n+3}$$

3 A forma matricial do biquaternion elíptico de Leonardo

Inicialmente, nesta seção, iremos utilizar o trabalho de Özen e Tosun (2018c), a qual os autores consideram o conjunto de matrizes $M_2(\mathbb{C}_p) = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} : x, y, z, t \in \mathbb{C}_p \right\}$.

Em Özen e Tosun (2018c), os autores mostram que este conjunto de matrizes pode ser representado de uma forma diferente que é usada para definir o isomorfismo necessário, como podemos ver no Lema a seguir:

Lema 2 O conjunto de matrizes elípticas 2×2 pode ser representado como:

$$M_2(\mathbb{C}_p) = \left\{ \begin{bmatrix} X_0 + \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_1 & -X_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_3 \\ X_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_3 & X_0 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_1 \end{bmatrix} : X_i = x_i + x'_iI \in \mathbb{C}_p, 0 \leq i \leq 3 \right\}. \quad (1)$$

Demonstração 6 Seja $A = \begin{bmatrix} z_1 + \overline{z_1}I & z_2 + \overline{z_2}Iy \\ z_3 + \overline{z_3}I & z_4 + \overline{z_4}I \end{bmatrix}$ uma matriz elíptica arbitrária 2×2 , a qual $\overline{z_1}, \overline{z_2}, \overline{z_3}$ e $\overline{z_4}$ são números reais. Então, pode-se escrever

$$A = \begin{bmatrix} \left(x_0 - \sqrt{|p|}x'_1 \right) + I \left(x'_0 + \frac{x_1}{\sqrt{|p|}} \right) & \left(-x_2 + \sqrt{|p|}x'_3 \right) + I \left(-x'_2 - \frac{x_3}{\sqrt{|p|}} \right) \\ \left(x_2 + \sqrt{|p|}x'_3 \right) + I \left(x'_2 - \frac{x_3}{\sqrt{|p|}} \right) & \left(x_0 + \sqrt{|p|}x'_1 \right) + I \left(x'_0 - \frac{x_1}{\sqrt{|p|}} \right) \end{bmatrix}, \quad (2)$$

tal que,

$$x_0 = \frac{z_1 + z_4}{2}, x'_0 = \frac{\overline{z_1} + \overline{z_4}}{2}, x_1 = \frac{\sqrt{|p|}(\overline{z_1} - \overline{z_4})}{2}, x'_1 = \frac{z_4 - z_1}{2\sqrt{|p|}} \in \mathbb{R}$$

$$x_2 = \frac{z_3 - z_2}{2}, x_3' = \frac{\bar{z}_3 - \bar{z}_2}{2}, x_3 = -\frac{\sqrt{|p|}(\bar{z}_2 + \bar{z}_3)}{2}, x_3' = \frac{z_2 + z_3}{2\sqrt{|p|}} \in \mathbb{R}.$$

Assim, pode ser facilmente visto que a matriz elíptica arbitrária 2×2 em (2) é igual à matriz

$$\begin{bmatrix} X_0 + \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_1 & -X_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_3 \\ X_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_3 & X_0 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IX_1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

onde $X_i = x_i + x_i'I \in \mathbb{C}_p$, $0 \leq i \leq 3$. Por outro lado, é claro que a matriz dada em (1) é uma matriz elíptica 2×2 .

Levando em consideração a função

$$\begin{aligned} \sigma &: H\mathbb{C}_p \longrightarrow M_2 \\ \sigma(Q) &= \begin{bmatrix} A_0 + \frac{1}{\sqrt{|p|}}IA_1 & -A_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IA_3 \\ A_2 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IA_3 & A_0 - \frac{1}{\sqrt{|p|}}IA_1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A função σ satisfaz as propriedades $\sigma(Q + R) = \sigma(Q) + \sigma(R)$ e $\sigma(QR) = \sigma(Q)\sigma(R)$, onde Q e R são dois biquaternions elípticos quaisquer. Assim, podemos afirmar que também é uma bijeção. Portanto, σ é um isomorfismo linear.

Baseado no que foi visto anteriormente, consideremos esse isomorfismo ao conjunto de biquaternions elípticos de Leonardo. Assim, temos:

$$\begin{aligned} \sigma^* &= (K_{le})_n \longrightarrow M_2 \\ \sigma^*(K_{le})_n &= \begin{bmatrix} (T_{le})_n + \frac{1}{\sqrt{|le|}}I(T_{le})_{n+1} & -(T_{le})_{n+2} - \frac{1}{\sqrt{|le|}}I(T_{le})_{n+3} \\ (T_{le})_{n+2} - \frac{1}{\sqrt{|le|}}I(T_{le})_{n+3} & (T_{le})_n - \frac{1}{\sqrt{|le|}}I(T_{le})_{n+1} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

em que $(K_{le})_n = (T_{le})_n + (T_{le})_{n+1}i + (T_{le})_{n+2}j + (T_{le})_{n+3}k$. Com isso, a partir das definições: $(T_{le})_n = Le_n + ILe_{n+1}$ e $I^2 = le = -|le| = -\sqrt{|le|}\sqrt{|le|}$, podemos definir a matriz elíptica de Leonardo.

Definição 10 A forma matricial 2×2 dos biquaternions elípticos de Leonardo (K_{le}) , é dada por:

$$\begin{aligned} \sigma^*((K_{le})_n) &= \\ &= \begin{bmatrix} (Le_n - \sqrt{|le|}Le_{n+2}) + ILe_{n+1}(1 + \frac{1}{\sqrt{|le|}}) & (-Le_{n+2} + \sqrt{|le|}Le_{n+4}) - ILe_{n+3}(1 + \frac{1}{\sqrt{|le|}}) \\ (Le_{n+2} + \sqrt{|le|}Le_{n+4}) + ILe_{n+3}(1 - \frac{1}{\sqrt{|le|}}) & (Le_n + \sqrt{|le|}Le_{n+2}) + ILe_{n+1}(1 - \frac{1}{\sqrt{|le|}}) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por outro lado, no trabalho de Özen e Tosun (2018b), é definido uma função do espaço biquatérnio elíptico $H\mathbb{C}_p$ para o espaço de matriz M como podemos ver a seguir:

$$\begin{aligned} \gamma &: H\mathbb{C}_p \rightarrow M \\ Q &\rightarrow \gamma(Q) \end{aligned}$$

$$\text{onde } M = \left\{ \begin{bmatrix} X_0 & -X_1 & -X_2 & -X_3 \\ X_1 & X_0 & -X_3 & X_2 \\ X_2 & X_3 & X_0 & -X_1 \\ X_3 & -X_2 & X_1 & X_0 \end{bmatrix} : X_0, X_1, X_2, X_3 \in \mathbb{C}_p \right\}$$

A qual a função é uma bijeção e compreende as seguintes propriedades:

$$\begin{aligned} \gamma(QR) &= \gamma(Q)\gamma(R) \\ \gamma(Q + R) &= \gamma(Q) + \gamma(R) \end{aligned}$$

onde Q e R são biquaternions elípticos quaisquer. Portanto, é um isomorfismo linear.

Por outro lado, utilizando do mesmo princípio acima e com base em Özen e Tosun (2021), se este isomorfismo é restrito ao conjunto de biquaternions elípticos de Leonardo, podemos dizer que:

$$\begin{aligned} \gamma^* : (K_{le})_n &\longrightarrow M \\ (K_{le})_n &\longrightarrow \gamma^*((K_{le})_n) = \begin{bmatrix} (T_{le})_n & -(T_{le})_{n+1} & -(T_{le})_{n+2} & -(T_{le})_{n+3} \\ (T_{le})_{n+1} & (T_{le})_n & -(T_{le})_{n+3} & (T_{le})_{n+2} \\ (T_{le})_{n+2} & (T_{le})_{n+3} & (T_{le})_n & -(T_{le})_{n+1} \\ (T_{le})_{n+3} & -(T_{le})_{n+2} & (T_{le})_{n+1} & (T_{le})_n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, para $(K_{le})_n = (T_{le})_n + (T_{le})_{n+1}i + (T_{le})_{n+2}j + (T_{le})_{n+3}k$. Com isso, a partir das definições: $(T_{le})_n = Le_n + ILe_{n+1}$ e $I^2 = le = -|le| = -\sqrt{|le|}\sqrt{|le|}$, podemos definir a matriz elíptica de Leonardo.

Definição 11 A forma matricial 4×4 dos biquaternions elípticos de Leonardo (K_{le}) , é dada por:

$$\gamma^*((K_{le})_n) = \begin{bmatrix} Le_n + ILe_{n+1} & -Le_{n+1} - ILe_{n+2} & -Le_{n+2} - ILe_{n+3} & -Le_{n+3} - ILe_{n+4} \\ Le_{n+1} + ILe_{n+2} & Le_n + ILe_{n+1} & -Le_{n+3} - ILe_{n+4} & Le_{n+2} + ILe_{n+3} \\ Le_{n+2} + ILe_{n+3} & Le_{n+3} + ILe_{n+4} & Le_n + ILe_{n+1} & -Le_{n+1} - ILe_{n+2} \\ Le_{n+3} + ILe_{n+4} & -Le_{n+2} - ILe_{n+3} & Le_{n+1} + ILe_{n+2} & Le_n + ILe_{n+1} \end{bmatrix}.$$

4 Conclusão

Nesta pesquisa foram analisados e discutidos o novo conjunto numérico dos biquaternions elípticos, onde foram introduzidos os biquaternions elípticos de Leonardo, abordando sua definição, equação característica, função geradora, fórmula de Binet e a sua extensão para índices não positivos. Pode-se afirmar que os biquaternions elípticos de Leonardo é uma forma generalizada dos quaternions complexos de Leonardo, ambos definidos primordialmente neste trabalho.

Para trabalhos futuros, pode-se definir os biquaternions elípticos de outras sequências lineares recorrentes e encontrar uma aplicabilidade utilizando as definições abordadas, bem como sua forma matricial.

5 Agradecimentos

A parte de desenvolvimento da pesquisa no Brasil contou com o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES.

A parte de desenvolvimento da pesquisa em Portugal é financiado por Fundos Nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e a Tecnologia. I. P, no âmbito o projeto UID/CED/00194/2020.

6 Referências Bibliográficas

ALVES, F. R. V.; VIEIRA, R. P. M. The Newton fractal's Leonardo sequence study with the Google Colab. **International Electronic Journal of Mathematics Education**, v. 15, n. 2, p. 1-9, 2020.

CATARINO, P.; BORGES, A. On Leonardo numbers. **Acta Mathematica Universitatis Comenianae**, v. 89, n. 1, p. 75-86, 2020.

GOMES, C. A.; OLIVEIRA, O. R. B. de. **O teorema de Cayley-Hamilton**. [São Paulo]: IME/USP, 2019.

HORADAM, A. F. Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. **The American Mathematical Monthly**, v. 70, n. 3, p. 289-291, 1963.

KOSHY, T. **Fibonacci and Lucas numbers with applications**. New York: Wiley and Sons publications, 2001. v. 1.

OLIVEIRA, R. R. **Engenharia didática sobre o modelo de complexificação da sequência generalizada de Fibonacci**: relações recorrentes n dimensionais e representações polinomiais e matriciais. 2018. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Ceará, Fortaleza, 2018.

ÖZEN, K. E.; TOSUN, M. Elliptic biquaternion algebra. **AIP Conference Proceedings**, v. 1926, n. 1, 2018a.

ÖZEN, K. E.; TOSUN, M. Elliptic matrix representations of elliptic biquaternions and their applications. **International Electronic Journal of Geometry**, v. 11, n.2, p. 96-103, 2018b.

ÖZEN, K. E.; TOSUN, M. Further results for elliptic biquaternions. **Conference Proceedings of Science and Technology**, v. 1, n. 1, p. 20-27, 2018c.

ÖZEN, K. E.; TOSUN, M. Fibonacci Elliptic Biquaternions. **Fundamental Journal of Mathematics and Applications**, vol. 4, n. 1, p. 10-16, 2021.

SHANNON, A. G. A note on generalized Leonardo numbers. **Notes on Number Theory and Discrete Mathematics**, v. 25, n. 3, p. 97-101, 2019.

VAN DER WAERDEN, B. L. Hamilton's discovery of quaternions. **Mathematics Magazine**, v. 49, n. 5, p. 227-234, 1976.

VIEIRA, R. P. M.; MANGUEIRA, M. C. dos S.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A forma matricial dos números de Leonardo. **Ciência e Natura**, v. 42, 2020.

VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. Relações bidimensionais e identidades da sequência de Leonardo. **Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática**, v. 4, n. 2, p. 156-173, 2019.

WHITFORD, A. K. Binet's formula generalized. **The Fibonacci Quarterly**, v. 15, n. 1, p. 21, 1977.