**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Renata Passos Machado Vieira

IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

re.passosm@gmail.com

Francisco Regis Vieira Alves

IFCE - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

fregis@gmx.fr

Paula Maria Machado Cruz Catarino

UTAD - Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

pcatarino23@gmail.com

Uma extensão dos octônios de Padovan para inteiros não positivos

An extension of Padovan's octonions to non-positive integers

Resumo

O presente trabalho realiza uma extensão para os números inteiros não positivos, dos termos da sequência de Padovan em oito dimensões, sendo então denominados de octônios de Padovan. Contudo, diante das definições dos octônios, é então realizada uma extensão desses números, obtendo assim algumas propriedades e teoremas matemáticos, tais como: função geradora, representação da matriz geradora, dentre outras. Logo, observa-se o seu processo de complexificação, ressaltando uma construção evolutiva da sequência de Padovan.

Palavras-chave: Extensão. Octônios de Padovan. Sequência de Padovan.

Abstract

The present work extends to of non-positive integers, the terms of the Padovan sequence in eight dimensions, being then called Padovan octonions. However, given the definitions of the octonions, an extension of these numbers is then performed, thus obtaining some properties and mathematical theorems, such as: generating function, representation of the generating matrix, among others. Therefore, its complexification process is observed, emphasizing an evolutionary construction of the Padovan sequence.

Keywords: Extension. Octonions of Padovan. Padovan sequence.

1 Introdução

O estudo de sequências numéricas em assuntos referentes ao conteúdo matemático de álgebra real de divisão normativa, tem se tornado um atrativo para muitos pesquisadores. Diante disso, podemos considerar o trabalho de Karatas e Halici [1], em que relata estudos sobre as divisões por zero na álgebra de dezesseis dimensões, definindo então somente os octônios em 1845.

Os octônios podem ser definidos como octetos de números reais e, possuem propriedades não comutativas, não-associativa e normalizada [2]. Com base na álgebra dos quatérnios, em que $H = \{a_0 + a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k} \mid \mathbf{i}^2 = \mathbf{j}^2 = \mathbf{k}^2 = -1, \mathbf{ijk} = -1, a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$, é então estabelecida a álgebra dos octônios $\mathbb{O}$, numa base natural no espaço sobre $\mathbb{R}$ formado pelos elementos: $e_0 = 1, e_1 = \mathbf{i}, e_2 = \mathbf{j}, e_3 = \mathbf{k}, e_4 = \mathbf{e}, e_5 = \mathbf{ie}, e_6 = \mathbf{je}, e_7 = \mathbf{ke}$ e a multiplicação desses números é mostrada na Tabela 1.

Tabela 1: Tabela de multiplicação dos octônios de $\mathbb{O}$.

.	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
1	1	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

Fonte: KEÇILIOGLU E AKKUS [3].

Com isso, os octônios utilizam a seguinte notação:

$$p = \sum_{s=0}^7 p_s e_s,$$

em que p_s é o coeficiente real, com $p \in \mathbb{O}$, escrito na forma $p = Re(p) + Im(p)$, onde $Re(p) = p_0$ representando a parte real e, $Im(p) = \sum_{s=1}^7 p_s e_s$ representando a parte imaginária.

À vista disso, iremos abordar neste trabalho, os octônios aplicados à sequência de Padovan, uma sequência numérica e de números inteiros, pouco estudada na literatura de matemática pura e na área de ensino.

A sequência de Padovan à qual o nome foi atribuído em homenagem ao arquiteto italiano Richard Padovan (1935 -), nascido na cidade de Pádua [4,5,6,7]. Sendo então uma sequência linear e recorrente, de terceira ordem e apresentando os seus termos apenas números inteiros, cujos valores iniciais são definidos como $P_0 = P_1 = P_2 = 1$ e a sua relação de recorrência dada por:

$$P_n = P_{n-2} + P_{n-3},$$

com $n \geq 3$. Os primeiros valores de P_n são 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 12, ...

Assim, nas próximas seções é realizado um estudo, referente à extensão dos octônios de Padovan, fundamentada no trabalho de Tasyurdu e Akpinar [8], em que trata da definição dos octônios de Padovan, retratando algumas propriedades e teoremas matemáticos.

Definição 1. Para todo $n \geq 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos octônios de Padovan para índice inteiro positivo, com os valores iniciais $OP_0 = 1 + i + j + 2k + 2e + 3ie + 4je + 5ke$, $OP_1 = 1 + i + 2j + 2k + 3e + 4ie + 5je + 7ke$ e $OP_2 = 1 + 2i + 2j + 3k + 4e + 5ie + 7je + 9ke$, é dada por:

$$OP_n = OP_{n+2} + OP_{n+3}.$$

Assim, pode-se perceber que a partir do trabalho de Tasci [9], em que trata dos quaternions de Padovan, foi possível chegar aos octônios. De posse dessas definições, serão discutidas algumas propriedades inerentes à esse processo de extensão, tratando assim da função geradora, matriz geradora e outros teoremas.

2 Os octônios de Padovan para índices inteiros não positivos

A seguir, será analisado o comportamento dos termos com índices inteiros não positivos dos octônios de Padovan, com base na sua definição, realizada no trabalho de Tasyurdu e Akpinar [8], e no estudo de Tasci [9] para os quaternions de Padovan.

Definição 2. Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a fórmula de recorrência dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, com os valores iniciais $OP_{-1} = i + j + k + 2e + 2ie + 3je + 4ke$, $OP_{-2} = 1 + j + k + e + 2ie + 2je + 3ke$ e $OP_{-3} = i + k + e + ie + 2je + 2ke$, é dada por:

$$OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}.$$

Definição 3. Para todo $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o octonion de Padovan, para índice inteiro não positivo, é definido pela equação:

$$OP_{-n} = \sum_{s=0}^7 P_{-n+s} e_s.$$

Assim, temos os primeiros valores dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, expressos na Tabela 2.

Tabela 2: Primeiros termos dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo.

OP_{-1}	$i + j + k + 2e + 2ie + 3je + 4ke$
OP_{-2}	$1 + j + k + e + 2ie + 2je + 3ke$
OP_{-3}	$i + k + e + ie + 2je + 2ke$
OP_{-4}	$j + e + ie + je + 2ke$
OP_{-5}	$1 + k + ie + je + ke$
OP_{-6}	$-1 + i + e + je + ke$

Fonte: Elaborado pelos autores.

Com base no trabalho [10], podemos estabelecer o teorema da função geradora dos octônios de Padovan, para os números inteiros não positivos.

Teorema 4. A função geradora dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, é expressa por:

$$g(OP_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^7 P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s-1}) e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

Demonstração. Realizando a multiplicação da função por x e x^3 , tem-se que:

$$g(OP_{-n}, x) = \sum_{n=0}^{\infty} OP_{-n} x^n = OP_0 + OP_{-1}x + OP_{-2}x^2 + \dots + OP_{-n}x^n + \dots \quad (1)$$

$$xg(OP_{-n}, x) = OP_0x + OP_{-1}x^2 + OP_{-2}x^3 + \dots + OP_{-n-1}x^n + \dots \quad (2)$$

$$x^2g(OP_{-n}, x) = OP_0x^2 + OP_{-1}x^3 + OP_{-2}x^4 + \dots + OP_{-n-2}x^n + \dots \quad (3)$$

$$x^3g(OP_{-n}, x) = OP_0x^3 + OP_{-1}x^4 + OP_{-2}x^5 + \dots + OP_{-n-3}x^n + \dots \quad (4)$$

Baseado nas Equações vistas acima, podemos realizar a operação 4-(3+2), tem-se que:

$$(x^3 - x - 1)g(OP_{-n}, x) = -OP_0 - (OP_0 + OP_{-1})x - (OP_{-2} + OP_{-1})x^2 + (OP_0 - OP_{-2} - OP_{-3})x^3 + \dots + (OP_{-n-3} - OP_{-n} - OP_{-n-1})x^n + \dots$$

Considerando a fórmula de recorrência (Definição 3), pode-se obter:

$$(x^3 - x - 1)g(OP_{-n}, x) = -OP_0 - (OP_0 + OP_{-1})x - (OP_{-2} + OP_{-1})x^2 - \left(\sum_{s=0}^7 P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s-1}) e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right)x^2$$

$$g(OP_{-n}, x) = \frac{-\left(\sum_{s=0}^7 P_s e_s\right) - \left(\sum_{s=0}^7 (P_s + P_{s-1}) e_s\right)x - \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s-2} + P_{s-1}) e_s\right)x^2}{x^3 - x - 1}.$$

□

Algumas propriedades inerentes aos octônios de Padovan com índice inteiro não positivo, serão analisadas a seguir.

Teorema 5. A soma dos termos com índice inteiro não positivo dos octônios de Padovan, são expressos por:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s\right).$$

Demonstração. Utilizando a relação de recorrência dos octônios de Padovan, com $n \in \mathbb{N}$, tem-se que:

$$OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}. \quad (5)$$

Assim, avaliando a relação dada na Equação 5, em valores de n , obtemos:

$$\begin{aligned} OP_{-1} &= OP_2 - OP_0 \\ OP_{-2} &= OP_1 - OP_{-1} \\ OP_{-3} &= OP_0 - OP_{-2} \\ OP_{-4} &= OP_{-1} - OP_{-3} \\ &\vdots \\ OP_{-n-3} &= OP_{-n} - OP_{-n-2} \\ OP_{-n-2} &= OP_{-n+1} - OP_{-n-1} \\ OP_{-n-1} &= OP_{-n+2} - OP_{-n} \\ OP_{-n} &= OP_{-n+3} - OP_{-n+1}. \end{aligned}$$

Através de cancelamentos sucessivos, obtêm-se:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + OP_2 + OP_1. \quad (6)$$

Considerando os valores iniciais através da Definição 3, conclui-se que:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-m} = OP_{-n+3} + OP_{-n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 (P_{s+1} + P_{s+2}) e_s \right).$$

□

Teorema 6. A soma dos termos pares, com índice inteiro não positivo, dos octônios de Padovan é:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-2m} = OP_{2n+3} - \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+1} e_s \right).$$

Demonstração. Utilizando a recorrência $OP_{-n} = OP_{-n+3} - OP_{-n+1}$, observa-se que

$$\begin{aligned} OP_{-2} &= OP_1 - OP_{-1} \\ OP_{-4} &= OP_{-1} - OP_{-3} \\ OP_{-6} &= OP_{-3} - OP_{-5} \\ &\vdots \\ OP_{-2n-2} &= OP_{-2n+1} - OP_{-2n-1} \\ OP_{-2n} &= OP_{-2n+3} - OP_{-2n+1}. \end{aligned}$$

Com isso, tem-se que:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^n OP_{-2m} &= OP_{-2n+3} + OP_1 \\ &= OP_{-2m} = OP_{-2n+3} + \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+1} e_s \right). \end{aligned}$$

□

Teorema 7. O somatório dos números de índices ímpares, para os números inteiros não positivo, dos octônios de Padovan, são expressos por:

$$\sum_{m=1}^n OP_{-2m-1} = OP_{-2n+2} + \left(\sum_{s=0}^7 P_{s+2} e_s \right).$$

Demonstração. De modo análogo como realizado para a demonstração dos teoremas anteriores, pode-se facilmente validar também este teorema, realizando os cancelamentos sucessivos das operações algébricas. $\square$

3 As matrizes inversas dos octônios de Padovan

Para analisar as matrizes geradoras dos octônios de Padovan para índice inteiro não positivo, calcula-se a inversa da forma matricial de Padovan unidimensional, denominada de matriz base Q , com base no trabalho de Sokhuma [11].

Teorema 8. A matriz geradora de Padovan, para $n \in \mathbb{N}$, é dada por [11]:

$$Q^n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{n-2} & P_{n-3} & P_{n-4} \\ P_{n-1} & P_{n-2} & P_{n-3} \\ P_{n-3} & P_{n-4} & P_{n-5} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n \geq 5. \quad (7)$$

Assim, tem-se que é calculada a inversa da matriz geradora de Padovan (Teorema 8), obtendo:

$$Q^{-n} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Logo, para obtermos a forma matricial dos octônions de Padovan, é realizada a multiplicação da matriz Q pelo vetor $\begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix}$.

Teorema 9. Para $n > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, a matriz geradora dos octônios de Padovan, com índice inteiro não positivo, é dada por:

$$Q \cdot \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$= \begin{bmatrix} OP_{-n-2} & OP_{-n-3} & OP_{-n-4} \\ OP_{-n-1} & OP_{-n-2} & OP_{-n-3} \\ OP_{-n-3} & OP_{-n-4} & OP_{-n-5} \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Demonstração. Pelo princípio da indução finita, tem-se que:

Para $n = 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varrho \cdot \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \\ OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} - OP_{-3} & OP_{-2} - OP_{-4} & OP_{-3} - OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \\ OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-4} & OP_{-5} & OP_{-6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Assim, a igualdade é válida.

Supondo que seja válido para qualquer $n = k$, $k \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varrho \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-3} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-2} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-4} & P_{-n-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} OP_{-k-2} & OP_{-k-3} & OP_{-k-4} \\ OP_{-k-1} & OP_{-k-2} & OP_{-k-3} \\ OP_{-k-3} & OP_{-k-4} & OP_{-k-5} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Agora, verificando que seja válido para $n = k + 1$, tem-se:

$$\begin{aligned} \varrho^{k+1} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-1} & P_{-k-2} & P_{-k-3} \\ P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P_{-k-3} & P_{-k-4} & P_{-k-5} \\ P_{-k-2} & P_{-k-3} & P_{-k-4} \\ P_{-k-4} & P_{-k-5} & P_{-k-6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} OP_{-2} & OP_{-3} & OP_{-4} \\ OP_{-1} & OP_{-2} & OP_{-3} \\ OP_{-3} & OP_{-4} & OP_{-5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} OP_{-k-3} & OP_{-k-4} & OP_{-k-5} \\ OP_{-k-2} & OP_{-k-3} & OP_{-k-4} \\ OP_{-k-4} & OP_{-k-5} & OP_{-k-6} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

□

Existem ainda outras cinco matrizes geradoras para a extensão dos octônios de Padovan, totalizando seis matrizes geradoras válidas. Assim, a partir da matriz abaixo (Equação 11), são permutadas as linhas e colunas, simultaneamente, e multiplicada pelo mesmo vetor do Teorema 8.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} P_{-n-2} & P_{-n-4} & P_{-n-3} \\ P_{-n-3} & P_{-n-5} & P_{-n-4} \\ P_{-n-1} & P_{-n-3} & P_{-n-2} \end{bmatrix}, \text{ para todo } n > 0. \quad (11)$$

4 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos a extensão dos octônios de Padovan para os números inteiros, bem como a função geradora, matriz geradora e algumas propriedades desses números. Assim, em estudos futuros, planejamos examinar as aplicações dos octônios de Padovan e seus principais recursos, ressaltando a sua importância na física quântica, matemática aplicada e teoria dos grafos.

5 Referências Bibliográficas

- [1] KARATAS, A.; HALICI, S. Horadam octonions. **Analele Universitatii “Ovidius” Constanta**, v. 25, n. 3, p. 97-106, 2017.
- [2] GOGBERASHVILI, M. Octonionic geometry. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 15, p. 55-66, 2005.
- [3] KEÇILIOĞLU, O.; AKKUS, I. The Fibonacci octonions. **Advances in Applied Clifford Algebras**, v. 25, n. 1, p. 151-158, 2015.
- [4] STEWART, I. **L’univers des nombres**. Paris: Belin Pour La Science, 2000.
- [5] STEWART, I. Tales of a neglected number. **Scientific American**, v. 274, p. 102-103, 1996.
- [6] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V.; CATARINO, P. M. M. C. A Historical Analysis of The Padovan Sequence. **International Journal of Trends in Mathematics Education Research**, v. 3, n. 1, p. 8-12, 2020.
- [7] VIEIRA, R. P. M.; ALVES, F. R. V. Explorando a Sequência de Padovan mediante investigação histórica e abordagem epistemológica. **Boletim GEPEM**, n. 74, p. 162-169, 2019.
- [8] TASYURDU, Y.; AKPINAR, A. Padovan and Pell-Padovan octonions. **Turkish Journal of Mathematics Computer Science**, v. 11, p. 114-122, 2019.
- [9] TASCI, D. Padovan and Pell-Padovan Quaternions. **Journal of Science and Arts**, v. 42, n. 1, p. 125-132, 2018.
- [10] SANTOS, J. P. O.; IVKOVIC, M. Colored partitions and the Fibonacci sequence. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional**, v. 7, n. 1, p. 119-126, 2006.
- [11] SOKHUMA, K. Padovan Q-matrix and the generalized relations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 7, n. 56, p. 2777-2780, 2013.