**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020
Edição Iniciação Científica

Lucas Ozaki Mizuguti

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
lucas.ozakimizuguti@gmail.com

Suzete Maria Silva Afonso

Instituto de Geociências e Ciências
Exatas
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
s.afonso@unesp.br

Demonstrações de resultados clássicos de análise no $\mathbb{R}^n$ utilizando a teoria do grau

Proofs of classic results of analysis in $\mathbb{R}^n$ using degree theory

Resumo

Este trabalho tem como objetivo apresentar de forma detalhada provas de resultados clássicos de análise no $\mathbb{R}^n$ utilizando a teoria do grau de Brouwer, como o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema de Perron-Frobenius. Além disso, mostraremos que sob determinadas condições uma aplicação contínua é sempre sobrejetiva e discutiremos sobre a influência da derivada na preservação da orientação de aplicações contínuas e injetoras.

Palavras-chave: Análise no $\mathbb{R}^n$. Topologia Geral. Teoria do Grau de Brouwer. Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Teorema de Perron-Frobenius.

Abstract

This paper aims to provide detailed proofs of classic results of analysis in $\mathbb{R}^n$ using the Brouwer degree theory, such as the Brouwer Fixed Point Theorem and Perron-Frobenius Theorem. Moreover, we will show that under certain conditions a continuous mapping is always surjective and discuss the influence of the derivative in preserving the orientation of continuous and injective mappings.

Keywords: Analysis in $\mathbb{R}^n$. General Topology. Brouwer Degree Theory. Brouwer Fixed Point Theorem. Perron-Frobenius Theorem.

1 Introdução

Quando trabalhamos com o espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$, $n > 1$, observamos duas diferenças principais com relação ao espaço euclidiano unidimensional $\mathbb{R}$. A primeira diz respeito à topologia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, que se torna muito mais complexa quando consideramos $n > 1$. A segunda trata da importância de conceitos da Álgebra Linear, visto que tanto seu vocabulário quanto seus resultados são de grande importância para a prova de resultados envolvendo funções de n variáveis.

Neste trabalho, apresentaremos provas de resultados conhecidos de análise no $\mathbb{R}^n$ desenvolvidas com o uso da teoria do grau topológico de Brouwer, tais como as provas do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e do Teorema de Perron-Frobenius. Além disso, mostraremos que sob determinadas condições, podemos garantir que uma aplicação contínua de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ é sobrejetiva e discorreremos sobre como a derivada influencia na orientação de uma aplicação contínua e injetora.

Dividimos este artigo em três seções. Na primeira seção, apresentamos resultados e definições preliminares de análise e topologia que serão úteis ao longo do texto. Na segunda seção, fornecemos uma breve introdução à teoria do grau de Brouwer e listamos as principais propriedades do grau que utilizaremos nas provas de resultados de análise no $\mathbb{R}^n$ já anteriormente citados, que serão finalmente exibidas na terceira seção.

2 Preliminares

Nesta seção, apresentaremos definições e resultados preliminares de análise e topologia geral que auxiliarão o leitor a compreender melhor a teoria desenvolvida no artigo. Tais definições e resultados podem ser encontrados em [1], [2] e [3].

Definição 1 *Sejam duas aplicações contínuas $f, g: X \rightarrow Y$ entre espaços topológicos. Dizemos que f e g são homotópicas se existe uma aplicação contínua $H: X \times [0, 1] \rightarrow Y$, chamada de homotopia, tal que $H(x, 0) = f(x)$ e $H(x, 1) = g(x)$ para todo $x \in X$.*

Teorema 2 (Teorema da Aplicação Inversa) *Seja $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k ($k \geq 1$) definida no aberto U de $\mathbb{R}^n$, ou seja, f é diferenciável e possui todas as suas derivadas até ordem k , sendo as derivadas aplicações contínuas definidas em U . Se $a \in U$ é tal que $f'(a): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é invertível, então existe uma bola aberta $B = B(a, \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto V que contém $f(a)$.*

Teorema 3 (Teorema de Sard) *Sejam U um aberto de $\mathbb{R}^n$, $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe $C^1(U, \mathbb{R}^n)$ e $S = \{x \in U : J_f(x) = 0\}$. Então, $f(S)$ é um conjunto de medida nula.*

Teorema 4 (Teorema de Borel - Lebesgue) *Seja $K \subset \mathbb{R}^n$ um compacto. Toda cobertura aberta de $K \subset \bigcup_{\lambda \in L} A_\lambda$ admite uma subcobertura finita $K \subset A_{\lambda_1} \cup A_{\lambda_2} \cup \dots \cup A_{\lambda_l}$.*

Teorema 5 (Teorema de Aproximação de Weierstrass) *Dada uma função contínua $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, existe uma sequência de polinômios $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = f$ uniformemente em $[a, b]$.*

Proposição 6 *Se $X \subset \mathbb{R}^n$ é conexo e $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ é contínua, então $f(X)$ é conexo.*

3 O grau de Brouwer

Nesta seção apresentaremos o conceito e as principais propriedades do grau de Brouwer para aplicações continuamente diferenciáveis (de classe C^1 - veja a descrição a seguir) e para aplicações contínuas. A teoria exibida aqui foi extraída das referências [4], [5], [6] e [7].

Consideraremos $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um subconjunto aberto e limitado de $\mathbb{R}^n$ e $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das aplicações $\varphi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ k -vezes diferenciáveis em $\overline{\Omega}$, ou seja, φ e todas as suas derivadas até a ordem k são contínuas em $\overline{\Omega}$. O símbolo $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ denotará o espaço das aplicações contínuas $\varphi: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$. Consideraremos o espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ munido com a norma $\|\cdot\|_k: C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\varphi \in C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_k = \max_{0 \leq j \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|D^j \varphi(x)\|,$$

onde $D^j \varphi$ representa a derivada de ordem j de φ e $\|\cdot\|$ é uma norma em $\mathbb{R}^n$, e consideraremos o espaço $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ munido com a norma $\|\cdot\|_\infty: C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}_+$ definida por

$$\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} \|\varphi(x)\|.$$

Sejam $S = \{x \in \Omega : J_\varphi(x) = 0\}$, onde J_φ representa o determinante da matriz jacobiana de φ , e $b \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S), \quad (1)$$

onde $\partial\Omega$ denota a fronteira de Ω .

Observe que se $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, então $J_\varphi(x) \neq 0$ por (1). Assim, $\varphi'(x)$ é invertível e o Teorema da Aplicação Inversa garante que φ é um difeomorfismo de uma vizinhança U_x de x sobre uma vizinhança V_b de b , ou seja, $\varphi|_{U_x}: U_x \rightarrow \varphi(U_x) = V_b$ é um difeomorfismo.

Proposição 7 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $S = \{x \in \Omega : J_\varphi(x) = 0\}$. Se $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, então o conjunto $\varphi^{-1}(\{b\})$ é finito e compacto.*

Demonstração. Primeiramente, mostremos que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é compacto. Com efeito, sabemos que Ω é limitado e, portanto, $\overline{\Omega}$ também é limitado. Como $\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n$, segue que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é limitado. Além disso, temos que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é fechado, visto que φ é contínua e $\{b\}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{R}^n$. Portanto, $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um conjunto compacto.

Agora, para cada $x \in \varphi^{-1}(\{b\})$, considere a bola aberta de centro x e raio $r_x > 0$, $B_{r_x}(x) \subset U_x$. Assim,

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j).$$

Dessa forma, como cada bola aberta $B_{r_j}(x_j)$ é um conjunto aberto,

$$\bigcup_{x_j \in \varphi^{-1}(\{b\})} B_{r_j}(x_j) \text{ é uma cobertura para o compacto } \varphi^{-1}(\{b\}),$$

constituída por conjuntos abertos. Logo, o Teorema de Borel - Lebesgue (Teorema 4) garante que $\varphi^{-1}(\{b\})$ admite um subcobertura finita, digamos

$$\varphi^{-1}(\{b\}) \subset \bigcup_{j=1}^k B_{r_j}(x_j).$$

Sabendo que $\varphi|_{U_{x_j}} : U_{x_j} \rightarrow \varphi(U_{x_j})$ é um difeomorfismo para cada j , concluímos que

$$\varphi^{-1}(\{b\}) = \{x_1, x_2, \dots, x_k\},$$

de onde segue que $\varphi^{-1}(\{b\})$ é um conjunto finito. Isso completa a prova. $\square$

A seguir, apresentaremos a definição do grau topológico de Brouwer. Convém mencionarmos que essa definição é apresentada na literatura como caso regular do grau de Brouwer.

Definição 8 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Definimos o grau topológico de Brouwer da aplicação φ em relação a Ω no ponto b como sendo o número inteiro*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i)), \quad (2)$$

onde sgn é a função sinal, dada por:

$$\begin{aligned} \text{sgn} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ t &\longmapsto \text{sgn}(t) = \begin{cases} 1, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t = 0, \\ -1, & \text{se } t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Ainda, dizemos que $d(\varphi, \Omega, b) = 0$ se $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$.

Observação 9 *Pela definição do grau topológico de Brouwer, a seguinte igualdade é válida:*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Com efeito, note que

$$\varphi(x) = b \Leftrightarrow \varphi(x) - b = 0.$$

Considere $\varphi - b = \psi$. Assim, $\psi^{-1}(\{0\}) = \varphi^{-1}(\{b\})$, donde temos

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\psi, \Omega, 0).$$

Ainda, pela definição de grau para $d(\varphi, \Omega, b)$ e $d(\varphi - b, \Omega, 0)$, temos

$$d(\varphi, \Omega, b) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) \quad \text{e} \quad d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} \text{sgn}(J_\psi(\eta_i)).$$

Pela definição de ψ , segue que se $\psi(\eta_i) = 0$ então $\varphi(\eta_i) - b = 0$. Assim, supondo que $\psi(\eta_i) = 0$, tem-se que isto acontece se, e somente se, $\varphi(\eta_i) = b$. De fato,

$$\psi(\eta_i) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) - b = 0 \Leftrightarrow \varphi(\eta_i) = b.$$

Logo, a quantidade de elementos dos somatórios

$$\sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) \quad \text{e} \quad \sum_{\eta_i \in \psi^{-1}(\{0\})} \text{sgn}(J_\psi(\eta_i))$$

deve ser igual.

Daí deduzimos que $\xi_i = \eta_i$. Com isso, temos

$$d(\psi, \Omega, 0) = \sum_{\xi_i \in \varphi^{-1}(\{b\})} \text{sgn}(J_\varphi(\xi_i)) = d(\varphi, \Omega, b).$$

Portanto, como $\psi = \varphi - b$, concluimos que

$$d(\varphi - b, \Omega, 0) = d(\varphi, \Omega, b).$$

O próximo lema atesta que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$. Para verificar sua prova, o leitor pode consultar [4].

Lema 10 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança U de φ na topologia de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que para todo $\psi \in U$, temos que:*

- (i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
- (ii) $x \in \psi^{-1}(\{b\}) \Rightarrow J_\psi(x) \neq 0$;
- (iii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Agora, enunciaremos resultados sobre o grau topológico de Brouwer para aplicações diferenciáveis. Observamos que as provas desses resultados serão omitidas aqui por serem extensas e por estarem bem detalhadas na literatura existente sobre o grau de Brouwer. O leitor interessado pode consultar [4] e [6] para analisar tais provas.

Lema 11 *Sejam $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$, tem-se*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Lema 12 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, tem-se*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

Apesar dos Lemas 11 e 12 serem similares, o mesmo não pode ser dito de suas demonstrações. No Lema 11, temos uma aplicação de classe C^1 e pontos que estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S)$. Já no Lema 12, temos uma aplicação de classe C^2 e pontos que estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$.

Ancorados pelos resultados acima, podemos estender a definição do grau de Brouwer, onde consideramos $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e calculamos o grau de φ com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$.

Definição 13 *Sejam $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e b um ponto de $\mathbb{R}^n$ tal que $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $b \in \varphi(S)$. Considere C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$ que contém b . Sendo C_b um aberto não vazio, existe $x \in C_b \setminus \varphi(S)$. Portanto, definimos*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, x), \quad \forall x \in C_b \setminus \varphi(S).$$

A afirmação de que existe $x \in C_b \setminus \varphi(S)$ segue em razão do Teorema de Sard, visto que $\varphi(S)$ tem medida nula.

Lema 14 Para $\varphi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, existe uma vizinhança U de φ na topologia de $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que, para toda $\psi \in U$, vale:

- (i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
- (ii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Para transformações lineares invertíveis, é possível deduzir a propriedade do grau enunciada a seguir, uma vez que são suaves e todos os valores de uma transformação linear invertível são regulares.

Proposição 15 Se $A: \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma transformação linear tal que $\det A \neq 0$, e $0 \in \Omega$, então $d(\varphi, \Omega, 0) = \text{sgn } \det A$.

A próxima proposição é conhecida como propriedade da invariância do grau de Brouwer por homotopia de classe C^2 .

Proposição 16 (Invariância por Homotopia de Classe C^2) Se $H \in C^2(\overline{\Omega} \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$ e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então

$$d(H(\cdot, t_1), \Omega, b) = d(H(\cdot, t_2), \Omega, b),$$

para quaisquer $t_1, t_2 \in [0, 1]$.

3.1 Propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas

Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $b \notin \varphi(\partial\Omega)$ e $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\} = \inf_{x \in \partial\Omega} \|b - x\| > 0$. Sabemos que $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ pelo Teorema de Aproximação de Weierstrass (veja Teorema 5). Então, existe $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2}$, donde $b \notin \psi(\partial\Omega)$ e o grau $d(\psi, \Omega, b)$ está bem definido.

Com efeito, seja

$$U = \left\{ \psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n) : \|\psi - \varphi\|_\infty < \frac{r}{2} \right\}. \quad (3)$$

Afirmamos que

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b), \quad \forall \psi_1, \psi_2 \in U. \quad (4)$$

De fato, definamos a seguinte homotopia

$$\begin{aligned} H: \overline{\Omega} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (x, t) &\mapsto H(x, t) = t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x). \end{aligned}$$

Afirmamos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. De fato, para $x \in \overline{\Omega}$ e para cada $t \in [0, 1]$, tem-se

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| = \|t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1 - t)\varphi(x)\|,$$

donde segue que

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| = \|t(\psi_1(x) - \varphi(x)) + (1 - t)(\psi_2(x) - \varphi(x))\|.$$

Portanto,

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| \leq t\|\psi_1(x) - \varphi(x)\| + (1 - t)\|\psi_2(x) - \varphi(x)\|, \quad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Mas, como

$$\|\psi_1(x) - \varphi(x)\| \leq \|\psi_1 - \varphi\|_\infty \quad \text{e} \quad \|\psi_2(x) - \varphi(x)\| \leq \|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \quad \forall x \in \overline{\Omega},$$

obtemos

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - \varphi(x)\| &\leq t\|\psi_1 - \varphi\|_\infty + (1 - t)\|\psi_2 - \varphi\|_\infty, \\ &< t\frac{r}{2} + (1 - t)\frac{r}{2}, \quad \forall x \in \overline{\Omega}, \end{aligned}$$

donde segue que

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| < \frac{r}{2}.$$

Logo,

$$b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1]),$$

pois caso contrário, existiriam $x_0 \in \partial\Omega$ e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = b$ e

$$\|H(x_0, t_0) - \varphi(x_0)\| < \frac{r}{2},$$

ou seja,

$$\|b - \varphi(x_0)\| < \frac{r}{2}.$$

Mas, isso é um absurdo, pois sendo $r = \rho\{b, \varphi(\partial\Omega)\}$, temos

$$\|b - \varphi(x)\| \geq r, \quad \forall x \in \partial\Omega.$$

Portanto, como $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, segue pela Proposição 16 que

$$d(H(\cdot, 0), \Omega, b) = d(H(\cdot, 1), \Omega, b),$$

ou seja,

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b).$$

Com isso, podemos definir o grau topológico de Brouwer para aplicações contínuas.

Definição 17 Definimos o grau topológico de Brouwer para $\varphi \in C(\Omega, \mathbb{R}^n)$ com $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, como sendo

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \quad \forall \psi \in U,$$

onde U é a vizinhança de φ dada em (3).

O próximo resultado generaliza o resultado descrito na Observação 9.

Proposição 18 Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Então,

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi - b, \Omega, 0).$$

Podemos agora enunciar as principais propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas. O leitor pode consultar as referências [4] e [5] para verificar as provas das propriedades descritas abaixo, que serão apenas enunciadas.

Propriedade 19 (Normalização) *Seja I a aplicação identidade de $\overline{\Omega}$ em $\mathbb{R}^n$, $I(x) = x$ para $x \in \overline{\Omega}$. Então,*

$$d(I, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega, \\ 0, & \text{se } b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Propriedade 20 (Existência) *Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x_0 \in \Omega$ tal que $\varphi(x_0) = b$.*

Propriedade 21 (Continuidade) *Se $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então existe uma vizinhança V de φ em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que, para toda aplicação $\psi \in V$, vale:*

- (i) $b \notin \psi(\partial\Omega)$;
- (ii) $d(\psi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega, b)$.

Propriedade 22 (Aditividade) *Seja $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, onde Ω_1 e Ω_2 são subconjuntos abertos, disjuntos de $\mathbb{R}^n$, com $b \notin \varphi(\partial\Omega_1) \cup \varphi(\partial\Omega_2)$. Então,*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b) + d(\varphi, \Omega_2, b).$$

Propriedade 23 *Se $\Omega_1 \subset \Omega$ é aberto e $b \notin \varphi(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1)$, então*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\varphi, \Omega_1, b).$$

Propriedade 24 (Invariância do Grau por Homotopia) *Se $H: \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ e $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ são funções contínuas, satisfazendo $y(t) \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então o número inteiro $d(H(\cdot, t), \Omega, y(t))$ é constante em $[0, 1]$.*

Considerando $y(t) = b$ na Propriedade 24, podemos reescrevê-la da seguinte forma:

Corolário 25 *Se $H: \overline{\Omega} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ é contínua e $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$, então $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$.*

Propriedade 26 *Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e b_1, b_2 pontos de $\mathbb{R}^n$ que não pertencem a $\varphi(\partial\Omega)$. Se b_1 e b_2 estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi, \Omega, b_1) = d(\varphi, \Omega, b_2).$$

4 Resultados de análise no $\mathbb{R}^n$

Esta seção tem como objetivo apresentar provas detalhadas de resultados clássicos de análise no $\mathbb{R}^n$ utilizando algumas propriedades do grau de Brouwer descritas anteriormente. Tais resultados podem ser encontrados nas referências [5] e [8]. Cabe salientar que neste texto fornecemos uma abordagem mais detalhada e didática aos resultados, comparada às utilizadas nas referências citadas.

Nesta seção, $B_r(a)$ denota a bola aberta de centro a e raio r em $\mathbb{R}^n$, $\overline{B_r(a)}$ denota a bola fechada de centro a e raio r em $\mathbb{R}^n$ e $\partial B_r(a)$ denota a fronteira de $B_r(a)$, onde $r > 0$.

Teorema 27 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer) *Toda aplicação contínua de $\overline{B_1(0)}$ em $\overline{B_1(0)}$ admite pelo menos um ponto fixo. Ou seja, se $f: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ é contínua, então existe $x \in \overline{B_1(0)}$ tal que $f(x) = x$.*

Demonstração. Defina $\varphi: \overline{B_1(0)} \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = x - f(x)$ para $x \in \overline{B_1(0)}$. Note que φ é uma aplicação contínua, pois f e a aplicação identidade são contínuas. Se existir $x \in \partial B_1(0)$ tal que $f(x) = x$, então não há o que provar. Suponhamos, então, que $f(x) \neq x$ para $x \in \partial B_1(0)$. Com isso, $\varphi(x) \neq 0$ para $x \in \partial B_1(0)$, donde segue que $0 \notin \varphi(\partial B_1(0))$.

Agora, considere a homotopia entre a aplicação identidade e φ , definida por

$$H: \overline{B_1(0)} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

$$(x, t) \longmapsto H(x, t) = x - t \cdot f(x).$$

Mostremos agora que $0 \notin H(\partial B_1(0) \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$. Observe que temos dois casos a considerar, a saber: $t_0 = 1$ e $t_0 \in [0, 1)$. No primeiro caso, temos

$$H(x, 1) = x - 1 \cdot f(x) = \varphi(x) \neq 0, \text{ para todo } x \in \partial B_1(0).$$

No segundo caso, para todo $x \in \partial B_1(0)$, temos

$$\|t_0 f(x)\| = t_0 \|f(x)\| \leq t_0 \cdot 1 < 1 = \|x\|,$$

de onde segue que $t_0 f(x) \neq x$ para todo $x \in \partial B_1(0)$. Ou seja, $H(x, t_0) \neq 0$ para todo $x \in \partial B_1(0)$. Sendo assim, $0 \notin H(\partial B_1(0) \times [0, 1], \mathbb{R}^n)$.

Pela invariância do grau por homotopia (veja Corolário 25), sabemos que $d(H(\cdot, t), B_1(0), 0)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$. Deste modo,

$$d(H(\cdot, 0), B_1(0), 0) = d(H(\cdot, 1), B_1(0), 0). \quad (5)$$

Como

$$H(x, 0) = x \text{ e } H(x, 1) = \varphi(x), \quad \forall x \in \overline{B_1(0)},$$

segue da equação (5) que

$$d(\varphi, B_1(0), 0) = d(Id, B_1(0), 0) \stackrel{(*)}{=} 1,$$

onde a igualdade $(*)$ se deve à Propriedade 19. Assim, como $d(\varphi, B_1(0), 0) \neq 0$, a Propriedade 20 garante que existe $x_0 \in B_1(0)$ tal que $\varphi(x_0) = 0$. Logo, existe $x_0 \in B_1(0)$ tal que

$$f(x_0) = x_0,$$

o que completa a prova. □

Observação 28 *O Teorema 27 também vale para aplicações contínuas $f: \overline{B_r(a)} \rightarrow \overline{B_r(a)}$, onde $\overline{B_r(a)} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$, $a \in \mathbb{R}^n$ é arbitrário e r é qualquer número real positivo. Pois bem, é sabido que existe um homeomorfismo $\psi: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_r(a)}$, a saber, $\psi(x) = rx + a$, com $\psi^{-1}: \overline{B_r(a)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ dada por $\psi^{-1}(x) = \frac{x-a}{r}$. Sendo f uma aplicação contínua de $\overline{B_r(a)}$ em $\overline{B_r(a)}$, a composta $\varphi = \psi^{-1} \circ f \circ \psi: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ é contínua e admite um ponto fixo pelo Teorema 27, ou seja, existe $x_0 \in \overline{B_1(0)}$ tal que $\varphi(x_0) = x_0$. Daí, $f(\psi(x_0)) = \psi(x_0)$ e, por conseguinte, $\psi(x_0) \in \overline{B_r(a)}$ é um ponto fixo de f .*

Na sequência, veremos que o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer pode ser estendido para aplicações definidas num subconjunto convexo compacto qualquer de $\mathbb{R}^n$. Esta generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer será utilizada para demonstrar o Teorema de Perron-Frobenius. Mas, antes disso, provaremos um resultado auxiliar.

Lema 29 *Seja K um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ tal que $0 \in \text{int } K$. A função $p_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$, onde $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\}$, dada por*

$$p_K(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

satisfaz as seguintes propriedades:

(P1) p_K é um funcional sublinear, ou seja,

$$p_K(\lambda x) = \lambda p_K(x), \quad \forall \lambda > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \quad (6)$$

e

$$p_K(x + y) \leq p_K(x) + p_K(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n. \quad (7)$$

(P2) para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $x \in p_K(x) \cdot K$;

(P3) $K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_K(x) \leq 1\}$;

(P4) p_K é uma função contínua.

Demonstração. (P1): A validade de (P1) pode ser facilmente constatada usando a definição de p_K e propriedades de ínfimo.

(P2): Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ arbitrariamente. Como $p_K(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$, existe uma sequência $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$ tal que $\lambda_n \rightarrow p_K(x)$ quando $n \rightarrow \infty$. Note que temos dois casos a considerar: quando $p_K(x) = 0$ e quando $p_K(x) > 0$.

Primeiro, suponhamos que $p_K(x) = 0$. Como $\lambda_n x \in K$, então $\|x\| \leq |\lambda_n| \text{diam } K$. Pela compacidade de K , segue que $\text{diam } K < \infty$. Sabendo que $\lambda_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$, podemos inferir que $x = 0 \in 0 \cdot K$. Ainda, pela definição de p_K , segue que $p_K(0) = 0$. Sendo assim,

$$p_K(x) = 0 \text{ se, e somente se, } x = 0. \quad (8)$$

Agora, se $p_K(x) > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_n > 0$ para todo $n > n_0$. Dessa forma, temos

$$\frac{x}{\lambda_n} \in K \quad \text{sempre que } n > n_0. \quad (9)$$

Além disso,

$$\frac{x}{\lambda_n} \rightarrow \frac{x}{p_K(x)} \quad \text{quando } n \rightarrow \infty. \quad (10)$$

Como K é fechado, segue que $\frac{x}{p_K(x)} \in K$. Por conseguinte, temos que $x \in p_K(x) \cdot K$, o que conclui a prova da Propriedade (P2).

(P3): Para provarmos (P3), tomemos $x \in K$ arbitrário. Então, $x \in 1 \cdot K$ e claramente $0 \leq p_K(x) \leq 1$. Logo, $K \subset \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_K(x) \leq 1\}$. Se $p_K(x) = 0$ então $x = 0$, por (8). Tomemos $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $0 < p_K(x) \leq 1$. Como $\frac{x}{p_K(x)} \in K$ e $0 \in K$, segue pela convexidade de K que

$$p_K(x) \cdot \frac{x}{p_K(x)} + (1 - p_K(x)) \cdot 0 \in K \implies x \in K.$$

Daí, $\{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_K(x) \leq 1\} \subset K$ e, portanto, $K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq p_K(x) \leq 1\}$.

(P4): Pela subaditividade de p_K (propriedade (7)), podemos inferir que

$$|p_K(x) - p_K(y)| \leq \max\{p_K(x-y), p_K(y-x)\}. \quad (11)$$

Afirmamos que existe $M > 0$ tal que

$$p_K(x) \leq M\|x\|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (12)$$

De fato, como $0 \in \text{int } K$, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(0, \varepsilon) \subset K$. Dado $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, temos

$$y = \frac{x}{\|x\|} \in \overline{S}(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\},$$

de onde segue que

$$\frac{\varepsilon}{2} \cdot y \in B(0, \varepsilon),$$

pois

$$\left\| \frac{\varepsilon}{2} \cdot y \right\| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Com isso, temos que $\frac{\varepsilon}{2} \frac{x}{\|x\|} \in K$ e, conseqüentemente, $x \in \frac{2}{\varepsilon} \|x\| \cdot K$, donde

$$\frac{2}{\varepsilon} \|x\| \in \{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Logo, considerando $M = \frac{2}{\varepsilon}$, segue que $p_K(x) \leq M\|x\|$. Se $x = 0$, temos $p_K(x) = 0$ e, portanto, $p_K(x) = 0 = M \cdot \|0\|$. Isso comprova a validade da afirmação. Por fim, por (11) e (12), concluímos que

$$|p_K(x) - p_K(y)| \leq M\|x - y\|, \quad (13)$$

ou seja, p_K é uma aplicação lipschitziana e, portanto, contínua.

□

Teorema 30 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer Generalizado) *Toda aplicação contínua φ de um subconjunto convexo compacto K de $\mathbb{R}^n$ em si mesmo admite um ponto fixo.*

Demonstração. Sejam K um subconjunto convexo e compacto de $\mathbb{R}^n$ e $\varphi: K \rightarrow K$ uma aplicação contínua. Podemos supor que $\text{int } K \neq \emptyset$ e $0 \in \text{int } K$. Note que se $0 \notin K$, basta considerar o conjunto compacto e convexo $\tilde{K} = K - \tilde{x} = \{x - \tilde{x} : x \in K\}$, com $\tilde{x} \in \text{int } K$, e utilizar os mesmos argumentos que usaremos abaixo, visto que $0 \in \text{int } \tilde{K}$.

Seja $p_K: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ a função dada por

$$p_K(x) = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Pelo Lema 29 - (P4), p_K é uma aplicação contínua. Definindo $h: K \rightarrow \overline{B(0, 1)}$ por

$$h(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ p_K(x) \frac{x}{\|x\|}, & x \neq 0, \end{cases}$$

temos que h é uma aplicação contínua. Realmente, h é contínua em $x \neq 0$, pois é produto de funções contínuas, e é contínua em $x = 0$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0} p_K(x) \frac{x}{\|x\|} \stackrel{(*)}{=} 0 = h(0),$$

onde a igualdade $(*)$ segue do fato de p_K ser contínua em 0, $p_K(0) = 0$, e o fato da função $\tau(x) = \frac{x}{\|x\|}$ ser limitada.

Temos também que $h: K \rightarrow \overline{B(0, 1)}$ é uma bijeção. De fato, a aplicação $g: \overline{B(0, 1)} \rightarrow K$ por

$$g(y) = \begin{cases} 0, & y = 0, \\ \frac{\|y\|}{p_K(y)} y, & y \neq 0, \end{cases}$$

é a inversa de h .

Inicialmente, note que se $\|y\| \leq 1$ e $y \neq 0$, então $g(y) \in K$, pois

$$p_K\left(\frac{\|y\|}{p_K(y)} y\right) = \frac{\|y\|}{p_K(y)} p_K(y) = \|y\| \leq 1 \stackrel{(**)}{\implies} \frac{\|y\|}{p_K(y)} y \in K,$$

onde $(**)$ se deve ao Lema 29 - $(\mathcal{P}3)$.

Além disso, note que $g \circ h = id_K$ e $h \circ g = id_{\overline{B(0, 1)}}$. Com efeito, para $y \in \overline{B(0, 1)}$, $y \neq 0$, vale

$$\begin{aligned} h(g(y)) &= h\left(\frac{\|y\|}{p_K(y)} y\right) = p_K\left(\frac{\|y\|}{p_K(y)} y\right) \cdot \frac{\frac{\|y\|}{p_K(y)} y}{\left\|\frac{\|y\|}{p_K(y)} y\right\|} \\ &= \frac{\frac{\|y\|}{p_K(y)} \cdot p_K(y) \cdot \frac{\|y\|}{p_K(y)} \cdot y}{\frac{\|y\| \cdot \|y\|}{p_K(y)}} \\ &= y, \end{aligned} \tag{14}$$

enquanto que para $x \in K$, $x \neq 0$, tem-se

$$\begin{aligned} g(h(x)) &= g\left(p_K(x) \frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{\left\|p_K(x) \cdot \frac{x}{\|x\|}\right\| \cdot \frac{p_K(x)x}{\|x\|}}{p_K\left(p_K(x) \cdot \frac{x}{\|x\|}\right)} \\ &= \frac{p_K(x) \cdot \frac{p_K(x)}{\|x\|} \cdot x}{\frac{p_K(x)}{\|x\|} \cdot p_K(x)} \\ &= x. \end{aligned} \tag{15}$$

Portanto, sendo h uma bijeção contínua definida num conjunto compacto, sua inversa g também é contínua. Logo, h é um homeomorfismo.

Podemos afirmar, então, que a aplicação $f = h \circ \varphi \circ h^{-1}: \overline{B_1(0)} \rightarrow \overline{B_1(0)}$ é contínua, posto que $\varphi: K \rightarrow K$ é contínua. Sendo assim, o Teorema 27 garante que existe $x_0 \in \overline{B_1(0)}$ tal que $f(x_0) = (x_0)$, ou seja,

$$h \circ \varphi \circ h^{-1}(x_0) = x_0 \implies \varphi(h^{-1}(x_0)) = h^{-1}(x_0),$$

donde concluímos que $h^{-1}(x_0) \in K$ é ponto fixo de φ e completamos a prova. $\square$

Teorema 31 (Teorema de Perron-Frobenius) *Seja $A = [a_{ij}]$ uma matriz $n \times n$ tal que $a_{ij} \geq 0$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$. Então, existem $\lambda \geq 0$ e $x \neq 0$, com $x_i \geq 0$ para todo $1 \leq i \leq n$, tal que $Ax = \lambda x$. Em outras palavras, A possui um autovetor correspondente a um autovalor não negativo.*

Demonstração. Vamos considerar $\mathbb{R}^n$ munido com a norma $\|x\|_s = \sum_{i=1}^n |x_i|$, $x \in \mathbb{R}^n$.¹ Defina

$$D = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } \sum_{i=1}^n x_i = 1 \right\}.$$

Note que para $x, y \in D$ e $t \in [0, 1]$ temos

$$\sum_{i=1}^n [tx + (1-t)y]_i = t \sum_{i=1}^n x_i + (1-t) \sum_{i=1}^n y_i = t + 1 - t = 1,$$

donde segue que D é um subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$.

A aplicação $\gamma: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $\gamma(x) = \sum_{i=1}^n x_i$, onde $\mathbb{R}_+^n = \{x \in \mathbb{R}^n : x_i \geq 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\}\}$, é claramente contínua. Como $\{1\}$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}$, segue que $D = \gamma^{-1}(\{1\})$ é um subconjunto fechado de $\mathbb{R}^n$. Além disso, D é limitado, pois se $x \in D$ então $\|x\|_s = 1$. Portanto, podemos afirmar que D é um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$.

Se $Ax = 0$ para algum $x \in D$, não há o que mostrar, pois basta tomar $\lambda = 0$. Suponhamos então que $Ax \neq 0$. Note que o conjunto $(\gamma \circ A)(D)$ é compacto, pois a aplicação $\gamma \circ A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\gamma \circ A(x) = \sum_{i=1}^n [Ax]_i$ para $x \in \mathbb{R}^n$ é contínua, uma vez que γ é contínua e a aplicação $x \in \mathbb{R}^n \mapsto Ax$ é linear em $\mathbb{R}^n$ (e portanto contínua), e D é compacto.

Como $a_{ij} \geq 0$, então existe $\alpha > 0$ tal que $\sum_{i=1}^n [Ax]_i \geq \alpha$ para todo $x \in D$. De fato, segue da compacidade de $(\gamma \circ A)(D)$ que o ínfimo de $(\gamma \circ A)(D)$ é atingido em D , ou seja, existe $\tilde{x} \in D$ tal que $\inf(\gamma \circ A)(D) = A\tilde{x}$. Além disso, $A\tilde{x} > 0$, pois $a_{ij} \geq 0$ e $\sum_{i=1}^n \tilde{x}_i = 1$. Tomando $\alpha = \inf(\gamma \circ A)(D)$, temos que $\alpha \leq \sum_{i=1}^n [Ax]_i$ para todo $x \in D$.

Por fim, defina $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ por

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^n [Ax]_i \right)^{-1} \cdot Ax.$$

Claramente, f é contínua, visto que é uma função composta de funções contínuas. Ademais, $f(D) \subset D$, pois dado $x \in D$ temos $[f(x)]_i \geq 0$, já que $a_{ij} \geq 0$ para quaisquer $i, j \in \{1, \dots, n\}$, e $\sum_{i=1}^n [f(x)]_i = 1$.

Portanto, pelo Teorema 30, existe $x_0 \in D$ tal que

$$f(x_0) = x_0 \Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n [Ax_0]_i \right)^{-1} \cdot Ax_0 = x_0 \Rightarrow Ax_0 = \left(\sum_{i=1}^n [Ax_0]_i \right) x_0 \Rightarrow Ax_0 = \lambda x_0,$$

onde $\lambda = \sum_{i=1}^n [Ax_0]_i$, donde segue o resultado. □

Teorema 32 *Seja $f \in C(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ tal que $\langle f(x), x \rangle / \|x\| \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, onde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é um produto interno em $\mathbb{R}^n$ e $\| \cdot \|$ é a norma induzida pelo produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Então, f é sobrejetiva.*

¹Não há perda de generalidade em fazermos esta consideração, pois em $\mathbb{R}^n$ quaisquer duas normas são equivalentes.

Demonstração. Para provarmos este teorema, vamos mostrar que para qualquer $y \in \mathbb{R}^n$ existe $r > 0$ tal que $d(f, B_r(0), y) \neq 0$, pois assim a Propriedade 20 permitir-nos-á concluir que a equação $f(x) = y$ possui ao menos uma solução em $B_r(0)$.

Seja $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrário e considere a seguinte homotopia entre $f - y$ e a aplicação $id - y$ ($id: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a aplicação identidade), $H: \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, dada por $H(x, t) = tx + (1-t)f(x) - y$, para $x \in \mathbb{R}^n$ e para $t \in [0, 1]$. Note que se $x \neq 0$ então

$$\begin{aligned}\langle H(x, t), x \rangle &= t\langle x, x \rangle + (1-t)\langle f(x), x \rangle - \langle y, x \rangle \\ &= \|x\| \cdot \left[t\|x\| + \frac{(1-t)}{\|x\|} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{\|x\|} \langle y, x \rangle \right].\end{aligned}$$

Como $\langle f(x), x \rangle / \|x\| \rightarrow \infty$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$, podemos tomar $r > \|y\|$ tal que $\langle f(x), x \rangle / \|x\| > \|y\|$ sempre que $\|x\| \geq r$.

Tomando $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| = r > \|y\|$ e $t \in [0, 1]$ arbitrário, temos pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}\langle H(x, t), x \rangle &= r \cdot \left[tr + \frac{(1-t)}{\|x\|} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{\|x\|} \langle y, x \rangle \right] \\ &\geq r \cdot \left[tr + \frac{(1-t)}{\|x\|} \langle f(x), x \rangle - \frac{1}{\|x\|} \|y\| \|x\| \right] \\ &= r \cdot \left[tr + \frac{(1-t)}{\|x\|} \langle f(x), x \rangle - \|y\| \right] \\ &> r \cdot [t\|y\| + (1-t)\|y\| - \|y\|] \\ &= 0,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle H(x, t), x \rangle > 0 \quad \text{para todo } (x, t) \in \partial B_r(0) \times [0, 1]. \quad (16)$$

Afirmção: $0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0, 1])$.

De fato, se existissem $x_0 \in \partial B_r(0)$ ($\|x_0\| = r$) e $t_0 \in [0, 1]$ tais que $H(x_0, t_0) = 0$, então teríamos $\langle H(x_0, t_0), x_0 \rangle = 0$, ao contrário do que concluímos em (16).

Portanto, $d(H(x, \cdot), B_r(0), 0)$ está bem definido e é constante em $[0, 1]$, pela Propriedade 25, o que implica $d(id - y, B_r(0), 0) = d(f - y, B_r(0), 0)$. Pela Proposição 18, obtemos

$$d(id, B_r(0), y) = d(f, B_r(0), y). \quad (17)$$

Mas, como $r > \|y\|$, então $y \in B_r(0)$, e pela Propriedade 19 segue que

$$d(id, B_r(0), y) = 1. \quad (18)$$

De (17) e (18) segue que $d(f, B_r(0), y) = 1 \neq 0$. Logo, pela Propriedade 20, a equação $f(x) = y$ admite pelo menos uma solução em $B_r(0)$. Sendo $y \in \mathbb{R}^n$ arbitrário, concluímos que f é sobrejetiva. $\square$

Para finalizar esse artigo, discorreremos sobre um resultado que aborda como a derivada influencia a orientação de aplicações contínuas e injetoras. Mas antes, recordaremos alguns conceitos fundamentais.

Qualquer base ordenada do espaço euclidiano n -dimensional $\mathbb{R}^n$ possui uma orientação particular. Dizemos que uma base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ tem *orientação positiva* se a matriz de mudança de base de $\mathcal{B}$ para a

base canônica $\{e_1, \dots, e_n\}$ possui determinante positivo e dizemos que $\mathcal{B}$ tem *orientação negativa* caso contrário. Ainda, sendo $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma transformação linear, dizemos que A *preserva a orientação* se $\det(A) > 0$ e *reverte a orientação* se $\det(A) < 0$.

Sabendo que a derivada é uma transformação linear, podemos verificar se $\varphi'(x)$ preserva ou não a orientação ao analisarmos o sinal de $J_\varphi(x)$. Se $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é um difeomorfismo, com $\overline{\Omega}$ conexo, pode-se verificar que se $\varphi'(x)$ preserva orientação para algum $x \in \Omega$, então $\varphi'(\widehat{x})$ preserva orientação para todo $\widehat{x}$ em Ω . Com efeito, como $\varphi^{-1} \circ \varphi = id$, segue da diferenciabilidade de φ e φ^{-1} que

$$\det[(\varphi^{-1} \circ \varphi)'(x)] = \det[(\varphi^{-1})'(\varphi(x)) \circ \varphi'(x)] = \det[(\varphi^{-1})'(\varphi(x))] \cdot \det[\varphi'(x)] = 1 = \det[id'(x)].$$

Portanto, $\det[\varphi'(x)] \neq 0$ para todo $x \in \Omega$. Por conseguinte, como Ω é conexo e J_φ é contínua em Ω , então $J_\varphi(\Omega) \subset \mathbb{R}$ é conexo (veja Proposição 6) e, portanto, $J_\varphi(\Omega) = I$ é um intervalo. Como $\det[\varphi'(x)] > 0$ e $0 \notin I$ então $\det[\varphi'(\widehat{x})] > 0$ para qualquer $\widehat{x}$ em Ω . De forma similar, se $\varphi'(x)$ reverte a orientação para algum $x \in \Omega$, então $\varphi'(\widehat{x})$ reverte a orientação para todo $\widehat{x}$ em Ω , sempre que $\varphi \in C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é um difeomorfismo e $\overline{\Omega}$ é conexo.

Observe que sob a forte suposição de que φ é um difeomorfismo de classe C^1 , foi relativamente fácil deduzir o comportamento global da orientação da derivada de φ , inspecionando seu comportamento local. Uma pergunta aqui nos cabe: será que podemos tirar conclusões sobre o comportamento global da orientação da derivada de φ , estudando seu comportamento local e considerando hipóteses mais fracas a respeito de φ ? Com o auxílio da teoria do grau de Brouwer, responderemos que sim. Mais especificamente, veremos que podemos inferir o mesmo comportamento da derivada de φ se φ for uma aplicação apenas contínua e injetiva definida em um conjunto conexo, tendo apenas o mesmo conhecimento local. Enfatizamos, assim, o poder da teoria do grau de Brouwer neste caso, uma vez que podemos ter $\varphi'(x_1) = 0$ para algum $x_1 \in \Omega$ ou $\varphi'(x_2)$ pode não existir para algum $x_2 \in \Omega$.

Proposição 33 *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto, conexo e limitado e $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ uma aplicação injetora. As seguintes afirmações são válidas:*

- (i) *Para todo $a \in \Omega$ tal que φ é diferenciável em a e $\varphi'(a)$ invertível, temos $\text{sgn } J_\varphi(a) = d(\varphi, \Omega, \varphi(a))$.*
- (ii) *$\text{sgn } J_\varphi$ é constante em $\Omega_\varphi = \{x \in \Omega : \varphi \text{ é diferenciável em } x \text{ e } \det[\varphi'(x)] \neq 0\}$.*

Demonstração. (i): Para a prova deste item, construiremos uma homotopia entre φ e uma aplicação linear, a saber $\varphi'(a)$. Com efeito, como φ é diferenciável em a , segue que

$$\varphi(x) = \varphi(a) + \varphi'(a)(x - a) + r(x - a), \text{ com } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\|r(x - a)\|}{\|x - a\|} = 0 \quad (19)$$

para $x \in \overline{\Omega}$.

Por hipótese, $\varphi'(a)$ é invertível. Portanto, $\det[\varphi'(a)] \neq 0$ e existe $(\varphi'(a))^{-1}$ tal que

$$\|z\| = \|(\varphi'(a))^{-1} \varphi'(a)z\| \leq \|(\varphi'(a))^{-1}\| \|\varphi'(a)z\|$$

$z \in \mathbb{R}^n$, donde deduzimos que existe $c := 1/\|(\varphi'(a))^{-1}\| > 0$ tal que

$$\|\varphi'(a)z\| \geq c\|z\| \quad \text{para todo } z \in \mathbb{R}^n. \quad (20)$$

Pela diferenciabilidade de φ em a , existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\|r(x - a)\| < c\|x - a\| \quad \text{para todo } x \in \overline{B_{\delta_0}(a)} \subset \Omega. \quad (21)$$

Considere $\delta = \min\{\delta_0, \rho(a, \partial\Omega)/2\}$, onde $\rho(a, \partial\Omega)$ denota a distância entre o ponto a e o conjunto $\partial\Omega$. Como $a \notin \partial\Omega$, temos $\delta > 0$. Ainda, pela injetividade de φ , segue que $\varphi(x) \neq \varphi(a)$ para todo $x \in \overline{\Omega} \setminus B_\delta(a)$. Sendo assim, a Propriedade 23 garante que

$$d(\varphi, \Omega, \varphi(a)) = d(\varphi, B_\delta(a), \varphi(a)). \quad (22)$$

Definamos $H: \overline{B_\delta(a)} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(x, t) = t\varphi(x) + (1 - t)\varphi'(a)(x - a)$ e $y: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $y(t) = t\varphi(a)$. As relações (19), (20) e (21) implicam que, para quaisquer $x \in \partial B_\delta(a)$ e $t \in [0, 1]$, vale

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - y(t)\| &= \|t\varphi(x) + (1 - t)\varphi'(a)(x - a) - t\varphi(a)\| \\ &= \|t(\varphi(a) + \varphi'(a)(x - a) + r(x - a)) + (1 - t)\varphi'(a)(x - a) - t\varphi(a)\| \\ &= \|\varphi'(a)(x - a) + t r(x - a)\| \\ &\geq \|\varphi'(a)(x - a)\| - t\|r(x - a)\| \\ &\geq \|\varphi'(a)(x - a)\| - \|r(x - a)\| \\ &> c\|x - a\| - c\|x - a\| \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|H(t, x) - y(t)\| > 0 \quad \text{para quaisquer } x \in \partial B_\delta(a) \text{ e } t \in [0, 1].$$

Portanto, pela Propriedade 24, segue que

$$\begin{aligned} d(\varphi, B_\delta(a), \varphi(a)) &= d(H(\cdot, 1), B_\delta(a), y(1)) \\ &= d(H(\cdot, 0), B_\delta(a), y(0)) \\ &= d(\varphi'(a) - \varphi'(a)(a), B_\delta(a), 0) \end{aligned} \quad (23)$$

Como $\det[\varphi'(a)] \neq 0$, a equação $\varphi'(a)(x) - \varphi'(a)(a) = \varphi'(a)(x - a) = 0$ possui uma única solução, a saber, $x = a$. Portanto, para todo $r > 0$ tal que $B_\delta(a) \subset B_r(0)$ temos pela Propriedade 23 que

$$d(\varphi'(a) - \varphi'(a)(a), B_\delta(a), 0) = d(\varphi'(a) - \varphi'(a)(a), B_r(0), 0). \quad (24)$$

Definindo uma homotopia $G: \overline{B_r(0)} \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ por $G(x, t) = \varphi'(a)(x) - t.\varphi'(a)(a)$, observamos que, para $t \in [0, 1]$ fixo, a equação $G(x, t) = 0$ ($\varphi'(a)(x) - t.\varphi'(a)(a) = 0$) tem uma única solução ($x = ta$) que satisfaz $\|x\| = \|ta\| \leq \|a\| < r$. Por conseguinte, podemos inferir que

$$G(x, t) \neq 0 \quad \text{para quaisquer } x \in \partial B_r(0) \text{ e } t \in [0, 1].$$

Então, o Corolário 25 implica que

$$d(\varphi'(a) - \varphi'(a)(a), B_r(0), 0) = d(\varphi'(a), B_r(0), 0). \quad (25)$$

Ainda, como $\varphi'(a)$ é uma transformação linear invertível, obtemos por meio da Proposição 15 que

$$d(\varphi'(a), B_r(0), 0) = \text{sgn } \det(\varphi'(a)) = \text{sgn } J_\varphi(a). \quad (26)$$

Finalmente, por (22), (23), (24), (25) e (26), concluímos que

$$d(\varphi, \Omega, \varphi(a)) = \operatorname{sgn} J_{\varphi}(a),$$

finalizando a prova de (i).

(ii): Como φ é contínua e Ω é conexo, então $\varphi(\Omega)$ é conexo pela Proposição 6. Por meio da Propriedade 26, podemos deduzir que $d(\varphi, \Omega, \cdot)$ é constante em $\varphi(\Omega)$. Portanto, para $x, \tilde{x} \in \Omega_{\varphi}$, temos pelo item (i) que

$$\operatorname{sgn} J_{\varphi}(x) = d(\varphi, \Omega, \varphi(x)) = d(\varphi, \Omega, \varphi(\tilde{x})) = \operatorname{sgn} J_{\varphi}(\tilde{x}),$$

donde segue que $\operatorname{sgn} J_{\varphi}$ é constante em Ω_{φ} . □

5 Referências bibliográficas

1. FOLLAND, G. B. **Real analysis: modern techniques and their applications**. 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1999.
2. LIMA, E. L. **Curso de análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2015. v. 2.
3. MUNKRES, J. R. **Topology**. 2nd ed. Upper Saddle River: Prentice Hall, 2000.
4. BERESTYCKI, H. **Méthodes topologiques et problèmes aux limites non linéaires**. 1975. Thèse (Doctorat en Mathématiques) – Université Paris VI – Université Pierre et Marie Curie, Paris, 1975.
5. DEIMLING, K. **Nonlinear functional analysis**. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
6. ALMEIDA, O. B. **Teoria do grau e aplicações**. 2006. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, 2006.
7. SOUZA, C. S. **Existência de soluções periódicas e permanência de soluções de equações diferenciais funcionais com retardo**. 2018. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, São José do Rio Preto, 2018.
8. LIDDELL, T. **The topological degree and applications**. Scientific Report. Australia: Australian Mathematical Sciences Institute Vacation Research Scholarships Report. 2015.