**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 21, dez. 2021

Daniel de Lima Pazim

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
daniel.pazim@unesp.br

Marta Cilene Gadotti

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
mc.gadotti@unesp.br

Covid-19: estudo de modelo fracionário

Covid-19: study of fractional model

Resumo

Estudar modelos matemáticos de doenças infecciosas é importante para um melhor entendimento da situação da doença, como ela pode se agravar e tornar-se uma pandemia. Com este trabalho pretendemos introduzir de forma simples a derivada fracionária de Caputo, apresentar um problema de existência e unicidade para problema de valor inicial (PVI) fracionário e exemplificar através de um modelo da COVID-19.

Palavras-chave: COVID-19. Fracionário. Doenças infecciosas.

Abstract

Studying mathematical models of infectious diseases is important for a better understanding of the disease situation, how it can get worse and become a pandemic. With this work we intend to introduce Caputo's fractional derivative in a simple way, present a problem of existence and uniqueness for fractional PVI and exemplify it through a COVID-19 model.

Keywords: COVID-19. Fractal. Infectious diseases.

1 Preliminares

1.1 Derivada Fracionária segundo Caputo

Seja f uma função definida em um intervalo $[a, T]$, $T > a$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville [1] é definida por

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau, \quad (k-1 < p \leq k), \quad t \leq T. \quad (1)$$

Essa definição tem um importante papel no desenvolvimento da teoria de derivadas e integrais fracionárias e suas aplicações na matemática pura, como por exemplo, soluções de equações diferenciais de ordem inteira, definições de novas classes de funções e estudo de séries.

No entanto, a demanda pela tecnologia moderna exige uma certa revisão da bem estabelecida abordagem da matemática pura [1], [2], [3], [4]. A modelagem matemática, baseada em modelos reológicos aprimorados naturalmente, utiliza as equações diferenciais de ordem fracionária e também há a necessidade da formulação de condições iniciais para tais equações.

Problemas aplicados exigem definições da derivada fracionária que permitam a utilização de condições iniciais fisicamente interpretáveis, as quais contém $f(a)$, $f'(a)$, $\dots$

Infelizmente, a abordagem de Riemann-Liouville leva a condições iniciais contendo os valores limites da derivada fracionária de Riemann-Liouville no instante inferior, $t = a$, como por exemplo

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-1} f(t) &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-2} f(t) &= b_2 \\ &\dots \\ \lim_{t \rightarrow a} {}_a D_t^{\alpha-n} f(t) &= b_n, \end{aligned} \quad (2)$$

onde b_k , $k = 1, 2, 3, \dots, n$ são constantes conhecidas.

Uma certa solução foi proposta por Caputo, primeiramente em seu artigo (*Linear model of dissipation whose Q is almost frequency independent- II*) publicado em 1967 e dois anos depois em seu livro (*Elasticità e Dissipazione*) publicado em 1969 e recentemente, nos espaços de Banach, por El-Sayed em 1994 e 1995. A definição de Caputo [1] pode ser escrita como

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}, \quad (n-1 < \alpha < n). \quad (3)$$

1.2 Teorema de existência e unicidade para problemas de valor inicial

Chamamos de Equação Diferencial Fracionária (EDF) de Caputo a equação [5]

$$\left({}^C D_{0+}^\alpha y\right)(t) = f(t, y(t)), \quad n < \alpha < n+1, \quad t > 0, \quad (4)$$

com as condições iniciais:

$$\left({}^C D^k y\right)(0) = b_k, \quad k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (5)$$

Lema 1 Seja $y(t)$ uma função com derivada contínua no intervalo $I_h(0) = [0, h]$, $h > 0$, com valores em $[y_0 - \eta, y_0 + \eta]$, $\eta > 0$, então $y(t)$ satisfaz a EDF de Caputo

$$D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad t > 0, \quad (6)$$

$$y(0) = y_0, \quad (7)$$

se, e somente se, satisfaz a equação de Volterra

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du. \quad (8)$$

Demonstração. Considere $\mathcal{L}[y(t)] = Y$ a transformada de Laplace de $y(t)$. Aplicando em (6) obtemos

$$s^\alpha Y - s^{\alpha-1} y_0 = \mathcal{L}[f(t, y(t))],$$

ou seja,

$$Y = \frac{y_0}{s} + \frac{1}{s^\alpha} \mathcal{L}[f(t, y(t))].$$

Agora, aplicando a inversa da transformada de Laplace, tem-se

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du.$$

□

Definimos a norma de Chebyshev de uma função contínua g definida em um conjunto S por

$$\|g\|_\infty = \sup \{|g(x)| : x \in S\}.$$

Para a prova do Teorema de Existência e Unicidade será necessário o uso do seguinte lema conhecido como teste M de Weierstrass.

Lema 2 (Teste de Weierstrass) Seja $\{f_n(t)\}$ uma sequência de funções reais definidas em um conjunto A , e $\{R_n\}$ uma sequência de números reais positivos tal que

$$\forall n > 1, \quad \forall t \in A, \quad |f_n(t)| \leq R_n, \quad \sum_{n=1}^{\infty} R_n < \infty.$$

Então, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)$ é uniformemente convergente.

Teorema 3 (Existência e Unicidade para o Problema de Caputo) Considere a Equação Diferencial Fracionária de Caputo

$${}^C D^\alpha y(t) = f(t, y(t)) \quad 0 \leq \alpha < 1, \quad t > 0, \quad (9)$$

com condição inicial:

$$y(0) = y_0. \quad (10)$$

Consideramos o domínio

$$D = [0, \eta] \times [y_0 - \eta, y_0 + \eta], \quad (11)$$

onde f satisfaz:

- (i) $f(t, y)$ é contínua;
- (ii) $|f(t, y)| \leq M$, onde $M = \max_{(t, y) \in D} |f(t, y)|$;
- (iii) A função $f(t, y)$ é lipschitziana com respeito a segunda coordenada, isto é, existe uma constante K tal que

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq K|y_2 - y_1|, \quad \forall (t, y_1), (t, y_2) \in D. \quad (12)$$

Então existem $\delta > 0$ e uma única função $y \in C[0, \delta] = \{g : [0, \delta] \rightarrow \mathbb{R}; g \text{ é contínua}\}$ solução de (9)-(10), onde

$$\delta = \min \left\{ \eta, \left(\frac{\eta \Gamma(\alpha + 1)}{M} \right)^{\alpha-1} \right\}. \quad (13)$$

Demonstração. De acordo com o *Lema 1*, resolver a equação diferencial (9) com a condição inicial (10) é o mesmo que resolver a equação integral

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du. \quad (14)$$

Vamos considerar sucessivas aproximações:

$$y_n(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y_{n-1}(u)) du, \quad (15)$$

onde $y_0(t) = y_0$

Usando o método de aproximações sucessivas e com a ajuda do *Teste de Weierstrass* provaremos a existência e unicidade de solução para EDF de Caputo.

Vamos mostrar que a sequência $\{y_n(t)\}$ está bem definida, isto é, todos os seus elementos estão no conjunto D . De fato, para o caso $n = 0$ temos a condição inicial $y(0) = y_0$ constante e, portanto, bem definida. Já para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned} |y_1 - y_0| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y_0(u)) du \right| \leq \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} |f(u, y_0(u))| du \\ &\leq \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} du \leq \left| \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} du \right| = \left| \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq \left| \frac{M\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| < \eta, \end{aligned}$$

assim

$$|y_{n-1} - y_0| \leq \eta.$$

Para um valor arbitrário de n , segue que

$$\begin{aligned} |y_n - y_0| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y_{n-1}(u)) du \right| \leq \left| \frac{M}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} du \right| \\ &= \left| \frac{Mt^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \leq \left| \frac{M\delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| < \eta. \end{aligned}$$

Mostremos agora que a sequência é uniformemente convergente. Para isso, consideremos a série

$$y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} (y_{k+1}(t) - y_k(t)) = y_{n-1}(t).$$

Temos:

$$\begin{aligned} |y_2 - y_1| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} [f(u, y_1(u)) - f(u, y_0(u))] du \right| \\ &\leq \left| \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} |y_1 - y_0| du \right| \leq \left| \frac{\eta K t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \right| \\ &\leq \frac{\eta K \delta^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{K}{M} \eta^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y_3 - y_2| &= \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} [f(u, y_2(u)) - f(u, y_1(u))] du \right| \\ &\leq \left| \frac{K}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} |y_2 - y_1| du \right| \leq \left| \frac{K^2 \eta^2}{M \Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right| \\ &\leq \left| \frac{K^2 \eta^2}{M \Gamma(\alpha+1)} \delta^\alpha \right| = \left| \frac{K^2 \eta^3}{M^2} \right|, \end{aligned}$$

$$|y_{n+1} - y_n| \leq \left| \frac{K^n \eta^{n+1}}{M^n} \right|.$$

Como

$$\sum_{n=0}^{\infty} |y_{n+1} - y_n| = y_0 + \frac{M}{K} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{K\eta}{M} \right)^n,$$

segue do *Teste de Weierstrass* que esta série converge para $\eta < \frac{M}{K}$.

Assim, a sequência $\{y_n(t)\}$ é uniformemente convergente no compacto $[0, \eta]$. Consequentemente, a sequência $\{y_n(t)\}$ converge para uma função $y(t)$ para $t \in [0, \eta]$.

Pela definição, $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}$ tal que para $n > N$, temos

$$|y_n(t) - y(t)| < \varepsilon,$$

onde esse limite é único. De fato, suponha que a sequência $\{y_n(t)\}$ tenha limite $x(t)$, assim:

$$|x(t) - y(t)| = |x(t) - y_n(t) + y_n(t) - y(t)| \leq |x(t) - y_n(t)| + |y_n(t) - y(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

Mostremos que y é solução do problema procurado. Para isso apliquemos o limite em ambos os lados de (15), ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_0 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y_{n-1}(u)) du,$$

como o limite comuta com o sinal de integração, devido à convergência uniforme, e a função f é contínua, segue que

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-u)^{\alpha-1} f(u, y(u)) du,$$

portanto y é solução do problema procurado. □

2 COVID-19

2.1 Modelo SIRD

O matemático Hasan [6], propôs recentemente um novo modelo comportamental SIRD (Susceptible-Infectious-Recovered-Dead) para o estudo da COVID-19.

Nesse modelo são utilizadas as seguintes variáveis:

S: Suscetíveis;	N: População total;
I: Infectados;	β : Número médio de contato por pessoa por vez;
R: Recuperados;	γ : Taxa de recuperação;
D: Mortos;	κ : Taxa de morte.

A derivada de Caputo foi adotada principalmente para lidar com modelos biológicos de doenças infecciosas nas últimas décadas. Por causa disso, será utilizado um modelo também descrito em termos da derivada de Caputo [2], com $0 < \alpha \leq 1$:

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha (S(t)) &= -\beta \frac{S(t)I(t)}{N}, \\ {}^C D_t^\alpha (I(t)) &= \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \kappa)I(t), \\ {}^C D_t^\alpha (R(t)) &= \gamma I(t), \\ {}^C D_t^\alpha (D(t)) &= \kappa I(t), \end{cases} \quad (16)$$

com as condições seguintes iniciais:

$$\begin{aligned} S(0) &= S_0, & I(0) &= I_0, \\ R(0) &= R_0, & D(0) &= D_0. \end{aligned}$$

Observação 4 O sistema (16) é o mesmo se considerarmos a derivada clássica ao invés da fracionária [2].

Pelo Teorema 3 o sistema (16) com as condições iniciais dadas, possui uma única solução.

Lema 5 A solução para o problema considerado está na região

$$\mathbb{T} = \{(S, I, R, D) \in \mathbb{R}^4 : 0 \leq N(t) \leq N_0\},$$

e a pandemia ocorrerá se $S_0 < \frac{\gamma + \kappa}{\beta}$, [3].

Demonstração. Seja $N(t) = S(t) + I(t) + R(t) + D(t)$. Derivando em relação a t temos

$$\frac{dN(t)}{dt} = \frac{dS(t)}{dt} + \frac{dI(t)}{dt} + \frac{dR(t)}{dt} + \frac{dD(t)}{dt}.$$

Pela observação (4) e analisando o sistema (16), temos que

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} + \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \kappa)I(t) + \gamma I(t) + \kappa I(t). \quad (17)$$

Resolvendo (17), temos como solução

$$\mathbf{N}(t) = \mathbf{N}(0).$$

Como a população total inicial é finita, isto é, $\mathbf{N}(0) \leq \mathbf{N}_0$ então podemos escrever $\mathbf{N}(t) \leq \mathbf{N}_0$. Temos portanto que o sistema é limitado.

Pela observação (4) e a primeira equação de (16), segue que

$$\frac{d\mathbf{S}(t)}{dt} \leq 0, \quad \text{ou} \quad \mathbf{S}(t) \leq \mathbf{S}_0,$$

então o número de suscetíveis está sempre diminuindo, o que implica que a pandemia não ocorrerá.

Analisando agora a segunda equação de (16),

$$\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} = \beta \frac{\mathbf{S}(t)\mathbf{I}(t)}{\mathbf{N}} - (\gamma + \kappa)\mathbf{I}(t),$$

onde $\frac{\gamma + \kappa}{\beta}$ é o tamanho crítico da comunidade para a pandemia.

Se $\mathbf{S}_0 < \frac{\gamma + \kappa}{\beta}$ então $\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} < 0$, ou seja, a taxa de infectados está diminuindo e a pandemia não ocorre. Já se $\mathbf{S}_0 > \frac{\gamma + \kappa}{\beta}$ então $\frac{d\mathbf{I}(t)}{dt} > 0$, ou seja, a taxa de infectados está aumentando e ocorre a pandemia [2]. $\square$

Teorema 6 De acordo com o jornal *Results in Physics* [2], o ponto de equilíbrio livre de doença de (16) é dado por

$$E_0 = \left(S^0, I^0, R^0, D^0 \right) = \left(\frac{\gamma + \kappa}{\beta}, 0, 0, 0 \right).$$

Demonstração. Vamos escrever (16) como

$$\begin{cases} {}^C D_t^\alpha (\mathbf{S}(t)) &= 0, \\ {}^C D_t^\alpha (\mathbf{I}(t)) &= 0, \\ {}^C D_t^\alpha (\mathbf{R}(t)) &= 0, \\ {}^C D_t^\alpha (\mathbf{D}(t)) &= 0. \end{cases} \quad (18)$$

Da segunda equação de (18) e usando (16), temos que

$$0 = \beta \frac{\mathbf{S}(t)\mathbf{I}(t)}{\mathbf{N}} - (\gamma + \kappa)\mathbf{I}(t) \Rightarrow \beta \frac{\mathbf{S}(t)\mathbf{I}(t)}{\mathbf{N}} = (\gamma + \kappa)\mathbf{I}(t).$$

Como isso ocorre para todo t , temos $\mathbf{I}(t) = 0$. Assim, segue que

$$\mathbf{S}(t) = \frac{\gamma + \kappa}{\beta}.$$

Agora, note que pelas terceira e quarta equações de (18) e sabendo que

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha (\Phi(t)) &= h(t), \\ \Phi(0) &= \Phi_0, \end{aligned}$$

onde

$$\Phi(t) = \Phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{\alpha-1} h(\xi) d\xi,$$

também concluímos que $\mathbf{R}(t) = 0$ e $\mathbf{D}(t) = 0$. Assim,

$$E_0 = \left(\frac{\gamma + \kappa}{\beta}, 0, 0, 0 \right).$$

□

Um valor indiscutivelmente importante para o estudo das doenças infecciosas é o número básico de reprodução, $\mathcal{R}_0$. Essa quantidade é uma das mais estimadas para doenças infecciosas em situação de surto, e o seu valor fornece uma visão para projetar intervenções de controle para a doença. $\mathcal{R}_0$ é definido como o número médio de novos casos de uma infecção causada por um indivíduo infectado, em uma população de suscetíveis. Veremos a seguir o valor e como calcular o número básico de reprodução através da matriz da próxima geração.

Teorema 7 *O número básico de reprodução referente ao sistema (16) é dado por $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mathbf{N}}$, [2].*

Demonstração. Como na referência [7], $\mathcal{R}_0$ corresponde ao autovalor dominante da matriz $K = -T\Sigma^{-1}$, onde $\dot{X} = (T + \Sigma)X$ é o subsistema linearizado do sistema (16), sendo T a matriz de transmissão e Σ a matriz de transição. Ou seja, para o sistema (18), o subsistema considerado, referente a parte de infecção, é

$${}^C D_t^\alpha (\mathbf{I}) = \beta \frac{\mathbf{S}\mathbf{I}}{\mathbf{N}} - (\gamma + \kappa)\mathbf{I}.$$

Linearizando-o, temos

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha (\mathbf{I}) &= \beta \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{N}} - (\gamma + \kappa)\mathbf{I} \\ &= (T + \Sigma)\mathbf{I}, \end{aligned}$$

isto é,

$${}^C D_t^\alpha (\mathbf{I}) = \left[\beta \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{N}} - (\gamma + \kappa) \right] \mathbf{I},$$

onde

$$\beta \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{N}} = T \quad \text{e} \quad -(\gamma + \kappa) = \Sigma.$$

Conhecida também como matriz da próxima geração (neste caso, 1x1) temos:

$$K = -T\Sigma^{-1} = -\beta \frac{\mathbf{S}}{\mathbf{N}} \left(\frac{-1}{\gamma + \kappa} \right) = \frac{\beta \mathbf{S}}{\mathbf{N}(\gamma + \kappa)}.$$

Calculando no ponto de equilíbrio $E_0 = \left(\frac{\gamma + \kappa}{\beta}, 0, 0, 0 \right)$, tem-se

$$K_{E_0} = \frac{1}{\mathbf{N}}.$$

Portanto, $\mathcal{R}_0 = \frac{1}{\mathbf{N}}$.

□

Teorema 8 Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então o ponto de equilíbrio da pandemia em (16) é estável e para $\mathcal{R}_0 > 1$ é instável [2].

Demonstração. Primeiro, vamos calcular a matriz jacobiana de (16):

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial S}(\Phi_1) & \frac{\partial}{\partial I}(\Phi_1) & \frac{\partial}{\partial R}(\Phi_1) & \frac{\partial}{\partial D}(\Phi_1) \\ \frac{\partial}{\partial S}(\Phi_2) & \frac{\partial}{\partial I}(\Phi_2) & \frac{\partial}{\partial R}(\Phi_2) & \frac{\partial}{\partial D}(\Phi_2) \\ \frac{\partial}{\partial S}(\Phi_3) & \frac{\partial}{\partial I}(\Phi_3) & \frac{\partial}{\partial R}(\Phi_3) & \frac{\partial}{\partial D}(\Phi_3) \\ \frac{\partial}{\partial S}(\Phi_4) & \frac{\partial}{\partial I}(\Phi_4) & \frac{\partial}{\partial R}(\Phi_4) & \frac{\partial}{\partial D}(\Phi_4) \end{bmatrix},$$

onde $\Phi_i, i = 1, 2, 3, 4$, são as equações do lado direito de (16), isto é,

$$\Phi_1 = -\beta \frac{S(t)I(t)}{N} \quad \Phi_2 = \beta \frac{S(t)I(t)}{N} - (\gamma + \kappa)I(t) \quad \Phi_3 = \gamma I(t) \quad \Phi_4 = \kappa I(t).$$

Realizando as derivadas parciais temos

$$J = \begin{bmatrix} -\beta \frac{I}{N} & -\beta \frac{S}{N} & 0 & 0 \\ \beta \frac{I}{N} & \beta \frac{S}{N} - (\gamma + \kappa) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Usando os dados do ponto de equilíbrio $E_0 = \left(\frac{\gamma + \kappa}{\beta}, 0, 0, 0\right)$, temos

$$J_{E_0} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\gamma + \kappa}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma + \kappa}{N} - (\gamma + \kappa) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (20)$$

A equação característica de (20) pode ser determinada por

$$\det(J - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -\frac{\gamma + \kappa}{N} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\gamma + \kappa}{N} - (\gamma + \kappa) - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & -\lambda & 0 \\ 0 & \kappa & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Após calcular o determinante, obtemos que o valor do autovalor λ é

$$\lambda = \frac{\gamma + \kappa}{N} - (\gamma + \kappa),$$

e dividindo por $(\gamma + \kappa)$, temos que $\lambda = \mathcal{R}_0 - 1$. Isso implica que para $\mathcal{R}_0 < 1$, então λ é negativo, o que conclui o resultado. □

Agradecimentos

Agradecemos imensamente o apoio da FAPESP, proc. 2019/19722-2, no desenvolvimento deste projeto, o qual trouxe significativa e relevante contribuição com a nossa formação acadêmica.

Referências

- [1] PODLUBNY, I. **Fractional differential equations**: an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications. [S.l.]: Academic Press, 1998.
- [2] NISAR, K. S. *et al.* Mathematical analysis of SIRD model of Covid-19 with Caputo fractional derivative based on real data. **Results in Physics**, Elsevier, v. 21, p. 103772, 2021.
- [3] TAGHVAEI, A. *et al.* Fractional SIR epidemiological models. **Scientific Reports**, Nature Publishing Group, v. 10, n. 1, p. 1–15, 2020.
- [4] SANTOS, J. P. C. dos; MONTEIRO, E.; VIEIRA, G. B. Global stability of fractional SIR epidemic model. **Proceeding Series of the Brazilian Society of Computational and Applied Mathematics**, SBMAC, v. 5, n. 1, p. 010019-1-010019-7, 2017.
- [5] MILICI, C.; DRAGANESCU, G.; MACHADO, J. T. **Introduction to fractional differential equations**. [S.l.]: Springer, 2019. (Nonlinear Systems and Complexity; v. 25).
- [6] HASAN, A. *et al.* A new estimation method for co-vid-19 time-varying reproduction number using active cases. **arXiv:2006.03766v2 [q-bio.QM]**, 2020. Disponível em: <https://arxiv.org/abs/2006.03766v2>. Acesso em: 5 ago. 2021.
- [7] DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J.; ROBERTS, M. G. The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. **Journal of the Royal Society Interface**, The Royal Society, v. 7, n. 47, p. 873–885, 2010.
- [8] CHASNOV, J. R. **Mathematical biology**: lecture notes for MATH 4333. Hong Kong: Hong Kong University of Science and Technology, 2016. Disponível em: <https://www.math.ust.hk/~machas/mathematical-biology.pdf>. Acesso em: 30 abr. 2021.
- [9] KHAN, M. A. *et al.* Fractional order SIR model with generalized incidence rate. **AIMS Mathematics**, AIMS Press, v. 5, n. 3, p. 1856–1880, 2020.
- [10] AL-RAEEL, M. The basic reproduction number of the new coronavirus pandemic with mortality for India, the Syrian Arab Republic, the United States, Yemen, China, France, Nigeria and Russia with different rate of cases. **Clinical Epidemiology and Global Health**, Elsevier, v. 9, p. 147–149, 2021.
- [11] DIEKMANN, O.; HEESTERBEEK, J. A. P.; METZ, J. A. J. On the definition and the computation of the basic reproduction ratio R_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. **Journal of Mathematical Biology**, Springer, v. 28, n. 4, p. 365–382, 1990.