**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Juan López Linares

Faculdade de Zootecnia e Engenharia
de Alimentos
Universidade de São Paulo
jlopez@usp.br

João Paulo Martins dos Santos

Academia da Força Aérea–AFA
Pirassununga-SP
jp2@alumni.usp.br

Alessandro Firmiano de Jesus

Academia da Força Aérea–AFA
Pirassununga-SP
lezandro@gmail.com

Extremos com desigualdades na Geometria: resolução de cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática

Extremes with inequalities in Geometry: solving five
problems proposed for the International Mathematical
Olympiad

Resumo

Cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática (IMO) são discutidos em detalhe. As demonstrações envolvidas nas soluções são complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas utilizando o GeoGebra. É esperado que o artigo possa ser apreciado tanto por estudantes que se preparam para as fases finais de competições nacionais ou internacionais quanto por professores que atuam no ensino e se interessam por problemas mais desafiadores. A fundamentação teórica é baseada em uma combinação de elementos de trigonometria e geometria tais como Lei dos Senos, Bases Médias e Paralelogramo, Círculo Inscrito, tangentes e áreas e as Desigualdades Triangular, de Cauchy-Schwarz e das Médias Aritmética e Geométrica.

Palavras-chave: Olimpíadas internacionais de Matemática. Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Ensino médio e universitário. Geometria.

Abstract

Five problems proposed for the International Mathematical Olympiad (IMO) are discussed in detail. The demonstrations involved in the solutions are complemented by the links of the interactive figures using GeoGebra. It is expected that the article can be appreciated both by students who are preparing for the final stages of national or international competitions, and by teachers interested in more challenging problems. The theoretical foundation is based on a combination of trigonometry and geometry elements such as Sine Law, Mean Bases and Parallelogram, Inscribed Circle, tangents and areas, and Triangular, Cauchy-Schwarz and Arithmetic and Geometric Mean Inequalities.

Keywords: International Mathematics olympics. Triangular Inequality. Inequality of Means. Cauchy-Schwarz Inequality. High school and university. Geometry.

1 Introdução

A Olimpíada Internacional de Matemática (IMO, International Mathematical Olympiad) é uma competição para estudantes do Ensino Médio. Na primeira IMO em 1959 somente sete países participaram, mas hoje em dia mais de 100 são representados. Os objetivos das IMOs são descobrir, estimular e desafiar estudantes talentosos em Matemática. Fortalecer relações de amizade internacional entre matemáticos, criar oportunidades para o intercâmbio de informação sobre programas e conteúdos de estudo e promover a Matemática em geral.

Na preparação para uma Olimpíada Internacional de Matemática cada delegação (menos o país sede) pode enviar problemas para formar a base de dados inicial, chamada lista longa (LongList, LL). Os mesmos não podem ter sido usados em competições anteriores, nem publicados e devem abranger vários tópicos de Matemática pré-universitária. O país sede da competição cria um Comitê de Seleção que escolhe os melhores problemas da LL para formar a lista curta (ShortList, SL). Os professores Líderes, um por equipe, recebem a SL no primeiro dia da reunião e escolhem, por maioria simples, os seis problemas da SL que serão usados na IMO. As duas listas são mantidas em segredo até a IMO do próximo ano.

O presente texto foi elaborado a partir de materiais didáticos utilizados durante uma aula do curso "Geometria com GeoGebra" para professores de Matemática do Ensino Fundamental e Médio de todo o Brasil, ministrado pelos autores, à distância, no primeiro semestre de 2021.

As resoluções neste artigo complementam algumas poucas disponíveis nos fóruns em língua inglesa e nas publicações das competições. Utilizando argumentos menos rebuscados, focou-se na apresentação mais detalhada das transições, possibilitando que alunos e professores conseguissem acompanhar o desenvolvimento do problema. Como complemento, uma versão interativa de cada uma das figuras do texto está disponibilizada no site do GeoGebra.

Os presentes autores abordaram problemas de olimpíadas internacionais de Matemática sobre Serie Harmônica (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020a), Desigualdades (LÓPEZ LINARES; BRUNO-ALFONSO; BARBOSA, 2020b) e Potência de um ponto e Eixo Radical (LÓPEZ LINARES; SANTOS; JESUS, 2021).

Na Seção 3 são discutidos cinco desafios IMO. Nos Problemas 1, 4 e 5 se explora a Desigualdade Triangular e das Médias. Os Problemas 2 e 3 usam fundamentalmente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Iniciamos com uma introdução dos conceitos básicos que serão utilizados.

2 Conceitos básicos

Embora as proposições desta seção sejam clássicas e bem conhecidas na literatura, as mesmas são discutidas por completude do texto.

Proposição 1 (Ao maior lado corresponde o maior ângulo). *Se dois lados de um triângulo não são congruentes, então os ângulos opostos a estes lados não são congruentes, e o maior ângulo é oposto ao maior lado.*

Demonstração. A Figura 1 mostra um triângulo ABC . Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC > AC$. Marque sobre BC o ponto D tal que $AC = CD$. Logo, o $\triangle CAD$ é isósceles de base AD e $\angle CAD = \angle CDA = \theta$. Sejam $\angle CBA = \beta$ e $\angle BAD = \gamma$. Pelo Teorema do Ângulo Externo, aplicado no vértice D do $\triangle BDA$, tem-se $\theta = \beta + \gamma$. Portanto, $\theta > \beta$. Além disso, como $\angle BAC = \alpha = \theta + \gamma$, então $\alpha > \beta$. Isto é, oposto ao maior lado corresponde o maior ângulo. $\square$

Figura 1: Guia para a demonstração da Proposição 1. Versão interativa [aqui](#).

Ainda na Figura 1, por redução ao absurdo e a Proposição 1 se prova a recíproca. Isto é, se $\alpha > \beta$, então $BC > AC$.

Proposição 2 (Desigualdade Triangular). *A soma dos comprimentos de dois lados quaisquer de um triângulo é maior que o comprimento do terceiro lado.*

Demonstração. Basta mostrar que o maior lado é menor que a soma dos outros dois. A Figura 2 mostra um triângulo ABC com $\angle ABC = \beta$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $BC > CA > AB$. Estenda a semirreta CA e marque o ponto $D \in CA$ de tal forma que $AD = AB$. Seja $\angle DBC = \gamma$. Como o $\triangle ABD$ é isósceles de base BD tem-se $\angle ABD = \angle ADB = \theta$. Adicionalmente, de

$$\angle DBC = \gamma = \theta + \beta > \theta = \angle BDA$$

e da Proposição 1, segue que:

$$CD = CA + AD = CA + AB > BC.$$

□

Figura 2: Guia para a demonstração da Proposição 2. Versão interativa [aqui](#).

Proposição 3 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). *Dadas duas sequências de números reais $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ e $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ então:*

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2\right) \left(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2\right) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2 \quad (1)$$

e vale a igualdade quando $b_i = \lambda a_i$ para todo $1 \leq i \leq n$ com λ real.

Demonstração. Considere a função real de variável real

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (a_i x - b_i)^2.$$

Desenvolvendo o quadrado e colocando x em evidência pode-se escrever

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) x^2 - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right) x + \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

Isto é, f é um polinômio de segundo grau na variável x . Como f é uma soma de quadrados teremos $f(x) \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ e, por consequência, o discriminante é negativo ou igual a zero:

$$\Delta = 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 - 4 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \leq 0.$$

Dividindo por 4 obtêm-se a desigualdade de Cauchy-Schwarz reescrita com os símbolos de somatórios:

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2.$$

A igualdade acontece quando o discriminante é zero. Nesse caso f tem uma raiz dupla $x = \lambda$. Mas isto corresponde a escrever:

$$f(\lambda) = \sum_{i=1}^n (a_i \lambda - b_i)^2 = 0.$$

Como as sequências (a_n) e (b_n) são de números reais, os quadrados são não negativos. A única possibilidade é que $a_i \lambda - b_i = 0$ para todo $1 \leq i \leq n$. Isto é, acontece a igualdade na desigualdade de Cauchy-Schwarz quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. $\square$

Uma verificação interativa da Desigualdade de Cauchy-Schwarz, com sequências bidimensionais, pode ser feita aqui.

Proposição 4 (Desigualdade das Médias Aritmética e Geométrica). *Seja $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ uma lista de números reais positivos com $n \geq 2$, então:*

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \geq \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i},$$

em que

$$\sum_{i=1}^n x_i = x_1 + x_2 + \dots + x_n,$$

$$\prod_{i=1}^n x_i = x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n.$$

A igualdade ocorre quando $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.

Demonstração. Caso $n = 2$: Quer-se provar que:

$$\frac{x_1 + x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 \cdot x_2}.$$

Multiplicando os dois lados por 2 e elevando ao quadrado tem-se:

$$(x_1 + x_2)^2 \geq 4x_1 \cdot x_2.$$

Desenvolvendo o quadrado e simplificando obtêm-se outras sentenças equivalentes:

$$x_1^2 + 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 4x_1 \cdot x_2,$$

$$x_1^2 - 2x_1 \cdot x_2 + x_2^2 \geq 0,$$

$$(x_1 - x_2)^2 \geq 0.$$

Mas o quadrado de um número real é sempre não negativo. A igualdade acontece quando $x_1 = x_2$. $\square$

A demonstração para $n > 2$ pode ser encontrada, por exemplo, em (MORGADO; CARVALHO, 2015). A Figura 3 ilustra as desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC :

$$\max\{AB, BC\} \geq M_Q \geq M_A \geq M_G \geq M_H \geq \min\{AB, BC\},$$

onde

$$M_Q(AB, BC) = BD = \sqrt{\frac{AB^2 + BC^2}{2}},$$

$$M_A(AB, BC) = MA = MC = MD = ME = \frac{AB + BC}{2},$$

$$M_G(AB, BC) = BE = \sqrt{AB \cdot BC},$$

$$M_H(AB, BC) = FE = \frac{2}{\frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}},$$

são as Médias Quadráticas M_Q , Aritmética M_A , Geométrica M_G e Harmônica M_H . Em todos os casos, a igualdade somente acontece quando $AB = BC$.

Figura 3: Desigualdades envolvendo os comprimentos dos segmentos AB e BC . Versão interativa aqui. Pode ser verificada a desigualdade movimentando o ponto B .

Para o cálculo da Média Quadrática M_Q primeiro nota-se que:

$$MB = \frac{AB - BC}{2}.$$

Segundo, utiliza-se o Teorema de Pitágoras no $\triangle MBD$, retângulo em M :

$$BD^2 = \left(\frac{AB + BC}{2}\right)^2 + \left(\frac{AB - BC}{2}\right)^2$$

e o resultado segue.

Para o cálculo da Média Geométrica M_G utiliza-se uma das relações métricas no $\triangle AEC$, retângulo em E : “Altura ao quadrado é igual ao produto das projeções”. Ou seja:

$$BE^2 = AB \cdot BC.$$

E para o cálculo da Média Harmônica M_H foca-se no $\triangle MBE$, retângulo em B : “Cateto ao quadrado é o produto da hipotenusa com a sua projeção”. Ou seja:

$$BE^2 = ME \cdot FE.$$

Como $ME = M_A$ e $BE = M_G$ segue que

$$\frac{2}{M_H} = \frac{2}{FE} = \frac{1}{AB} + \frac{1}{BC}.$$

3 Cinco problemas da Olimpíada Internacional de Matemática e resoluções comentadas

3.1 P1 IMO 1976. Desigualdade Triangular. Desigualdade das Médias. Áreas.

A IMO 1976 foi realizada na cidade de Lienz, Áustria. Problema 3 da lista curta, proposto pela delegação da antiga Checoslováquia e escolhido como P1 da competição (DJUKIC *et al*, 2006).

Problema 1. Num quadrângulo convexo com área 32 cm^2 , a soma dos comprimentos de dois lados não adjacentes e uma diagonal é igual a 16 cm . a) Qual é o comprimento da outra diagonal? b) Quais são os comprimentos dos lados do quadrângulo se o perímetro é um mínimo? c) Será possível escolher os lados para que o perímetro seja um máximo?

3.1.1 Resolução do Problema 1.

A Figura 4 mostra uma construção geométrica inicial.

Figura 4: Construção geométrica inicial para o Problema 1. Versão interativa aqui.

Um quadrângulo é uma figura plana que consiste em quatro pontos, cada um unido a outros dois por segmentos (que se intersectam ou não). Quando o quadrângulo é convexo, equivale a um quadrilátero convexo.

Todas as unidades de comprimento são dadas em cm e as de área em cm^2 . As mesmas serão omitidas no que segue. Seja $S = 32$ e

$$d = 16 = AB + CD + AC. \quad (2)$$

a) A área do quadrângulo $ABCD$ pode ser calculada pela soma das áreas dos $\triangle ABC$ e $\triangle ACD$, onde AC é o lado comum. Adicionalmente, para medidas fixas de dois lados, o ângulo, determinado por estes, que maximiza a área de um triângulo é 90° . Ou seja, acontece o máximo quando os dois triângulos são retângulos:

$$S \leq \frac{1}{2} AC(AB + CD).$$

Utilizando (2) reescreve-se a desigualdade anterior como:

$$S \leq \frac{1}{2}AC(d - AC). \quad (3)$$

Por outro lado, considerando AC como variável e utilizando a Desigualdade das Médias Geométrica e Aritmética (Proposição 4) no conjunto de números positivos $\{AC, d - AC\}$ tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{AC(d - AC)} &\leq \frac{AC + (d - AC)}{2}, \\ AC(d - AC) &\leq \frac{d^2}{4}. \end{aligned} \quad (4)$$

A igualdade acontece quando $AC = d - AC$ ou $AC = \frac{d}{2}$. Considerando (3) e (4) encontra-se:

$$S \leq \frac{d^2}{8}.$$

Utilizando os números dados para d e S conclui-se que somente é possível a igualdade. Isto é, $AC = AB + CD = 8$, $AB \perp AC$ e $CD \perp AC$. Seja $CD = x$ e $AB = 8 - x$.

Construa a reta AB e trace por D uma reta l paralela com AC (Figura 5). Marque o ponto $E = AB \cap l$. O triângulo BED , retângulo em E , é isósceles de base BD . Logo, o comprimento

$$BD = 8\sqrt{2}.$$

b) Para encontrar o valor mínimo do perímetro do quadrilátero $ABCD$ basta minimizar a soma $BC + AD$, pois $AB + CD = 8$. Para isso, posicione um ponto F de tal forma que o quadrilátero $ACFD$ seja um paralelogramo. Isto é, $DF = 8$ e $AD = CF$. Construa também o segmento BF .

Aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição 2) no $\triangle BCF$ tem-se:

$$BC + CF = BC + AD \geq BF.$$

Isto é, o valor mínimo de $BC + AD$ é BF e, nesse caso, $C \in BF$. Utilizando o Teorema de Pitágoras no $\triangle BEF$ encontra-se $BF = 8\sqrt{5}$.

Por outro lado, quando $C \in BF$, pelo critério de semelhança ângulo-ângulo (AA), tem-se $\triangle FDC \sim \triangle FEB$. Da proporcionalidade dos lados segue que $CF = AD = \frac{BF}{2}$ e $DC = \frac{EB}{2} = 4$. Logo, $AD = BC = 4\sqrt{5}$ e $AB = CD = 4$.

c) Assuma-se, sem perda de generalidade, que $CD < AB$. Neste caso, o ponto C está no interior do $\triangle BDF$ e vale que:

$$BC + AD = BC + CF \leq BD + DF.$$

Isto é, o valor máximo da soma $BC + AD$ é atingido quando os pontos C e D coincidem e o quadrângulo $ABCD$ é degenerado. A Figura 5 mostra os detalhes das construções geométricas dos itens a), b) e c).

Figura 5: Construção geométrica para o Problema 1. Versão interativa aqui. Pode ser movimentado o ponto B para encontrar o perímetro mínimo.

3.2 P1 IMO 1981. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incentro. Áreas.

A IMO 1981 foi realizada na cidade de Washington, EUA. Problema 15 da lista curta, proposto pela delegação do Reino Unido e escolhido como P1 da competição (DJUKIC *et al*, 2006).

Problema 2. Encontrar o ponto P no interior de um $\triangle ABC$ para o qual a soma:

$$\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \quad (5)$$

é mínima, em que PD , PE e PF são as perpendiculares de P a BC , CA e AB , respectivamente.

3.2.1 Resolução do Problema 2.

Nota-se que para qualquer ponto P no interior do $\triangle ABC$ a soma:

$$BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF \quad (6)$$

é duas vezes a área do mesmo. Isto é, o resultado é constante (não depende de P).

Da Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 3) escreve-se:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2.$$

Identificando em (6) que $a_1^2 = BC \cdot PD$, $a_2^2 = CA \cdot PE$, $a_3^2 = AB \cdot PF$ e em (5) que $b_1^2 = \frac{BC}{PD}$, $b_2^2 = \frac{CA}{PE}$ e $b_3^2 = \frac{AB}{PF}$ tem-se:

$$(BC \cdot PD + CA \cdot PE + AB \cdot PF) \left(\frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF} \right) \geq (BC + CA + AB)^2.$$

A igualdade, que representa o valor mínimo de (5), acontece quando as sequências (a_n) e (b_n) são proporcionais. Isto é, quando existe um número λ tal que:

$$(a_1, a_2, a_3) = (\lambda b_1, \lambda b_2, \lambda b_3).$$

Logo, $\lambda = PD = PE = PF$. Portanto, o ponto P que minimiza (5) é o incentro do $\triangle ABC$. A Figura 6 mostra uma construção geométrica.

Figura 6: Construção geométrica para o Problema 2. Versão interativa aqui. Movimentando o ponto P pode-se verificar o mínimo.

3.3 P6 IMO 1983. Desigualdade de Cauchy-Schwarz. Incírculo. Tangentes.

A IMO 1983 foi realizada na cidade de Paris, França. Problema 9 da lista curta, proposto pela delegação dos Estados Unidos e escolhido como P6 da competição (DJUKIC *et al*, 2006).

Problema 3. Se a , b e c são lados de um triângulo, provar que:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0. \quad (7)$$

Determinar quando vale a igualdade.

3.3.1 Resolução do Problema 3.

Construa a circunferência inscrita d no $\triangle ABC$ e marque os pontos de interseção A' , B' e C' de d com os lados BC , CA e AB , respectivamente, conforme apresentado na Figura 7. Devido a tangência têm-se $AB' = AC' = x$, $BA' = BC' = y$ e $CA' = CB' = z$. Logo,

$$\begin{aligned} a &= y + z, \\ b &= z + x, \\ c &= x + y. \end{aligned} \quad (8)$$

Substituindo (8) em (7), segue:

$$(y+z)^2(z+x)(y-x) + (z+x)^2(x+y)(z-y) + (x+y)^2(y+z)(x-z) \geq 0.$$

Expandindo e simplificando tem-se:

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 \geq xyz(y+z+x).$$

Multiplicando os dois lados pelo número positivo $z + x + y$ encontra-se uma Desigualdade de Cauchy-Schwarz (Proposição 3):

$$(xy^3 + yz^3 + zx^3)(z + x + y) \geq [\sqrt{xyz}(y + z + x)]^2.$$

As duas sequências que dão origem a desigualdade anterior são:

$$(y\sqrt{xy}, z\sqrt{yz}, x\sqrt{zx}),$$

$$(\sqrt{z}, \sqrt{x}, \sqrt{y}).$$

A igualdade acontece quando as sequências são proporcionais. Isto é,

$$\frac{xy^3}{z} = \frac{yz^3}{x} = \frac{zx^3}{y}.$$

Como x , y e z são números reais positivos existe uma única solução para a igualdade anterior: $x = y = z$. Logo, $a = b = c$. A Figura 7 mostra uma construção geométrica.

Figura 7: Construção geométrica para o Problema 3. Versão interativa aqui. Movimentando o ponto A pode-se verificar o mínimo.

3.4 P7 SL IMO 1999. Desigualdade Triangular. Bases Médias. Paralelogramo.

A IMO 1999 foi realizada na cidade de Bucareste, Romênia. Problema 7 da lista curta, proposto pela delegação da Armênia (DJUKIC *et al*, 2006).

Problema 4. *Seja ABC um triângulo e M um ponto em seu interior. Provar que*

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < AB + BC + CA.$$

3.4.1 Resolução do Problema 4.

Lema 5. *Seja M um ponto no interior de uma quadrilátero convexo $ABCD$. Então vale que $AM + MB < BC + CD + DA$.*

Demonstração. A Figura 8 mostra uma construção geométrica. Seja $N = AM \cap BC$ e aplique-se a Desigualdade Triangular (Proposição 2) aos triângulos $\triangle MNB$, $\triangle ANC$ e $\triangle CDA$.

Figura 8: Construção geométrica para o Lema 5. Versão interativa aqui.

No $\triangle MNB$ vale que $MB < MN + NB$, logo:

$$AM + MB < AM + MN + NB = AN + NB. \quad (9)$$

No $\triangle ANC$ tem-se $AN < NC + CA$. Com isto segue:

$$AN + NB < NC + CA + NB = CA + BC. \quad (10)$$

E no $\triangle CDA$ vale que $CA < CD + DA$. Portanto,

$$CA + BC < CD + DA + BC. \quad (11)$$

Concatenando (9), (10) e (11) fica provado o lema. $\square$

Sejam E , F e J os pontos médios de BC , AC e AB , respectivamente, como mostrado na Figura 9. Qualquer ponto M no interior do $\triangle ABC$ está no interior de, pelo menos, dois dos quadriláteros $ABEF$, $BCFJ$ e $CAJE$. Pode-se supor, sem perda de generalidade, que $MB = \min\{MA+MB+MC\}$. Isto é, M está no interior de $ABEF$ e $BCFJ$.

Aplicando o Lema 5 ao quadrilátero $ABEF$ tem-se:

$$AM + MB < BE + EF + FA. \quad (12)$$

E aplicando o Lema 5 ao quadrilátero $BCFJ$ segue:

$$BM + MC < CF + FJ + JB. \quad (13)$$

Somando (12) e (13) obtêm-se a desigualdade a seguir:

$$MB + MA + MB + MC < BE + FJ + CF + FA + EF + JB.$$

Adicionalmente, devido ao fato de FJ e EF serem Bases Médias têm-se $FJ = EC$ e $EF = JB$. Consequentemente, encontra-se a desigualdade:

$$\min\{MA, MB, MC\} + MA + MB + MC < BC + CA + AB.$$

A Figura 9 mostra uma construção geométrica.

Figura 9: Construção geométrica para o Problema 4. Versão interativa [aqui](#).

3.5 P1 IMO 2001. Desigualdade Triangular. Lei dos Senos. Trigonometria.

A IMO 2001 foi realizada na cidade de Washington, Estados Unidos. Problema 16 da lista curta, proposto pela delegação da Coreia do Sul e escolhido como P1 da competição (DJUKIC *et al*, 2006).

Problema 5. Num triângulo acutângulo ABC com circuncentro O e altura AP , $\angle C \geq \angle B + 30^\circ$. Provar que:

$$\angle A + \angle COP < 90^\circ.$$

3.5.1 Resolução do Problema 5.

A Figura 10 mostra uma construção geométrica.

Figura 10: Construção geométrica para o Problema 5. Versão interativa [aqui](#).

Sejam $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$, $\angle C = \gamma$, $\angle OCP = \delta$ e $\angle COP = \eta$. Tem-se $\gamma \geq \beta + 30^\circ$. Como um ângulo central $\angle BOC = 2\alpha$ é duas vezes o inscrito $\angle BAC = \alpha$ e o $\triangle OBC$ é isósceles, segue que $\angle OCB = \delta = 90^\circ - \alpha$.

Do enunciado do Problema 5 quer-se provar que $\eta < \delta$. Pela Proposição 1, aplicada no ΔCOP , o anterior equivale a demonstrar que $PC < OP$. Por sua vez, para verificar que $PC < OP$ bastará mostrar que:

$$2 \cdot PC < OC = R. \quad (14)$$

De fato, aplicando a Desigualdade Triangular (Proposição 2) no ΔOCP e multiplicando por 2 pode-se escrever:

$$2R < 2 \cdot OP + 2 \cdot PC.$$

Utilizando (14) tem-se:

$$\begin{aligned} 2R &< 2 \cdot OP + R, \\ R &< 2 \cdot OP. \end{aligned} \quad (15)$$

Logo, de (14) e (15) segue:

$$2 \cdot PC < R < 2 \cdot OP \Rightarrow PC < OP.$$

Devido ao $\angle CPA = 90^\circ$ segue:

$$PC = AC \cos(\gamma).$$

Mas pela Lei dos Senos no $\triangle ABC$ tem-se:

$$2R = \frac{AC}{\sin(\beta)}.$$

Logo,

$$PC = 2R \operatorname{sen}(\beta) \cos(\gamma).$$

Utilizando a hipótese $\gamma \geq \beta + 30^\circ$ e o fato da função cosseno ser decrescente no intervalo entre 0° e 90° encontramos:

$$PC < 2R \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ).$$

Resta mostrar que:

$$2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) < \frac{1}{2}.$$

De fato, utilizando as identidades do cosseno e seno da soma de dois ângulos tem-se:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= 2 \operatorname{sen}(\beta) [\cos(\beta) \cos(30^\circ) - \operatorname{sen}(\beta) \operatorname{sen}(30^\circ)] \\ &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) - 2 \operatorname{sen}^2(\beta) \operatorname{sen}(30^\circ). \end{aligned}$$

Somando e subtraindo $\operatorname{sen}(30^\circ)$ do lado direito encontramos:

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sen}(\beta) \cos(\beta + 30^\circ) &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + [1 - 2 \operatorname{sen}^2(\beta)] \operatorname{sen}(30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \\ &= \operatorname{sen}(2\beta) \cos(30^\circ) + \cos(2\beta) \operatorname{sen}(30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \\ &= \operatorname{sen}(2\beta + 30^\circ) - \operatorname{sen}(30^\circ) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Como a função seno é sempre menor ou igual a um e $\operatorname{sen}(30^\circ) = \frac{1}{2}$ a última desigualdade é verdadeira. Isto conclui a demonstração.

4 Comentários finais

Foram discutidos em detalhe cinco problemas propostos para a Olimpíada Internacional de Matemática. Nos Problemas 1, 4 e 5 se exploram a Desigualdade Triangular e das Médias. Os Problemas 2 e 3 utilizaram fundamentalmente a Desigualdade de Cauchy-Schwarz. As demonstrações envolvidas nas soluções foram complementadas pela disponibilização dos respectivos links das figuras interativas no GeoGebra. Adicionalmente, foram apresentados os conceitos básicos relativos as desigualdades envolvidas. Uma combinação de outros conteúdos também foram abordados: Lei dos Senos e Trigonometria, Bases Médias e Paralelogramo, Incírculo, Tangentes e Áreas.

5 Referências Bibliográficas

DJUKIC, D. *et al.* **The IMO compendium**: a collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959–2004. New York: Springer, 2006. Disponível em: <http://web.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf>. Acesso em: 3 ago. 2021.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre série harmônica na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 17, p. 127-138, fev. 2020a. Edição Ermac. DOI: 10.21167/cqdvoll7ermac202023169664jllabagfb127138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 ago. 2021.

LÓPEZ LINARES, J.; BRUNO-ALFONSO, A.; BARBOSA, G. F. Três problemas sobre desigualdades na Olimpíada Internacional de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 78-88, jul. 2020b. DOI: 10.21167/cqdvoll8202023169664jllabagfb7888. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 ago. 2021.

LÓPEZ LINARES, J.; SANTOS, J. P. M.; JESUS, A. F. Cinco problemas sobre potência de um ponto em relação a uma circunferência e eixo radical em Olimpíadas Internacionais de Matemática. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 20, p. 22–40, jul. 2021. DOI: 10.21167/cqdv0120202123169664jlljpmsafj2240. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/revistacqd>. Acesso em: 3 ago. 2021.

MORGADO, A. C.; CARVALHO, P. C. P. **Matemática discreta**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2015. (Coleção ProfMat).