**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 20, jul. 2021
Iniciação Científica

Maria Júlia Fassis

UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

mj.fassis@unesp.br

Marta Cilene Gadotti

UNESP - Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"

mc.gadotti@unesp.br

Funções complexas: uma abordagem geométrica

Complex functions: a geometric approach

Resumo

O conjunto dos números complexos foi imprescindível para o desenvolvimento da Matemática, Computação e Engenharia. As funções de variável complexa são ferramentas importantes em processamento de imagens, dinâmica de fluídos, engenharia elétrica, cartografia, entre tantas outras áreas que apresentam problemas que envolvem geometrias. Neste artigo, faremos um estudo sobre a interpretação geométrica de algumas funções de variável complexa, em especial de certas funções trigonométricas complexas, como seno, cosseno, tangente, seno hiperbólico e cosseno hiperbólico. Toda parte geométrica dessa análise foi desenvolvida com auxílio do software GeoGebra.

Palavras-chave: Funções de variável complexa. GeoGebra. Interpretação geométrica.

Abstract

The set of complex numbers was essential for the development of Mathematics, Computing and Engineering. Complex variable functions are important tools in image processing, fluid dynamics, electrical engineering, cartography, among many other areas that present problems involving geometries. In this article, we will study the geometric interpretation of some complex variable functions, in particular certain complex trigonometric functions, such as sine, cosine, tangent, hyperbolic sine and hyperbolic cosine. The entire geometric part of this analysis was developed with the aid of the GeoGebra software.

Keywords: Complex variable functions. GeoGebra. Geometric interpretation.

1 Introdução

A história dos números complexos, segundo Boyer e Merzbach (2012), começa com a busca por uma fórmula simples que resolvesse qualquer equação polinomial do 3º grau, assim como havia acabado de ser descoberta a fórmula de Bháskara para resolver equações do 2º grau. Em 1510, Scipione Del Ferro conseguiu encontrar uma resolução para equações do tipo $x^3+px+q=0$, porém ele acabou falecendo antes de conseguir publicar sua solução, a qual foi herdada por Antônio Maria Del Fiore que estava tentando ser reconhecido na área matemática. Del Fiore, então, desafiou Nicolau Fontana, também conhecido como Tartália, já renomado no ramo, para um duelo de resoluções matemáticas que consistia em resolver 30 problemas propostos pelo oponente e cujo perdedor deveria pagar 30 banquetes ao vencedor. O desafio foi aceito e ganho por Tartália, o qual, apesar de Del Fiore não saber, também já tinha encontrado uma solução para as equações do tipo $x^3+px+q=0$ e, além disso, para as equações do tipo $x^3+px^2+q=0$, em 1535.

Com a vitória, Tartália recebeu um convite para ir à casa de Girolamo Cardano cuja intenção era convencer Tartália a compartilhar suas fórmulas. Após um tempo de insistência, Tartália acabou dando a sua fórmula à Cardano com a promessa de que este não a publicaria. Infelizmente para Tartália, Cardano quebrou sua promessa e publicou a fórmula para resolução das equações do tipo $x^3+px+q=0$ e que ficou conhecida como Fórmula de Cardano.

Nessa mesma época, Rafael Bombelli estava escrevendo seu livro “L’Algebra Parte Maggiore Dell’ Arithmetica” e percebeu que $x=4$ era raiz da equação $x^3-15x=4$, mas que utilizando a Fórmula de Cardano, o valor encontrado seria $x = \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}}$, o que, na época, levaria o matemático a considerar que a equação não teria raiz, uma contradição. Por volta de 1572, Bombelli decidiu considerar que existiam expressões como $a + \sqrt{-b}$ e $a - \sqrt{-b}$. A partir daí, o conjunto dos números imaginários e, por consequência, o dos complexos foi tomando forma e sendo aprimorado por diversos matemáticos.

Foi somente por volta de 1800 que Jean Robert Argand e Friederich Gauss concluíram que números complexos poderiam ser representados em um sistema de coordenadas retangulares e foi convencionado que o eixo horizontal representaria os números reais enquanto o eixo vertical representaria os números imaginários (qualquer complexo ‘ $a + bi$ ’ corresponderia ao par (a, b)).

Em 1814, Augustin-Louis Cauchy apresentou à Academia francesa um artigo contendo algumas de suas mais importantes contribuições à teoria das funções de variável complexa, campo pelo qual, a partir dessa data, tornou-se o fundador efetivo.

Neste trabalho, aprofundamos o ponto de vista geométrico sobre algumas funções de variável complexa, utilizando o software GeoGebra e apresentando os argumentos algébricos. O tratamento geométrico das funções apresentado neste trabalho foi baseado nas referências Fernandez (2011), Pianoschi (2013) e Pinheiro (2013). As ilustrações geométricas foram elaboradas pelos autores.

2 Funções de variável complexa

Considere dois subconjuntos, A e B , do conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$. Uma função complexa $f: A \rightarrow B$ associa cada número complexo $z=x+yi$ de A a um único número complexo $w=u+vi$ de B pela lei $f(z)=w$. Nesse contexto, A é chamado de domínio da função f e denotado por $D(f)$, B de contradomínio de f e o conjunto imagem de f é definido como $\text{Im}(f)=\{f(z), \text{ para todo } z \in A\}$.

2.1 Representação geométrica

Diferentemente do caso de funções reais, em que os gráficos são os conjuntos dos pares ordenados $(x, f(x))$, onde $x \in D(f)$, isto é, $\text{Graf}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x) \text{ para todo } x \in D(f)\}$, os gráficos das funções de variável complexa não podem ser visualizados, pois tratam-se de uma superfície bidimensional representada em um espaço ambiente quadridimensional. Assim, representamos $z = (x, y) \in A$ e $w = (u, v) \in B$, onde $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, em planos bidimensionais distintos e os denominamos plano- z e plano- w , respectivamente.

Dessa maneira, todo ponto z do plano- z que pertence ao domínio de f está associado a um ponto w do plano- w que, por sua vez, pertence a imagem de f através da relação $w = f(z) = f((x, y)) = u(x, y) + iv(x, y)$ chamada “transformação de pontos do plano- z em pontos do plano- w ”.

O comportamento de tal função complexa f é estudado a partir de como uma região (ou lugares geométricos) no plano- z é transformada, pela função f , em novas regiões (ou lugares geométricos) no plano- w .

2.2 Função inversa complexa

Seja f uma função de variável complexa definida em $f: A \rightarrow B$, com A e B subconjuntos de $\mathbb{C}$, chama-se função f^{-1} inversa de f , com $f^{-1}: B \rightarrow A$, quando satisfaz $f \circ f^{-1} = \text{Id} = f^{-1} \circ f$, em que Id é a função identidade. Sempre que a função f for bijetora, ela admitirá uma inversa f^{-1} . Em relação às transformações no plano complexo, a função inversa representa a transformação inversa de determinada transformação.

Neste trabalho, analisaremos dois exemplos de funções inversas complexas: função raiz quadrada, inversa à função quadrática e função logarítmica, inversa à função exponencial.

3 Função afim complexa

Uma função de variável complexa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ chama-se função afim quando definida pela lei $f(z) = mz + n$, com $m, n \in \mathbb{C}$ e $m = r_0(\cos \theta_0 + i \sin \theta_0) \neq 0$, onde θ_0 é o argumento de m e r_0 é o módulo de m . Basicamente, a transformação $f(z) = mz + n$ consiste em rotacionar de um ângulo $\text{Arg}(m) = \theta_0$ a região no plano- z em torno da origem no sentido anti-horário e expandi-la ou contrai-la, dependendo do valor de $|m|$ e, em seguida, transladá-la pelo vetor corresponde ao complexo n .

Por exemplo, suponha a função $f(z) = mz + n = u + vi$ com $m = 2 + i$, $n = 1 - i$ e $z = x + yi$, com $x, y, u, v \in \mathbb{R}$. A transformação dos pontos da malha retangular no plano- z (Figura 1) em pontos no plano- w (Figura 2) ocorre da seguinte maneira:

Figura 1

Figura 2

Note que $f(z) = mz + n = (2 + i)(x + yi) + (1 - i) = 2x + 2yi + xi - y + 1 - i \Rightarrow f(z) = 2x - y + 1 + (2y + x - 1)i \Rightarrow \begin{cases} u(x, y) = 2x - y + 1 & [I] \\ v(x, y) = 2y + x - 1 & [II] \end{cases}$.

Se fixamos $x = x_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z = x_0 + yi$, com $y \in \mathbb{R}$, então, de [I], $y = -u + 2x_0 + 1$ e, substituindo em [II], temos $v = 2y + x_0 - 1 = -2u + 4x_0 + 2 + x_0 - 1 = -2u + 5x_0 + 1 = -2u + a \Rightarrow v = -2u + a$, com $a = 5x_0 + 1$ uma constante complexa, isto é, uma equação de reta.

Por outro lado, se fixamos $y = y_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z = x + y_0i$, com $x \in \mathbb{R}$, então, de [II], $x = v - 2y_0 + 1$ e, substituindo em [I], temos $u = 2x - y_0 + 1 = 2v - 4y_0 + 2 - y_0 + 1 = 2v - 5y_0 + 3 \Rightarrow u = 2v + b$, com $b = -5y_0 + 3$ uma constante complexa, isto é, uma equação de reta.

4 Função quadrática complexa

Uma função de variável complexa $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ chama-se função quadrática quando definida pela lei $f(z) = az^2 + bz + c$, com $a, b, c \in \mathbb{C}$ e $a \neq 0$. Podemos olhar para a função $f(z) = az^2 + bz + c$ como a composição de duas funções, sendo elas $h(z) = az^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$ e $g(z) = z + \frac{b}{2a}$, já que $h \circ g(z) = h(g(z)) = h(z + \frac{b}{2a}) = a(z + \frac{b}{2a})^2 + (c - \frac{b^2}{4a}) = a(z^2 + 2\frac{b}{2a}z + \frac{b^2}{4a^2}) + (c - \frac{b^2}{4a}) = a(z^2 + \frac{b}{a}z) + c = az^2 + bz + c = f(z)$. Sabendo que $\frac{b}{2a}$ é uma constante complexa, segue que $g(z)$ é uma função afim, assim, pela seção 3, já sabemos como interpretá-la geometricamente.

Já a função $h(z) = az^2 + (c - \frac{b^2}{4a})$, cujo termo $c - \frac{b^2}{4a}$ também é uma constante, trabalhamos da seguinte forma: $h(z)$ pode ser entendida como uma composição entre as funções $t(z) = z^2$ e $r(z) = az + m$, visto que $r \circ t(z) = r(t(z)) = a(z^2) + m = h(z)$, com $m = c - \frac{b^2}{4a}$. Analogamente, temos $r(z)$ uma função afim e precisamos entender como trabalhar com $t(z)$.

Resumidamente, podemos interpretar z^2 como o produto de z por z . Assim, representando z em coordenadas polares, digamos $z = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)$, segue que $z^2 = r_1^2(\cos(2\theta_1 \bmod 2\pi) + i \sin(2\theta_1 \bmod 2\pi))$. Dessa maneira, os pontos no plano- z são levados em pontos do plano- w cujas distâncias até a origem são elevadas ao quadrado e seus ângulos em relação à semirreta O_x são duplicados.

Dessa forma, a transformação dos pontos do plano- z para o plano- w pela função $f(z) = az^2 + bz + c$ poderá ser efetuada em três etapas: (I) Devemos fazer a transformação afim $g(z) = z + \frac{b}{2a}$, transladando os pontos segundo o vetor correspondente ao complexo $\frac{b}{2a}$; (II) Em seguida, realizamos a transformação $t(z) = z^2$, conforme já explicado acima; (III) Por fim, con-

cluímos realizando a transformação afim $r(z)=az+(c-\frac{b^2}{4a})$, cujo processo já foi explicado na seção 3 deste artigo.

Por exemplo, suponha a função $f(z)=az^2+bz+c=u+iv$ com $a=-1+i$, $b=1-2i$, $c=3+i$ e $z=o+pi$, com $o,p,u,v \in \mathbb{R}$. A transformação dos pontos da malha retangular no plano- z (Figura 3) em pontos no plano- w (Figura 4) ocorre da seguinte maneira:

Figura 3

Figura 4

Note que $f(z) = az^2 + bz + c = (-1+i)(o+pi)^2 + (1-2i)(o+pi) + (3+i) = -o^2 + io^2 - 2opi - 2op + p^2 - p^2i + o + pi - 2oi + 2p + 3 + i \Rightarrow f(z) = -o^2 - 2op + p^2 + o + 2p + 3 + (o^2 - 2op - p^2 + p - 2o + 1)i \Rightarrow$
 $\begin{cases} u(o,p) = -o^2 - 2op + p^2 + o + 2p + 3 \Rightarrow 2op = -u - o^2 + p^2 + o + 2p + 3 \\ v(o,p) = o^2 - 2op - p^2 + p - 2o + 1 \Rightarrow 2op = -v + o^2 - p^2 + p - 2o + 1 \end{cases} \Rightarrow -u - o^2 + p^2 + o + 2p + 3 = -v + o^2 - p^2 + p - 2o + 1 \Rightarrow -u - o^2 + p^2 + o + 2p + 3 = -v + o^2 - p^2 + p - 2o + 1 \Rightarrow v - u = 2o^2 - 2p^2 - p - 3o - 2 \quad [I].$

Se fixamos $o=o_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z=o_0+pi$, com $p \in \mathbb{R}$, então, de [I], $v - u = 2o_0^2 - 2p^2 - p - 3o_0 - 2 \Rightarrow v = -2p^2 - p + u + (2o_0^2 - 3o_0 - 2)$, com $2o_0^2 - 3o_0 - 2$ uma constante complexa, isto é, uma equação de parábola.

Por outro lado, se fixamos $p=p_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z=o+p_0i$, com $o \in \mathbb{R}$, então, de [I], $v - u = 2o^2 - 2p_0^2 - p_0 - 3o - 2 \Rightarrow v = 2o^2 - 3o + u + (-2p_0^2 - p_0 - 2)$, com $-2p_0^2 - p_0 - 2$ uma constante complexa, isto é, uma equação de parábola.

5 Função quociente complexa

Uma função de variável complexa chama-se função quociente quando definida pela lei $f(z)=\frac{1}{z}$, com $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$. Seja $z=x+yi$, segue que $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{1}{x+yi} \cdot \frac{x-yi}{x-yi} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} \Rightarrow$
 $f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}.$

A transformação dos pontos da malha retangular no plano- z (Figura 5) em circunferências no plano- w (Figura 6) ocorre da seguinte maneira:

Figura 5

Figura 6

Note que $f(z) = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} \Rightarrow \begin{cases} u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2} [I] \\ v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2} [II] \end{cases}$.

Se fixamos $x=x_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z=x_0+yi$, com $y \in \mathbb{R}$, então, de [I], $u = \frac{x_0}{x_0^2+y^2} \Rightarrow y^2 = \frac{x_0}{u} - x_0^2$ e, substituindo em [II], temos $v = -\frac{y}{x_0^2+y^2} \Rightarrow v^2 = \frac{y^2}{(y^2+x_0^2)^2} \Rightarrow v^2 = \frac{\frac{x_0}{u} - x_0^2}{\left(\frac{x_0}{u}\right)^2} =$

$$\frac{\frac{x_0}{u} - x_0^2}{\left(\frac{x_0}{u} + x_0^2 - x_0^2\right)^2} = \frac{\frac{x_0}{u} - x_0^2}{x_0^2/u^2} = \frac{u^2(\frac{x_0}{u} - x_0^2)}{x_0^2} \Rightarrow x_0^2 v^2 = u x_0 - x_0^2 u^2 \Rightarrow v^2 = \frac{u}{x_0} - u^2 = \frac{u}{x_0} - u^2 - \frac{1}{4x_0^2} + \frac{1}{4x_0^2} \Rightarrow v^2 + \left(u - \frac{1}{2x_0}\right)^2 = \frac{1}{4x_0^2}, \text{ isto é, uma equação de circunferência.}$$

Por outro lado, se fixamos $y=y_0 \in \mathbb{R}$, segue que $z=x+y_0i$, com $x \in \mathbb{R}$, então, de [II], $v = -\frac{y_0}{x^2+y_0^2} \Rightarrow x^2 = -\frac{y_0}{v} - y_0^2$ e, substituindo em [I], temos $u = \frac{x}{x^2+y_0^2} \Rightarrow u^2 = \frac{x^2}{(x^2+y_0^2)^2} \Rightarrow u^2 = \frac{-\frac{y_0}{v} - y_0^2}{\left(-\frac{y_0}{v}\right)^2} = \frac{-\frac{y_0}{v} - y_0^2}{\left(-\frac{y_0}{v} + y_0^2 - y_0^2\right)^2} = \frac{-\frac{y_0}{v} - y_0^2}{y_0^2/v^2} = \frac{v^2(-\frac{y_0}{v} - y_0^2)}{y_0^2} \Rightarrow y_0^2 u^2 = -v y_0 - y_0^2 v^2 \Rightarrow u^2 = -\frac{v}{y_0} - v^2 = -\frac{v}{y_0} - v^2 - \frac{1}{4y_0^2} + \frac{1}{4y_0^2} \Rightarrow u^2 + \left(v + \frac{1}{2y_0}\right)^2 = \frac{1}{4y_0^2}, \text{ isto é, uma equação de circunferência.}$

6 Função raiz quadrada complexa

Para definir a função raiz quadrada complexa iremos estudar o inverso da função quadrática $f(z)=z^2$. Como já definido na subseção 2.2, chama-se função f^{-1} inversa de f quando satisfaz $f \circ f^{-1} = \text{Id} = f^{-1} \circ f$, em que Id é a função identidade. Dessa forma, precisamos encontrar f^{-1} tal que $f \circ f^{-1} = \text{Id} = f^{-1} \circ f$, isto é, $f \circ f^{-1}(z) = f(f^{-1}(z)) = (f^{-1}(z))^2 = z$. Denotando $f^{-1}(z) = w = u+iv$, precisamos encontrar w tal que $w^2=z$, o que também ocorre em $(-w)^2=z$. Assim, se $z=x+yi$, segue que: $w^2 = z \Rightarrow (u+vi)^2 = x+yi \Rightarrow u^2 + 2uvi + v^2 = x+yi \Rightarrow \begin{cases} u^2 + v^2 = x \\ 2uv = y \end{cases}$. Após alguns cálculos e supondo $y \neq 0$, temos $u = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}$ e $v = \frac{y}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{x^2 + y^2} - x}$. Concluindo, a função raiz quadrada complexa, $g(z)=\sqrt{z}$, associa cada ponto $z=(x,y)$ do plano- z a dois pontos, $w=(u,v)$ e $-w=(-u,-v)$, do plano- w e, por isso, é deno-

minada uma função multivalente formada por ramos nos quais se torna unívoca para tais valores de z . A transformação $\sqrt{z}$ do plano- z (Figura 7) para o plano- w (Figura 8) é esboçada por:

Figura 7

Figura 8

7 Função exponencial complexa

A função exponencial complexa será motivada pela função exponencial real. Temos do cálculo diferencial que a função exponencial real, $f(x)=e^x$, é definida a partir da série de McLaurin: $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots$; quando $x=1$, a série determina o número irracional $e=2,71828\dots$ conhecido como constante de Euler. Então, suporemos que a série é também válida quando substituímos o real x pelo complexo yi , apesar de não ser provado que a série da função pode ser estendida para valores complexos. Assim, temos: (I) $e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = 1 + yi + \frac{(yi)^2}{2!} + \frac{(yi)^3}{3!} + \frac{(yi)^4}{4!} + \dots$. Como sabemos, as potências de i assumem apenas quatro valores distintos dependendo da divisibilidade de seu expoente por 4, isto é, $i^{4m}=1$, $i^{4m+1}=i$, $i^{4m+2}=-1$ e $i^{4m+3}=-i$, $m \in \mathbb{Z}$. Dessa forma, obtemos $e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = 1 + yi + \frac{-y^2}{2!} + \frac{-iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} + \frac{-y^6}{6!} + \dots$ e, assim, é possível separarmos os números reais e imaginários em $e^{yi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(yi)^n}{n!} = (1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \frac{y^6}{6!} + \dots) + i(y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \dots)$, isto é, $e^{yi} = \cos y + i \sin y$, pois essas funções trigonométricas reais são dadas em termos da série de McLaurin, $\forall y \in \mathbb{R}$.

Seja $z=x+yi \in \mathbb{C}$, uma função complexa $f:\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ denomina-se função exponencial complexa se definida por $f(z)=e^z=e^x \cos y + i e^x \sin y$. Segue que a função exponencial $w=f(z)=e^z$ é definida, em coordenadas cartesianas, pelas relações: $u=e^x \cos y$ e $v=e^x \sin y$. Assim, geometricamente, para os pontos no plano- z com $x=x'$ constante, tem-se $u^2+v^2=(e^{x'})^2$ que representa o lugar geométrico dos pontos da circunferência de centro $(0,0)$ e raio $e^{x'}$ no plano- w . Ainda, para os pontos no plano- z com $y=y'$ constante, segue que $\theta \equiv y' \pmod{2\pi}$ permanecerá constante e $R=e^{x'}$ irá variar, formando semirretas com origem em $(0,0)$.

A transformação e^z do plano- z (Figura 9) para o plano- w (Figura 10) é esboçada por:

Figura 9

Figura 10

8 Função logarítmica complexa

Analogamente à função exponencial, o logaritmo de um número complexo é motivado pelo logaritmo de um número real. Seja $z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ com $z \neq 0$, $0 < r \in \mathbb{R}$ e $\arg(z) = \theta[\text{rad}]$, definimos o logaritmo neperiano ou natural de z por $\ln z = \ln r + i\theta$. Podemos inclusive perceber que quando $\theta=0$, isto é, quando z pertence ao eixo real ($z \in \mathbb{R}$), a definição se mantém válida, pois $\ln z = \ln r + i\theta \rightarrow \ln z = \ln r + i \cdot 0 \rightarrow \ln z = \ln r$.

O argumento de $z \neq 0$ pode assumir qualquer valor da forma $\theta + 2k\pi$, onde $k \in \mathbb{R}$. Assim, o logaritmo de z assumirá valores distintos, dependendo do argumento considerado. Logo, a função logarítmica complexa é uma função multivalente e, como isso é contrário à definição de função, teremos que limitar o domínio da função logarítmica em $\mathbb{C}$ de forma que o argumento de z esteja limitado a um intervalo de comprimento 2π . Analogamente ao caso da função raiz quadrada complexa, cada diferente domínio determinado para a função logarítmica a tornará univalente e será denominado ramo.

Para estudarmos a transformação gerada pela função logarítmica complexa, considere $z = re^{i\theta} \in \mathbb{C}$ e o ramo $R =]0, \infty[\times]0, 2\pi[$. Diferentemente das demais, analisaremos essa transformação a partir de circunferências e semirretas no plano- z , pois como estamos trabalhando com z no formato $z = re^{i\theta}$, quando fixamos $r=r_0$ ou $\theta=\theta_0$, temos circunferências com centro em $(0,0)$ ou semirretas com origem em $(0,0)$, respectivamente, no plano- z (Figura 11) que são transformados na malha retangular no plano- w (Figura 12).

Figura 11

Figura 12

Observe que a transformação da função logarítmica complexa é inversa à transformação da função exponencial complexa, assim como já havíamos comentado que aconteceria na subseção 2.2.

9 Função seno complexa

A função seno real é definida, inicialmente, a partir da função exponencial real, a qual, por sua vez, motiva a função exponencial complexa. Logo, para $y \in \mathbb{R}$, segue que $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ e $e^{-iy} = \cos y - i \sin y$ e, assim, $\sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}$ e $\cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}$. Portanto, a função seno complexa é definida por $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $z \in \mathbb{C}$, e também pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\sin z = \sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y, \text{ pois } \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \frac{e^{i(x+yi)} - e^{-i(x+yi)}}{2i} = \frac{e^{ix-y} - e^{-ix+y}}{2i} = \frac{e^{ix}e^{-y} - e^{-ix}e^y}{2i} = \frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) - e^y(\cos x - i \sin x)}{2i} = \cos x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2i} \right) + i \sin x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2i} \right) = \cos x \left(-\frac{e^{-y} + e^y}{2} \cdot \frac{1}{i} \right) + \sin x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2} \right) = -\cos x \frac{\sinh y}{i} + \sin x \cosh y = -\cos x \frac{\sinh y}{i} \left(\frac{-i}{-i} \right) + \sin x \cosh y = i \cos x \sinh y + \sin x \cosh y = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y.$$

Estudando a transformação gerada pela função seno complexa, seja $z = x+yi \in \mathbb{C}$, temos:

- Quando fixamos $x=x_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \sin z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo y no plano- z (Figura 13) em hipérboles no plano- w (Figura 14). De fato, considere $x=x_0$, então $\cos x=m$ e $\sin x=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\cos z = \sin(x+yi) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \sin x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = n \cdot \cosh y \Rightarrow \cosh y = \frac{u}{n} \Rightarrow \cosh^2 y = \frac{u^2}{n^2} \quad [I] \\ v = -m \cdot \sinh y \Rightarrow v^2 = m^2 \cdot \sinh^2 y \Rightarrow v^2 = m^2(\cosh^2 y - 1) \quad [II] \end{cases}$$

e, substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = m^2 \left(\frac{u^2}{n^2} - 1 \right) \Rightarrow \frac{v^2}{m^2} = \frac{u^2}{n^2} - 1 \Rightarrow \frac{u^2}{n^2} - \frac{v^2}{m^2} = 1$, isto é, a equação que descreve hipérboles.

Figura 13

Figura 14

- Quando $x=0$, segue que: $\sin z = \sin(0+yi) = \sin 0 \cosh y + i \cos 0 \sinh y = 0 \cdot \cosh y + i \cdot 1 \cdot \sinh y = i \sinh y$, isto é, $\sin z = i \sinh y$ e, como $\text{Im}(\sinh y) =]-\infty, \infty[$, o eixo y do plano- z (Figura 15) é transformado no eixo v do plano- w (Figura 16).

Figura 15

Figura 16

- Quando fixamos $y=y_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \operatorname{sen} z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo x no plano- z (Figura 17) em elipses no plano- w (Figura 18). De fato, considere $y=y_0$, então $\cosh y=m$ e $\sinh y=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\operatorname{sen}(x+yi) = \operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \sinh y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \operatorname{sen} x \cosh y \\ v = \cos x \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \operatorname{sen} x \cdot m \Rightarrow \operatorname{sen} x = \frac{u}{m} \Rightarrow \operatorname{sen}^2 x = \frac{u^2}{m^2} \quad [I] \\ v = \cos x \cdot n \Rightarrow v^2 = \cos^2 x \cdot n^2 \Rightarrow v^2 = n^2(1 - \operatorname{sen}^2 x) \quad [II] \end{cases}$$

e, substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = n^2 \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = 1 - \frac{u^2}{m^2} \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} + \frac{u^2}{m^2} = 1$, isto é, a equação que descreve elipses.

Figura 17

Figura 18

- Quando $y=0$, segue que: $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen}(x+0i) = \operatorname{sen} x \cosh 0 + i \cos x \sinh 0 = 1 \cdot \operatorname{sen} x + i \cdot \cos x \cdot 0 = \operatorname{sen} x$, isto é, $\operatorname{sen} z = \operatorname{sen} x$ e, como $\operatorname{Im}(\operatorname{sen} x)=[-1,1]$, o eixo x do plano- z (Figura 19) é transformado no segmento de reta com origem em $(-1,0)$ e extremidade em $(1,0)$ sobre o eixo u do plano- w (Figura 20).

Figura 19

Figura 20

Note que no caso em que $y=y_0$ fixo, conforme aumentamos o valor da constante y , a elipse se assemelha muito a uma circunferência. Isso ocorre por conta dos valores de $m^2=\cosh^2 y$ e $n^2=\sinh^2 y$ que passam a ser quase equivalentes para y tendendo ao infinito e, assim, as imagens das funções $\cosh^2 x$ e $\sinh^2 x$ assumem valores muito próximos conforme x tende ao infinito. Veja a figura 21:

Figura 21

10 Função cosseno complexa

Como já explicado na seção 9, a função cosseno complexa é definida por $\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, e também pode ser escrita da seguinte maneira: $\cos z = \cos(x+yi) = \cos x \cosh y - i \sinh x \sinh y$, pois
$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = \frac{e^{i(x+yi)}+e^{-i(x+yi)}}{2} = \frac{e^{ix-y}+e^{-ix+y}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y}+e^{-ix}e^y}{2} =$$

$$\frac{e^{-y}(\cos x + i \sin x) + e^y(\cos x - i \sin x)}{2} = \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2} \right) + i \sin x \left(\frac{e^{-y} - e^y}{2} \right) = \cos x \left(\frac{e^{-y} + e^y}{2} \right) + i \sin x \left(-\frac{e^{-y} - e^y}{2} \right) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y.$$

Estudando a transformação gerada pela função cosseno complexa, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

- Quando fixamos $x = x_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \cos z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo y no plano- z (Figura 22) em hipérboles no plano- w (Figura 23). De fato, considere $x = x_0$, então $\cos x = m$ e $\sin x = n$, com m e n constantes reais. Segue de $\cos z = \cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = -\sin x \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = m \cdot \cosh y \Rightarrow \cosh y = \frac{u}{m} \Rightarrow \cosh^2 y = \frac{u^2}{m^2} [I] \\ v = -n \cdot \sinh y \Rightarrow v^2 = n^2 \cdot \sinh^2 y \Rightarrow v^2 = n^2 (\cosh^2 y - 1) [II] \end{cases}$$

e, substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = n^2 \left(\frac{u^2}{m^2} - 1 \right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = \frac{u^2}{m^2} - 1 \Rightarrow \frac{u^2}{m^2} - \frac{v^2}{n^2} = 1$, isto é, a equação que descreve hipérboles.

Figura 22

Figura 23

- Quando $x = 0$, segue que: $\cos z = \cos(0 + yi) = \cos 0 \cdot \cosh y - i \sin 0 \cdot \sinh y = 1 \cdot \cosh y - i \cdot 0 \cdot \sinh y = \cosh y - 0 = \cosh y$, isto é, $\cos z = \cosh y$ e, como $\text{Im}(\cosh y) = [1, \infty]$, o eixo y do plano- z (Figura 24) é transformado na semirreta positiva com origem em $(1, 0)$ sobre o eixo u do plano- w (Figura 25).

Figura 24

Figura 25

- Quando fixamos $y = y_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \cos z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo x no plano- z (Figura 26) em elipses no plano- w (Figura 27). De fato, considere $y = y_0$, então $\cosh y = m$ e $\sinh y = n$, com m e n constantes reais. Segue de $\cos z = \cos(x + yi) = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \cos x \cosh y \\ v = -\sin x \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \cos x \cdot m \Rightarrow \cos x = \frac{u}{m} \Rightarrow \cos^2 x = \frac{u^2}{m^2} [I] \\ v = -\sin x \cdot n \Rightarrow v^2 = \sin^2 x \cdot n^2 \Rightarrow v^2 = n^2(1 - \cos^2 x) [II] \end{cases} \quad e,$$

substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = n^2 \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = 1 - \frac{u^2}{m^2} \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} + \frac{u^2}{m^2} = 1$, isto é, a equação que descreve elipses.

Figura 26

Figura 27

- Quando $y=0$, segue que: $\cos z = \cos(x+0i) = \cos x \cdot \cosh 0 - i \sin x \cdot \sinh 0 = 1 \cos x - i \sin x \cdot 0 = \cos x - 0 = \cos x$, isto é, $\cos z = \cos x$ e, como $\text{Im}(\cos x) = [-1, 1]$, o eixo x do plano- z (Figura 28) é transformado no segmento de reta com origem em $(-1, 0)$ e extremidade em $(1, 0)$ sobre o eixo u do plano- w (Figura 29).

Figura 28

Figura 29

Note que, assim como na função seno hiperbólica, no caso em que $y=y_0$ fixo, conforme aumentamos o valor da constante y , a elipse se assemelha muito a uma circunferência. Isso ocorre por conta dos valores de $m^2 = \cosh^2 y$ e $n^2 = \sinh^2 y$ que passam a ser quase equivalentes para y que tende ao infinito. Veja, na Figura 21, que as imagens das funções $\cosh^2 x$ e $\sinh^2 x$ assumem valores muito próximos conforme x tende ao infinito.

11 Função tangente complexa

Assim como a função tangente real, a função tangente complexa é definida a partir das funções seno e coseno complexa da seguinte maneira: $tg z = \frac{\sen z}{\cos z}$, $z \in \mathbb{C}$, $\cos z \neq 0$. Portanto, $tgz =$

$$\frac{\text{sen} z}{\cos z} = \frac{\text{sen} x \cosh y + i \cos x \text{sen} y}{\cos x \cosh y - i \text{sen} x \text{sen} y} = \frac{\text{sen} x \cosh y + i \cos x \text{sen} y}{\cos x \cosh y - i \text{sen} x \text{sen} y} \cdot \frac{(\cos x \cosh y + i \text{sen} x \text{sen} y)}{(\cos x \cosh y + i \text{sen} x \text{sen} y)} =$$

$$\frac{\text{sen} x \cosh y + i \text{sen} y \cosh x}{\cosh^2 y - \text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen} 2x + i \text{sen} 2y}{2 \cosh^2 y - 2 \text{sen}^2 x + 1 - 1} = \frac{\text{sen} 2x + i \text{sen} 2y}{2 \cosh^2 y - 2 \text{sen}^2 x} \Rightarrow \text{tg} z = \frac{\text{sen} 2x + i \text{sen} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}.$$

Estudando a transformação gerada pela função cosseno complexa, seja $z = x + yi \in \mathbb{C}$, temos:

- Quando fixamos $x = x_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \text{tg} z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo y no plano- z (Figura 30) em arcos de circunferências no plano- w (Figura 31). De fato, considere $x = x_0$, então $\cos 2x = m$ e $\text{sen} 2x = n$, com m e n

constantes reais. Segue de $\text{tg} z = \frac{\text{sen} 2x + i \text{sen} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$, o sistema de equações
$$\begin{cases} u = \frac{\text{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \\ v = \frac{\text{sen} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} u = \frac{n}{m + \cosh 2y} & [I] \\ v = \frac{\text{sen} 2y}{m + \cosh 2y} & [II] \end{cases} ; \text{ de } [I] \quad u = \frac{n}{m + \cosh 2y} \Rightarrow m + \cosh 2y = \frac{n}{u} \Rightarrow \cosh 2y = \frac{n}{u} - m \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cosh^2 2y = \left(\frac{n}{u} - m\right)^2 \\ \cosh 2y + m = \frac{n}{u} \Rightarrow (\cosh 2y + m)^2 = \left(\frac{n}{u}\right)^2 = \frac{n^2}{u^2} \end{cases} \text{ e de } [II] \quad v = \frac{\text{sen} 2y}{m + \cosh 2y} \Rightarrow v(m + \cosh 2y) = \text{sen} 2y \Rightarrow v^2(m + \cosh 2y)^2 = \text{sen}^2 2y \Rightarrow v^2(m + \cosh 2y)^2 = \cosh^2 2y - 1.$$

1. Substituindo [I] em [II], temos que $v^2(m + \cosh 2y)^2 = \cosh^2 2y - 1 \Rightarrow v^2 \frac{n^2}{u^2} = \left(\frac{n}{u} - m\right)^2 - 1 \Rightarrow v^2 n^2 = \left(\left(\frac{n}{u} - m\right)^2 - 1\right) u^2 = \left(\frac{n^2}{u^2} - 2 \frac{n}{u} m + m^2 - 1\right) u^2 = n^2 - 2nm u + (m^2 - 1)u^2 = n^2 - 2nm u - n^2 u^2 \Rightarrow v^2 = 1 - 2 \frac{mu}{n} - u^2 \Rightarrow v^2 + u^2 + 2 \frac{mu}{n} = 1 \Rightarrow v^2 + u^2 + 2 \frac{mu}{n} - \frac{m^2}{n^2} + \frac{m^2}{n^2} = 1 \Rightarrow v^2 + \left(u + \frac{m}{n}\right)^2 = 1 + \frac{m^2}{n^2}$ isto é, a equação que descreve circunferências.

Figura 30

Figura 31

- Quando $x = 0$, segue que: $\text{tg} z = \frac{\text{sen} x \cosh y + i \cos x \text{sen} y}{\cos x \cosh y - i \text{sen} x \text{sen} y} = \frac{\text{sen} 0 \cosh y + i \cos 0 \text{sen} y}{\cos 0 \cosh y - i \text{sen} 0 \text{sen} y} = \frac{i \text{sen} y}{\cosh y} = i \text{tgh} y$, isto é, $\text{tg} z = \text{tgh} y$ e, como $\text{Im}(\text{tgh} y) = [-1, 1]$, o eixo y do plano- z (Figura 32) é transformado no segmento de reta com origem em $(0, -1)$ e extremidade em $(0, 1)$ sobre o eixo v do plano- w (Figura 33).

Figura 32

Figura 33

- Quando fixamos $y=y_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \operatorname{tg} z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo x no plano- z (Figura 34) em circunferências no plano- w (Figura 35). De fato, considere $y=y_0$, então $\cosh 2y=m$ e $\sinh 2y=n$, com m e n cons-

tantes reais. Segue de $\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} 2x + i \operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y}$, o sistema de equações $\begin{cases} u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + \cosh 2y} \\ v = \frac{\operatorname{senh} 2y}{\cos 2x + \cosh 2y} \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + m} & [I] \\ v = \frac{n}{\cos 2x + m} & [II] \end{cases} ; \quad \text{de} \quad [II] \quad v = \frac{n}{\cos 2x + m} \Rightarrow \cos 2x + m = \frac{n}{v} \Rightarrow \cos 2x = \frac{n}{v} - m \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \cos^2 2x = \left(\frac{n}{v} - m\right)^2 \\ \cos 2x + m = \frac{n}{v} \Rightarrow (\cos 2x + m)^2 = \left(\frac{n}{v}\right)^2 = \frac{n^2}{v^2} \end{cases} \text{ e de [I]} \quad u = \frac{\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x + m} \Rightarrow u(\cos 2x + m) =$$

$$\operatorname{sen} 2x \Rightarrow u^2(\cos 2x + m)^2 = \operatorname{sen}^2 2x \Rightarrow u^2(\cos 2x + m)^2 = 1 - \cos^2 2x. \text{ Substituindo [II]}$$

$$\text{em [I], temos que } u^2(\cos 2x + m)^2 = 1 - \cos^2 2x \Rightarrow u^2 \frac{n^2}{v^2} = 1 - \left(\frac{n}{v} - m\right)^2 \Rightarrow u^2 n^2 =$$

$$\left(1 - \left(\frac{n}{v} - m\right)^2\right) v^2 = \left(1 - \frac{n^2}{v^2} + 2m \frac{n}{v} - m^2\right) v^2 = v^2 - n^2 + 2mnv - m^2 v^2 =$$

$$(1 - m^2) v^2 - n^2 + 2mnv \Rightarrow n^2 u^2 = -n^2 v^2 - n^2 + 2mnv \Rightarrow u^2 = -v^2 - 1 + \frac{2mv}{n} =$$

$$u^2 + v^2 - \frac{2mv}{n} = -1 \Rightarrow u^2 + v^2 - \frac{2mv}{n} + \frac{m^2}{2} - \frac{m^2}{2} = -1 \Rightarrow u^2 + \left(v - \frac{m}{n}\right)^2 = -1 + \frac{m^2}{2} \quad \text{isto}$$

é, a equação que descreve circunferências.

Figura 34

Figura 35

- Quando $y=0$, segue que: $tgz = \frac{\operatorname{sen} x \cosh y + i \cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cosh y - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y} = \frac{\operatorname{sen} x \cosh 0 + i \cos x \operatorname{sen} 0}{\cos x \cosh 0 - i \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 0} = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \operatorname{tg} x$, isto é, $\operatorname{tg} z = \operatorname{tg} x$ e, como $\operatorname{Im}(\operatorname{tg} x) =]-\infty, \infty[$, o eixo x do plano- z (Figura 36) é transformado no eixo u do plano- w (Figura 37).

Figura 36

Figura 37

12 Função seno hiperbólica complexa

A função seno hiperbólica real é também definida, inicialmente, a partir da função exponencial real, a qual, por sua vez, motiva a função exponencial complexa. Portanto, a função seno hiperbólica complexa é definida por $\operatorname{senh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, e também pode ser escrita da seguinte maneira: $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+yi) = \operatorname{senh} x \cosh y + i \cosh x \operatorname{sen} y$.

Estudando a transformação gerada pela função seno hiperbólica complexa, seja $z=x+yi \in \mathbb{C}$, temos:

- Quando fixamos $x=x_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \operatorname{senh} z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo y no plano- z (Figura 38) em elipses no plano- w (Figura 39). De fato, considere $x=x_0$, então $\cosh x=m$ e $\operatorname{senh} x=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\operatorname{senh} z = \operatorname{senh}(x+yi) = \operatorname{senh} x \cosh y + i \cosh x \operatorname{sen} y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \operatorname{senh} x \cosh y \\ v = \cosh x \operatorname{sen} y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = n \cdot \cosh y \Rightarrow \cosh y = \frac{u}{n} \Rightarrow \cosh^2 y = \frac{u^2}{n^2} \quad [I] \\ v = m \cdot \operatorname{sen} y \Rightarrow v^2 = m^2 \cdot \operatorname{sen}^2 y \Rightarrow v^2 = m^2(1 - \cosh^2 y) \quad [II] \end{cases} \quad e,$$

substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = m^2 \left(1 - \frac{u^2}{n^2}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{m^2} = 1 - \frac{u^2}{n^2} \Rightarrow \frac{v^2}{m^2} + \frac{u^2}{n^2} = 1$, isto é, a equação que descreve elipses.

Figura 38

Figura 39

- Quando $x=0$, segue que: $\sinh z = \sinh(0+yi) = \sinh 0 \cosh y + i \cosh 0 \sinh y = 0 \cdot \cosh y + i \cdot 1 \cdot \sinh y = i \sinh y$, isto é, $\sinh z = i \sinh y$ e, como $\text{Im}(\sinh y) = [-1, 1]$, o eixo y do plano- z (Figura 40) é transformado no segmento de reta com origem em $(0, -1)$ e extremidade em $(0, 1)$ sobre o eixo v do plano- w (Figura 41).

Figura 40

Figura 41

- Quando fixamos $y=y_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \sinh z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo x no plano- z (Figura 42) em hipérboles no plano- w (Figura 43). De fato, considere $y=y_0$, então $\cosh y=m$ e $\sinh y=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\sinh z = \sinh(x+yi) = \sinh x \cosh y + i \cosh x \sinh y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \sinh x \cosh y \\ v = \cosh x \sinh y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \sinh x \cdot m \Rightarrow \sinh x = \frac{u}{m} \Rightarrow \sinh^2 x = \frac{u^2}{m^2} [I] \\ v = \cosh x \cdot n \Rightarrow v^2 = \cosh^2 x \cdot n^2 \Rightarrow v^2 = n^2(\sinh^2 x + 1) [II] \end{cases} \text{ e,}$$

substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = n^2 \left(\frac{u^2}{m^2} + 1 \right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = \frac{u^2}{m^2} + 1 \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} - \frac{u^2}{m^2} = 1$, isto é, a equação que descreve hipérboles.

Figura 42

Figura 43

- Quando $y=0$, segue que: $\sinh z = \sinh(x+0i) = \sinh x \cos 0 + i \cosh x \sin 0 = \sinh x \cdot 1 + i \cdot \cosh x \cdot 0 = \sinh x$, isto é, $\sinh z = \sinh x$ e, como $\text{Im}(\sinh x) =]-\infty, \infty[$, o eixo x do plano- z (Figura 44) é transformado no eixo u do plano- w (Figura 45).

Figura 44

Figura 45

Note que, assim como na função seno hiperbólica, no caso em que $x=x_0$ fixo, conforme aumentamos o valor da constante y , a elipse se assemelha muito a uma circunferência. Isso ocorre por conta dos valores de $m^2 = \cosh^2 y$ e $n^2 = \sinh^2 y$ que passam a ser quase equivalentes para y tendendo ao infinito. Veja, na Figura 21, que as imagens das funções $\cosh^2 x$ e $\sinh^2 x$ assumem valores muito próximos conforme x tende ao infinito.

13 Função cosseno hiperbólica complexa

A função cosseno hiperbólica real é também definida, inicialmente, a partir da função exponencial real, a qual, por sua vez, motiva a função exponencial complexa. Portanto, a função cosseno hiperbólica complexa é definida por $\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}$, $z \in \mathbb{C}$, e também pode ser escrita da seguinte maneira: $\cosh z = \cosh(x+yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sin y$.

Estudando a transformação gerada pela função cosseno hiperbólica complexa, seja $z=x+yi \in \mathbb{C}$, temos:

- Quando fixamos $x=x_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \cosh z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo y no plano- z (Figura 46) em elipses no pla-

no- w (Figura 47). De fato, considere $x=x_0$, então $\cosh x=m$ e $\sinh x=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\cosh z = \cosh(x+yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sen y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \cosh x \cos y \\ v = \sinh x \sen y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = m \cdot \cos y \Rightarrow \cos y = \frac{u}{m} \Rightarrow \cos^2 y = \frac{u^2}{m^2} [I] \\ v = n \cdot \sen y \Rightarrow v^2 = n^2 \cdot \sen^2 y \Rightarrow v^2 = n^2(1 - \cos^2 y) [II] \end{cases} \quad \text{e, substituindo [I] em [II], temos que } v^2 = n^2 \left(1 - \frac{u^2}{m^2}\right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = 1 - \frac{u^2}{m^2} \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} + \frac{u^2}{m^2} = 1, \text{ isto é, a equação que descreve elipses.}$$

Figura 46

Figura 47

- Quando $x=0$, segue que: $\cosh z = \cosh(0+yi) = \cosh 0 \cos y + i \sinh 0 \sen y$ $\cosh z = 1 \cdot \cos y + i \cdot 0 \cdot \sen y = \cos y$, isto é, $\cosh z = \cos y$ e, como $\text{Im}(\cos y)=[-1,1]$, o eixo y do plano- z (Figura 48) é transformado no segmento de reta com origem em $(-1,0)$ e extremidade em $(1,0)$ sobre o eixo u do plano- w (Figura 49).

Figura 48

Figura 49

- Quando fixamos $y=y_0$ um valor constante diferente de zero, a função complexa $f(z) = \cosh z$ transforma retas verticais paralelas ao eixo x no plano- z (Figura 50) em hipérbolas no plano- w (Figura 51). De fato, considere $y=y_0$, então $\cos y=m$ e $\sen y=n$, com m e n constantes reais. Segue de $\cosh z = \cosh(x+yi) = \cosh x \cos y + i \sinh x \sen y$, o sistema de equações

$$\begin{cases} u = \cosh x \cos y \\ v = \sinh x \sen y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u = \cosh x \cdot m \Rightarrow \cosh x = \frac{u}{m} \Rightarrow \cosh^2 x = \frac{u^2}{m^2} [I] \\ v = \sinh x \cdot n \Rightarrow v^2 = \sinh^2 x \cdot n^2 \Rightarrow v^2 = n^2(\cosh^2 x - 1) [II] \end{cases} \quad \text{e,}$$

substituindo [I] em [II], temos que $v^2 = n^2 \left(\frac{u^2}{m^2} - 1 \right) \Rightarrow \frac{v^2}{n^2} = \frac{u^2}{m^2} - 1 \Rightarrow \frac{u^2}{m^2} - \frac{v^2}{n^2} = 1$, isto é, a equação que descreve hipérboles.

Figura 50

Figura 51

- Quando $y=0$, segue que: $\cosh z = \cosh(x+0i) = \cosh x \cos 0 + i \sinh x \sin 0 = \cosh x \cdot 1 + i \cdot \sinh x \cdot 0 = \cosh x$, isto é, $\cosh z = \cosh x$ e, como $\text{Im}(\cosh x) = [1, \infty[$, o eixo x do plano- z (Figura 52) é transformado na semirreta com origem em $(1,0)$ sobre o eixo u do plano- w (Figura 53).

Figura 52

Figura 53

Note que, assim como na função seno hiperbólica, no caso em que $x=x_0$ fixo, conforme aumentamos o valor da constante y , a elipse se assemelha muito a uma circunferência. Isso ocorre por conta dos valores de $m^2 = \cosh^2 y$ e $n^2 = \sinh^2 y$ que passam a ser quase equivalentes para y tendendo ao infinito. Veja, na Figura 21, que as imagens das funções $\cosh^2 x$ e $\sinh^2 x$ assumem valores muito próximos conforme x tende ao infinito.

14 Referências

BOYER, C. B.; MERZBACH, U. C. **História da matemática**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012.

FERNANDEZ, C. S. **Estudo de algumas funções complexas de uma variável complexa: aspectos algébricos e geométricos**. 2011. Disponível em: <http://emis.impa.br/EMIS/journals/em/docs/coloquios/SE-1.03.pdf>. Acesso em: 16 nov. 2020.

PIANOSCHI, T. A. **Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra**. 2013. 91 f. Dissertação (Mestrado em Matemática Universitária) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2013. Disponível em: https://repositorio.unesp.br/bitstream/handle/11449/94346/pianoschi_ta_me_rcla.pdf;jsessionid=4EAB800184E89371D3D504AB574A4FF2?sequence=1. Acesso em: 12 out. 2020.

PINHEIRO, R. B. **Números complexos: alguns aspectos algébricos e geométricos**. 2013. 76 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal do Maranhão, São Luís, 2013. Disponível em: <https://silو.tips/download/numeros-complexos-alguns-aspectos-algebricos-e-geometricos>. Acesso em: 22 set. 2020.