**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 19, dez. 2020

Luciano Aparecido Magrini

IFSP - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo

magrini@ifsp.edu.br

Funções *wavelet* e transformada *wavelet* contínua: representação simultânea nos domínios do tempo e da frequência

Wavelet functions and continuous wavelet transform:
simultaneous representation in time and frequency domains

Resumo

O objetivo deste artigo é o de apresentar as funções *wavelet* e a transformada *wavelet* contínua enfatizando a representação de funções, ou sinais, simultaneamente nos domínios do tempo e da frequência, sendo este último termo interpretado em seu significado físico. Trata-se de tema atual e recente de pesquisa com poucas referências de qualidade em Língua Portuguesa e com o qual os estudantes de Matemática, em geral, não possuem contato durante sua formação. O trabalho apresenta os conceitos fundamentais pertinentes às *wavelets* e, via exemplos, apresenta ilustrações simples, porém didáticas, dos tópicos considerados. Não há pretensão alguma em se fazer uma exposição completa e exaustiva, haja vista a existência de profícua literatura de referência em Língua Inglesa. Espera-se que ao final da leitura deste trabalho o leitor sinta-se motivado a estudar *wavelets* tanto em seus aspectos teóricos quanto em seus aspectos numérico/computacional e aplicado.

Palavras-chave: *Wavelets*. Transformada *wavelet* contínua. Domínios do tempo e da frequência. Análise tempo-escala.

Abstract

This work presents the wavelet functions and the continuous wavelet transform, emphasizing the representation of functions, or signals, simultaneously in the Time and Frequency Domains; here, the word Frequency is used in the physical sense. The wavelets it is a actual research field but with few quality references in Portuguese and, in general, undergraduate students in Mathematics do not study the themme along your initial formation. This article presents the fundamental concepts about wavelets and, using simple examples presents the principal topics about then. We do not pretend to write a complete and exhaustive exposition, once there are several good and rigorous references in English but we hope that the reader fell yourself motivated to study the wavelets in their theoretical, numerical, computational and applied aspects after read of this paper.

Keywords: Wavelets. Continuous wavelet transform. Time and frequency domains. Time-scale analysis.

1 Introdução

Consideramos neste trabalho apenas o espaço das funções reais ou complexas quadrado-integráveis, isto é, o espaço cujos elementos são funções de uma variável real ou complexa cujo quadrado do valor absoluto é integrável sobre toda a reta real, embora generalizações das discussões apresentadas possam ser feitas considerando outros espaços de funções.

Sob uma perspectiva histórica o interesse pela decomposição de funções f como séries infinitas envolvendo senos e cossenos, correspondendo ao que hoje se conhece como série de Fourier, deve-se às pesquisas do matemático francês Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830) na área de condução do calor publicadas em sua obra principal, *Théorie Analytique de la Chaleur*, de 1822, onde é dada ênfase à representação de funções f via séries envolvendo senos e cossenos de frequências angulares bem definidas (FOURIER, 1822).

Definimos os harmônicos fundamentais como os elementos do conjunto de frequências angulares presentes na representação de uma função f como uma série de Fourier. No caso de f ser periódica ou ser a soma de um conjunto finito de funções $\{f_i\}_{i=1,2,\dots,n}$ periódicas, o correspondente conjunto de harmônicos é finito contendo apenas 1 ou n frequências fundamentais, respectivamente. No caso em que f é não periódica podemos aproximá-la tão bem quanto se queira considerando a aplicação de um truncamento na série de Fourier após um certo número de termos.

Nas áreas aplicadas, em que f é em geral uma função cuja variável independente tem o significado físico da grandeza escalar tempo, diz-se que f está representada no domínio do tempo. O domínio do tempo, contudo, não se mostra como o ideal para as áreas aplicadas em que se buscam detectar periodicidades ou comportamentos similares em fenômenos típicos da Astronomia, Física Solar e/ou Geofísica Espacial, por exemplo.

Assim, fundamentada nas descobertas de Fourier acerca da representação de funções, na simplicidade da representação via harmônicos no caso de funções periódicas f e na possibilidade de aproximar funções não periódicas por combinações lineares de funções periódicas surge a transformada de Fourier (FT) que, por excelência, é o instrumento matemático adequado para se decompor uma função f em suas frequências fundamentais, revelando-as.

Ainda que f não seja periódica a aplicação da FT revela o conteúdo frequencial de maior relevância presente em f cuja soma dos senos correspondentes é uma aproximação periódica suficientemente boa de seu comportamento. Surge, portanto, um novo domínio em que as funções f são representadas pelas frequências que as compõe, denominado domínio da frequência.

Contudo, o processo de identificação do conteúdo frequencial presente em uma função f via FT implica na perda de toda informação no domínio do tempo de modo que se conhecem as frequências fundamentais de f mas não se tem informação alguma sobre os instantes de tempo em que estas frequências manifestam-se.

Neste trabalho apresentamos algumas relações entre os domínios do tempo e da frequência mostrando que a dicotomia de representação neles pode ser atenuada, de modo que somos capazes de visualizar uma função f nos dois domínios ainda que com limitações, através da análise tempo-escala performada por uma transformada integral envolvendo as denominadas funções *wavelet*.

O artigo está organizado como segue: na Seção (2) apresentamos os fundamentos básicos sobre a FT em conjunto com uma discussão sobre a dualidade da representação em tempo e em frequência; a exposição é breve mas referenciada cuidadosamente para auxiliar o leitor que deseja aprofundar-se nos tópicos tratados. Na Seção (3) definimos as funções *wavelet* e apresentamos as suas principais propriedades em conjunto com alguns exemplos ilustrativos. A transformada *wavelet* contínua (CWT) e a análise tempo-escala são apresentadas na Seção (4) com alguns exemplos e na Seção (5) apresentamos as conclusões.

2 Preliminares

Nesta seção apresentamos uma breve exposição do espaço das funções quadrado-integráveis e da FT cujas referências foram cuidadosamente escolhidas com o objetivo de oferecer ao leitor que deseja se aprofundar na teoria aqui exposta bons materiais de consulta e estudo. A exposição é bastante sucinta pelo fato de que os tópicos que aqui tratamos não são nosso objeto principal de discussão mas cujo conteúdo constitui um pré-requisito importante para a boa compreensão das ideias expostas no restante do trabalho.

Consideramos o espaço das funções f quadrado-integráveis, denotado por $L^2(\mathbb{C})$, ou seja, o espaço das funções f para as quais

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt < \infty \quad (1)$$

onde se define naturalmente o produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ entre elementos f, g quaisquer de $L^2(\mathbb{C})$ por

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f \bar{g} dt, \quad (2)$$

sendo $\bar{g}$ o complexo conjugado de g .

O espaço $L^2(\mathbb{C})$ munido do produto interno definido pela Equação (2) define um espaço de Hilbert, ou seja, um espaço completo em relação à norma $\| \cdot \|$ induzida por este produto interno. A norma é definida de modo usual pela Equação (3):

$$\|f\|_{L^2(\mathbb{C})} = \sqrt{\langle f, f \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dt}. \quad (3)$$

Definição 1 *Seja $f \in L^2(\mathbb{C})$ qualquer. A energia de f é definida por:*

$$E_f = \sqrt{\langle f, f \rangle}. \quad (4)$$

Note que a Definição (1) permite que $L^2(\mathbb{C})$ seja caracterizado como o espaço das funções cuja medida de energia é finita.

Definição 2 *Seja $f \in L^2(\mathbb{C})$ uma função contínua por partes qualquer. Definimos sua transformada de Fourier (FT), denotada por $\hat{f}(\omega)$, pelo produto interno entre f e a exponencial complexa $\exp(i\omega t)$ com $\omega \in]0, 2\pi]$ de acordo com a Equação (2):*

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (5)$$

onde a constante multiplicativa $1/(\sqrt{2\pi})$ é uma constante de normalização.

É bastante comum encontrar expressões que definem a FT utilizando outras constantes de normalização que não a utilizada por nós na Equação (5) e até mesmo encontrar expressões para a FT quem nem utilizam constante alguma.

A escolha por uma constante ou outra tem implicações apenas na constante que aparecerá na fórmula que expressa a transformada inversa de Fourier (IFT) não havendo nenhuma outra implicação em termos teóricos ou de aplicação.

De modo geral, Sendo c_1 e c_2 as constantes de normalização da FT e da IFT tem-se que

$$c_1 \cdot c_2 = \frac{1}{2\pi},$$

conforme demonstrado em Katznelson, 2004.

Com nossa escolha de normalização para a FT, a Proposição (3) apresenta a expressão que nos permite calcular a transformada inversa de Fourier. Para a demonstração, consulte Katznelson, 2004.

Proposição 3 *Seja $f \in L^2(\mathbb{C})$ contínua por partes. A FT de f definida pela Equação (5) é inversível cuja inversa é dada por*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) \exp(i\omega t) d\omega. \quad (6)$$

Observe a semelhança entre as Equações (5) e (6). A simetria entre elas justifica nossa escolha pela constante de normalização adotada.

A representação de uma função $f \in L^2(\mathbb{C})$ nos domínios do tempo ou da frequência é dotada de isometria, ou seja, a energia da função não se altera quando se passa de um Domínio a outro; este fato é relevante porque permite a transposição entre os domínios sem a introdução de redundâncias e também sem a perda da informação contida em f . Este resultado é conhecido como teorema de Parseval e é, na verdade, um corolário direto do teorema de Plancherel bastando que consideremos $f = g$ em conjunto com a Definição (1).

Teorema 4 (Plancherel) *Considere f e g funções quadrado integráveis e contínuas em todos os pontos de seus domínios com FT $\hat{f}(\omega)$ e $\hat{g}(\omega)$, respectivamente. Então:*

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \langle \hat{f}(\omega), \hat{g}(\omega) \rangle. \quad (7)$$

A FT apresenta uma lista de propriedades altamente relevantes em suas aplicações. Destacamos neste trabalho uma delas: Se f é real então seu espectro de potência $S(\omega)$ é simétrico em torno de $\omega = \pi$. A demonstração desta propriedade e a consulta às demais pode ser encontrada em Oliveira, 2010.

Definição 5 *Considere $f \in L^2(\mathbb{C})$ uma função contínua por partes qualquer cuja FT é $\hat{f}(\omega)$. O espectro de potência de Fourier para f , denotado por $S(\omega)$, é definido por:*

$$S(\omega) = |\hat{f}(\omega)|^2. \quad (8)$$

O espectro de potência $S(\omega)$ revela as amplitudes dos senos constituintes de f e geralmente é ele a grandeza que é representada na visualização no domínio da frequência. O Exemplo (6) ilustra este fato.

Exemplo 6 *Considere a função $f = f_1 + f_2$ onde $f_1 = 6 \sin(300\pi t)$ e $f_2 = 4 \sin(800\pi t)$. Notemos que f é, em termos de frequências fundamentais, a soma de 150 Hz com amplitude 6 e 400 Hz com amplitude 4 considerando que a frequência é o inverso do período. A Figura (1) exibe as representações em tempo e em frequência da função f .*

Note que a aplicação da FT em f revela as componentes frequenciais 150 Hz e 400 Hz corretamente e que, no domínio da frequência o espectro de potência apresenta amplitudes 6 e 4, corretamente. Como f é real, a linha tracejada em preto no painel ilustra a simetria em torno de $\omega = \pi$.

Figura 1: Representação da f nos domínios do tempo e da frequência. Adaptado de Magrini, 2020.

Funções como a f , ilustrada no Exemplo (6), são ditas estacionárias porque as frequências que as compõe coexistem em todos os pontos nos quais definimos a f . Este porém, não é o caso nas aplicações práticas em que, a não estacionariedade manifesta-se: uma mesma função f proveniente de dados experimentais ou observacionais, por exemplo, pode conter um conjunto de frequências Ω que varia com o tempo. Nestes casos, a FT também revela corretamente as frequências que aparecem em f ainda que por apenas um instante de tempo; contudo, novamente não conseguimos obter informação alguma sobre os instantes de tempo em que ocorrem o surgimento/desaparecimento e alternância das frequências componentes de f . O Exemplo (7) ilustra esta afirmação.

Exemplo 7 Considere a função g definida por partes:

$$g = \begin{cases} 6 \operatorname{sen}(300\pi t), & t \leq 0 \\ 4 \operatorname{sen}(800\pi t), & t > 0, \end{cases} \quad (9)$$

cujo conteúdo frequencial é o mesmo da função f do Exemplo (6) mas agora, na presença da não estacionariedade. Note que, definida desta forma, em $t = 0$ existe uma alternância das frequências componentes de g .

Figura 2: Representação da g nos domínios do tempo e da frequência. Adaptado de Magrini, 2020.

Considerando os Exemplos (6) e (7) vemos que apesar de serem distintas no domínio do tempo, as funções f e g possuem o mesmo espectro de potência, ou seja, são “iguais” no domínio da frequência. Isto acontece porque a FT ao localizar perfeitamente as informações em Frequência perde totalmente a informação em Tempo.

Em 1946, o engenheiro elétrico Denis Gabor (1900 - 1979) demonstrou o equivalente ao Princípio da Incerteza de Heisenberg para uma função f e sua respectiva FT $\hat{f}$. Mais precisamente, sendo Δt e $\Delta \omega$ as resoluções de visualização nos domínios do tempo e da frequência conforme ilustrado na Figura (3) temos (GABOR, 1946):

$$\Delta \omega \cdot \Delta t \geq c, \quad (10)$$

em que c é uma constante real.

Para detalhes sobre a demonstração deste resultado e sobre os possíveis valores para a constante c no contexto das representações no Tempo e na Frequência, consulte Gabor, 1946. A Análise de Gabor ainda é uma área ativa em pesquisa e uma referência mais avançada que recomendamos é Gröchenig, 2003.

Considerando a representação gráfica do plano tempo-frequência que apresentamos na Figura (3), a Equação (10) tem a seguinte interpretação: a área do retângulo A cujos lados são determinados pelas resoluções Δf e $\Delta \omega$ não pode ser menor que a constante c relacionada ao grau de incerteza existente na representação de uma função f no plano tempo-frequência.

Deste modo para diminuir a incerteza na representação no domínio da frequência devemos necessariamente admitir seu aumento no domínio do tempo e vice-versa. Em linguagem menos rigorosa podemos dizer que as resoluções nestes dois domínios são, em um certo sentido, inversamente proporcionais.

Figura 3: Plano tempo-frequência. Produção: o autor (baseado em Gabor, 1946).

Neste contexto conseguimos entender o porquê de a FT ser capaz de fazer a representação de uma função perfeitamente no domínio da frequência mas com perda total da informação no tempo. Note que a base exponencial complexa da FT define um comportamento oscilatório sobre toda a reta t e, portanto $\Delta t \rightarrow \infty$, temos via Equação (10) que $\Delta \omega \rightarrow 0$ uma vez que neste caso extremo a

área do retângulo A , relacionada com a incerteza c da representação tende a ser nula. Isto acontece porque, no limite, o retângulo A “se estrangula” em uma reta. Em outras palavras, não havendo localização temporal, a localização em frequência é exata/perfeita.

No início dos anos 1980 o geofísico Jean Morlet (1931 - 2007) ao notar esta dualidade entre localização no tempo e na frequência utilizou, pela primeira vez, funções base oscilatórias definidas apenas sobre um suporte compacto K da reta real para analisar dados relativos a abalos sísmicos, ou seja, funções base com localização temporal (MORLET *et al*, 1982).

O citado trabalho de Morlet é considerado o marco histórico do que hoje conhecemos como análise tempo-escala que é realizada com a utilização de funções *wavelet*, tema deste artigo. As bases matemáticas começaram a ser lançadas de modo rigoroso dois anos depois, em 1984, quando Morlet em trabalho conjunto com o físico Alex Grossmann (1930 - 2019) publicou um trabalho pioneiro sobre a representação de funções f via *wavelets* (GROSSMAN; MORLET, 1984).

3 Funções *wavelet*

Consideremos ψ uma função em $L^2(\mathbb{C})$. Se ψ for oscilatória sobre um compacto $K \subset \mathbb{C}$ decaindo rapidamente para zero no complementar de K e se possuir energia unitária, de acordo com a Definição (1), então ψ é uma função *wavelet*. A condição oscilatória sobre um compacto K é conhecida na literatura como condição de admissibilidade e a segunda condição é a condição de energia unitária. Formalmente, temos a definição a seguir (DAUBECHIES, 1999):

Definição 8 Uma função ψ real ou complexa e quadrado-integrável é uma função *wavelet* se as duas condições a seguir são simultaneamente satisfeitas:

1. **Condição de admissibilidade:**
$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

2. **Energia unitária:**
$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|^2 dt = 1.$$

A condição de admissibilidade também é conhecida como propriedade de média nula. Ela nos garante que ψ apresenta comportamento oscilatório; de fato, se pensarmos na integral como a medida da área delimitada por uma curva e o eixo das abscissas ela só se anula se as “áreas positivas” cancelarem as “áreas negativas”. Mas isto só acontecerá se ψ oscilar sobre K .

A condição de energia unitária impõe uma normalização da medida de energia da função *wavelet*: note que, como *a priori* a função ψ é quadrado-integrável então a integral dada pela condição 2 sempre converge para algum $M \in \mathbb{C}$. Para que ψ possua energia unitária basta multiplicá-la por $M^{-1/2}$ (ADDISON, 2002).

Exemplo 9 Uma das funções *wavelet* mais difundidas na literatura¹ é denominada *wavelet de Morlet*. Ela é o produto de uma exponencial complexa adimensional e uma função gaussiana:

$$\psi_M(t) = \frac{1}{\pi^{0,25}} \exp(i \omega_0 t) \exp\left(\frac{-t^2}{2}\right), \quad (11)$$

¹A Equação (11) é, na verdade, uma das possíveis expressões utilizadas para a *wavelet* de Morlet; outras são possíveis e até mesmo há uma versão real desta função. Magrini, 2020 apresenta cinco destas expressões, uma das quais é a utilizada neste texto.

onde $\omega_0 \geq 5 \in \mathbb{R}$ é um parâmetro real e a constante $1/\pi^{0,25}$ é a normalização para a condição de energia unitária.

Escolhemos sempre $\omega_0 \geq 5$ porque, estritamente falando, ψ_M não tem média nula mas esta pode ser tornada tão próxima de zero que, em termos de aplicações, a consideramos como uma função admissível (ADDISON, 2002).

Figura 4: Wavelet de Morlet com $\omega_0 = 5$. Produção: o autor.

Observemos na Figura (4) que a função ψ_M é suportada somente no compacto $K = [-4, 4] \in \mathbb{R}$, fora do qual ela se anula (aqui, a variável t não está associada com a grandeza física tempo).

Definição 10 Se $f \in L^2(\mathbb{C})$ é uma função não nula apenas sobre um compacto $K \in \mathbb{R}$ dizemos que esta função é bem localizada no domínio do tempo.

Parâmetro adimensional ω_0	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \text{Re}(\psi_M(t)) dt \right $	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \text{Imag}(\psi_M(t)) dt \right $	$\left \int_{-\infty}^{\infty} \psi_M(t) dt \right $	Numericamente admissível
1,0	$1,14 \cdot 10^1$	0,00	$1,14 \cdot 10^1$	não
2,0	$2,55 \cdot 10^{-1}$	0,00	$2,55 \cdot 10^{-1}$	não
π	$1,35 \cdot 10^{-2}$	0,00	$1,35 \cdot 10^{-2}$	não
5,0	$4,19 \cdot 10^{-5}$	0,00	$4,19 \cdot 10^{-5}$	sim
2π	$3,75 \cdot 10^{-5}$	0,00	$3,75 \cdot 10^{-5}$	sim

Tabela 1: Admissibilidade numérica de ψ_M . Adaptado de Magrini, 2020.

Na Tabela (1) apresentamos a verificação numérica da condição de admissibilidade para ψ_M considerando algumas escolhas de ω_0 e fazendo o arredondamento para duas casas decimais. Realizamos as integrações numéricas via regra do trapézio. Observamos que a não admissibilidade

para alguns valores do parâmetro ω_0 decorrem da parte real da *wavelet* de Morlet uma vez que a parte imaginária é sempre admissível.

Uma apresentação de outras funções *wavelet* pode ser encontrada em Domingues *et al*, 2016, onde inclusive os autores mostram como algumas destas funções são definidas diretamente no domínio da frequência. Dado o caráter introdutório deste artigo optamos por considerar apenas as *wavelets* definidas no tempo. Independente de ser definida em um ou outro domínio o que de fato importa é que todas elas apresentam boa localização qualquer que seja o domínio de representação.

Definição 11 *Seja ψ uma função wavelet. Definimos sua frequência central ω_c como a frequência angular para a qual o espectro de potência de Fourier é máximo.*

Para *wavelets* reais conhecer ω_c implica em conhecer a cossenoide que reproduz exatamente sua ondulação de maior amplitude, ou a senoide, desde que seja considerado um deslocamento de $\pi/2$ radianos. No caso das complexas, ω_c caracteriza perfeitamente a cossenoide/senoide que reproduz a ondulação preponderante existente nas partes real e imaginária de ψ , respectivamente.

Exemplo 12 *Consideremos mais uma vez a wavelet de Morlet definida pela Equação (11) com $w_0 = 5,0$. O cálculo da FT nos indica $\omega_c = 0,8$ Hz como sua frequência central. Deste modo, a cossenoide/senoide que reproduz a frequência das ondulações preponderantes de suas partes real/imaginária são aquelas cujo argumento é $2\pi \omega_c t$. A Figura (5) representa geometricamente este fato.*

Figura 5: Paineis superior: frequência central de ψ_M para $\omega_c = 5,0$. Paineis inferior: reprodução da frequência central via cossenoide/senoide de mesma frequência angular. Produção: o autor.

Através da introdução de parâmetros reais $a > 0$ e τ podemos construir versões dilatadas, comprimidas e transladadas das funções *wavelet*. Dizemos que a é o parâmetro de escala considerada enquanto τ é o parâmetro de translação. Como estes parâmetros são reais, admitimos que eles variam continuamente sobre $\mathbb{R}$ de modo que eles definem uma família de funções *wavelet*.

Definição 13 Seja ψ uma função *wavelet* e sejam a e τ parâmetros reais tais que $a > 0$ e $a \neq 1$ variando continuamente sobre $\mathbb{R}$. Definimos

$$\psi_{a,\tau}(t) = \left(\frac{t - \tau}{a} \right), \quad (12)$$

como a família de funções *wavelet* caracterizada por ψ , denominada “*wavelet mãe*”, para todo $t \in \mathbb{R}$.

Notemos, via análise da Equação (12), que para $0 < a < 1$ ocorre uma contração da função ψ e que para $a > 1$ ocorre uma dilatação. A contração de uma onda a faz oscilar mais rapidamente e a dilatação a faz apresentar, geometricamente, oscilações cujos comprimentos de onda são maiores. No contexto das *wavelets* isto implica que versões contraídas “emulam” conteúdo de alta frequência e versões dilatadas “emulam” conteúdo de baixa frequência.

Estas emulações, denominadas pseudo-frequências e denotadas por ω_a , estão associadas à frequência central da ψ original de acordo com a Equação (13) e dependem explicitamente do parâmetro a de escala pela Equação (ABRY, 1997):

$$\omega_a = \frac{\omega_c}{a\Delta t}, \quad (13)$$

em que Δt é o período de amostragem utilizado na discretização da função f .

Consideremos inicialmente o caso mais simples (teórico) em que $\Delta t = 1$, de sorte que a razão entre a pseudo-frequência ω_a associada à escala a e a frequência central ω_c da função ψ é igual ao parâmetro de escala a considerado ou seja, a pseudo-frequência ω_a é inversamente proporcional ao valor de a . Imediatamente isto implica que baixos valores para o parâmetro a implicam em emulações de altas frequências e vice-versa. Esta proporcionalidade inversa entre escala e frequência se mantém ainda que consideremos $\Delta t \neq 1$, como se deduz da Equação (13).

Exemplo 14 A Figura (6) ilustra as pseudo-frequências da *wavelet* de Morlet (com $\omega_0 = 5,0$) conforme se consideram distintos valores para o parâmetro de escala a .

Figura 6: Pseudo-frequências associadas a diferentes escalas para ψ_M . Produção: o autor.

Na Figura (7) podemos ver o efeito do parâmetro de escala no tempo. Como ilustramos na Figura (4), a wavelet de Morlet é suportada no compacto $K = [-4, 4]$. Notemos que o comprimento de K também varia proporcionalmente ao parâmetro de escala a considerado. Ressaltamos que as partes real e imaginária estão plotadas de azul e vermelho, respectivamente e fixamos o eixo das abscissas em $K = [-16, 16]$ para todas as figuras.

Figura 7: Relação entre o parâmetro de escala e o suporte compacto K considerando ψ_M : (A), (B), (C) e (D) correspondem aos parâmetros $a = 0,25$, $a = 0,5$, $a = 2$ e $a = 4$, respectivamente. Produção: o autor.

Ainda em relação à Equação (13) observamos que considerar $\Delta t = 1$ significa, em sentido físico, que a função f é amostrada a 1 Hz, ou seja, uma amostra é registrada (em um computador, por exemplo) por segundo. Isto não corresponde ao que é, de fato, necessário nas aplicações em que as taxas de amostragens são determinadas de acordo com o Teorema de Nyquist², segundo o qual a frequência de amostragem $1/\Delta t$ deve ser igual a pelo menos duas vezes a maior frequência (em Hz) que se deseja analisar (NYQUIST, 1928).

Como em geral não se sabe o conteúdo frequencial presente nos casos experimentais/observacionais é comum que Δt seja tomado bem pequeno em termos de grandeza para que seja explorada a possibilidade da existência de conteúdo de alta frequência.

O parâmetro τ de translação, apesar de importante, não requer maiores comentários; seu uso é necessário apenas para fazer com que o conjunto dos suportes compactos da família de funções wavelet $\psi_{a,\tau}$ seja uma cobertura infinita para a reta real.

4 A transformada wavelet contínua

Nesta Seção apresentamos a CWT com alguns exemplos cujo objetivo é o de ilustrar a representação de uma função $f \in L^2(\mathbb{R})$ no plano tempo-escala (daí o nome análise tempo-escala). Dada a relação direta entre escala e frequência, de certa maneira estaremos lidando com a representação da f no plano tempo-frequência.

O instrumento matemático para conseguirmos esta representação de f de modo simultâneo nos dois domínios é a CWT cuja definição apresentamos a seguir.

²Em homenagem ao engenheiro eletrônico Harry Nyquist (1889-1976).

Definição 15 Seja $f \in L^2(\mathbb{R})$ e seja ψ uma função wavelet. A Transformada Wavelet Contínua de f é definida por

$$W_f^\psi(a, \tau) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{\psi_{a,\tau}(t)} dt = \langle f, \psi \rangle, \quad (14)$$

onde $1/\sqrt{a}$ é uma constante de normalização utilizada para que a energia de f seja a mesma independente da escala, $\tau \in \mathbb{R}$ é o parâmetro de translação da função ψ no tempo e $\overline{\psi}$ é o conjugado complexo de ψ .

Note que esta definição é análoga à Definição (5) da transformada de Fourier mas utilizando como base de decomposição uma função wavelet ao invés da base exponencial complexa, trazendo para esta transformada integral a propriedade de localização no domínio do tempo (e, consequentemente, no domínio da frequência).

A CWT é definida exatamente pelo produto interno usual em $L^2(\mathbb{R})$, de acordo com a Equação (2), entre f e ψ e neste contexto podemos associá-la ao conceito de energia, tal qual definida pela Equação (1).

A notação $W_f^\psi(a, \tau)$ é sugestiva em dois aspectos: por um lado ela torna explícita a dependência direta da CWT em relação à função wavelet ψ escolhida em sua aplicação e por outro, ela indica a dependência, também direta, do resultado da análise em relação aos parâmetros de escala e translação no tempo que são considerados. Uma discussão sobre a escolha da função wavelet a ser considerada na aplicação da CWT é feita em Domingues *et al*, 2016.

Assim, $W_f^\psi(a, \tau)$ é uma matriz de dimensões $m \times n$ em que m e n indicam respectivamente o número de escalas consideradas na análise e o comprimento do intervalo em que f se define; na linguagem aplicada/computacional, nos referimos simplesmente ao comprimento de f . A esta matriz damos o nome de matriz dos coeficientes wavelet.

Os coeficientes wavelet em valores absolutos e ao quadrado são interpretados como mensurações locais de energia e representam uma medida do quanto f e $\psi_{a,\tau}$ são similares no domínio do tempo. Quanto maior a similaridade maior é a energia medida e vice-versa. Formalmente temos a seguinte definição:

Definição 16 Seja $W_f^\psi(a, \tau)$ a matriz dos coeficientes wavelet obtida pela aplicação da Equação (14). Definimos o escalograma de energia de f pela matriz

$$\mathbb{E}(a, \tau) = |W_f^\psi(a, \tau)|^2 \quad (15)$$

e interpretamos suas entradas como medidas locais da energia presente em f na escala a e tempo $t = \tau$.

A medida total da energia de f em cada escala a nos permite identificar, via Equação (13), as frequências presentes em f mas, agora, com informação sobre os instantes de tempo em que estas frequências porventura aparecem ou desaparecem. Esta observação motiva a definição a seguir;

Definição 17 Definimos o espectro global wavelet $\mathbb{G}(\omega)$ pela integração do escalograma ao longo do tempo, isto é,

$$\mathbb{G}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}(a, \tau) d\tau. \quad (16)$$

Frick *et al*, 1997, chama a atenção para o fato de que o espectro global *wavelet* $\mathbb{G}(\omega)$ de uma função representa uma versão suavizada do seu espectro de potência de Fourier $|S(\omega)|^2$ de acordo com o definido pela Equação (8) mas não se limita a isso. De acordo com Daubechies, 1999, a leitura e interpretação do conteúdo de alta frequência presente em uma função f é difícil de ser feita devido às “rajadas” com que se manifestam no domínio da frequência. Deste modo, (16) por ser uma versão suavizada do espectro de potência torna este processo de análise das altas frequências menos complexo.

Como o parâmetro de escala a tem variação contínua, a análise tempo-escala via CWT é dita redundante e ela indica as sub-bandas de frequência presentes em uma função f .

Apresentamos, na sequência, dois exemplos ilustrativos da aplicação da CWT. Consideramos as funções f e g apresentadas nos Exemplos (6) e (7) diferentes entre si mas cujos espectros de Fourier são idênticos. Nos dois exemplos, o período de amostragem considerado é $\Delta t = 0,001$.

Exemplo 18 Consideremos a função $f = f_1 + f_2$ onde $f_1 = 6 \text{ sen}(300\pi t)$ e $f_2 = 4 \text{ sen}(800\pi t)$, definida para todo $t \in [-\pi, \pi]$ que conforme Exemplo (6) é a soma de 150 Hz com 400 Hz e cuja maior contribuição em amplitude é dada pela primeira destas frequências.

Aplicando a CWT em f usando a *wavelet* de Morlet com $\omega_0 = 5$ (correspondendo à frequência central $\omega_c = 0,8 \text{ Hz}$) e com parâmetro de escala a considerado no intervalo real $I =]0, 10]$ com 1000 subdivisões (chamadas de octaves) chegamos às seguintes conclusões pela análise da Figura (8):

Figura 8: Análise tempo-escala para f . (Produção: o autor).

Existem “dois feixes” horizontais nitidamente destacados no escalograma cuja interpretação é a de que existem duas sub-bandas de frequência que estão presentes para todo $t \in [-\pi, \pi]$. Isto está de acordo com o que sabemos sobre f , que é estacionária, por construção

O espectro global wavelet $\mathbb{G}(a)$ exibe dois picos: um na escala 2,0 e outro na escala 5,3, aproximadamente. Em termos de frequências, via Equação (13), temos para $a = 2,0$:

$$\omega_{a=2,0} = \frac{\omega_c}{a \Delta t} = \frac{0,8}{2 \cdot 10^{-3}} = 400 \text{ Hz}, \quad (17)$$

e para $a = 5,3$ com cálculo análogo, encontramos $\omega_{a=5,3} \approx 151 \text{ Hz}$. Isto implica que as sub-bandas de frequência significativas/presentes em f estão em torno de 400 e 151 Hz, como exatamente acontece. Além disso, o feixe correspondente à escala $a = 5,3$ apresenta maior energia e isto implica que a sub-banda de frequência a ela associada tem maior contribuição de energia em f do que a outra; note que isto está também de acordo porque a amplitude da senoide correspondente à escala $a = 2$ tem maior amplitude.

Por fim, enfatizamos que, dado o caráter altamente oscilatório da f , optamos por apresentar, no painel superior da Figura (8) um zoom em torno de $t = 0$ que ilustra perfeitamente o comportamento da função e enfatizamos que neste caso, t não tem significado físico de tempo.

Exemplo 19 Consideramos agora a função g definida por

$$g = \begin{cases} 6 \sin(300\pi t), & t \leq 0 \\ 4 \sin(800\pi t), & t > 0, \end{cases} \quad (18)$$

apresentada no Exemplo (7). Aplicando a CWT exatamente como feito e descrito no Exemplo (18) obtemos o resultado mostrado na Figura (9).

Figura 9: Análise tempo-escala para g . Produção: o autor.

Neste caso é possível identificar o instante em que a função g sofre alteração frequencial em seu conteúdo, alternando a sub-banda em torno de 150 Hz para a sub-banda frequencial em torno de 400 Hz. Os cálculos relacionando as escalas e as sub-bandas de frequência são análogos aos apresentados no Exemplo (18). O que deve ser destacado aqui é que a análise tempo-escala foi capaz de detectar corretamente o instante de tempo em que aconteceu a mudança frequencial em g , caracterizando-a portanto, como um função estacionária por partes.

Note que a variação no comportamento temporal da g em relação à f se reflete também na magnitude do espectro global wavelet $\mathbb{G}(a)$ calculado que, no presente caso tem ordem de grandeza igual a 10^4 e que nele também são visualizadas as duas sub-bandas de frequência componentes de g . Enfatizamos que, também neste caso, apresentamos no painel superior da Figura (9) um zoom da função em torno de $t = 0$ para melhor visualização.

5 Conclusões

O presente trabalho apresenta uma exposição introdutória das funções *wavelet* e da análise tempo-escala.

A exposição feita mostra que a representação no domínio da frequência de uma função f quadrado-integrável via aplicação da transformada de Fourier identifica completamente todo o conteúdo frequencial de f mas esta acurácia na representação implica em perda completa da visualização de f no domínio do tempo devido à incerteza de representação no plano tempo-escala.

Nos casos de aplicação, em que precisamos da representação simultânea nos dois domínios, a análise tempo-escala, performada pela aplicação da transformada *wavelet* contínua, é o instrumento matemático adequado pois ao utilizar funções *wavelet* como bases de decomposição traz para a transformada integral a boa localização que as funções *wavelet* possuem nos domínios do tempo e da frequência.

6 Referências Bibliográficas

ABRY, P. **Ondelettes et turbulences**: multirésolutions, algorithmes de décomposition, invariance d'échelle et signaux de pression. Paris: Diderot, 1997.

ADDISON, P. S. **The illustrated wavelet transform handbook**: introductory theory and applications in science, engineering, medicine and finance. 2nd ed. Boca Raton: Chemical Rubber Company Press, 2002.

BOTELHO, G.; PELLEGRINO, D.; TEIXEIRA, E. **Fundamentos de análise funcional**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2012.

DAUBECHIES, I. **Ten lectures on wavelets**. Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999.

DOMINGUES, M. O. *et al.* Explorando a transformada wavelet contínua. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 38, n. 3, p. e3314-1–e3314-19, 2016.

FOURIER, J. B. **Théorie analytique de la chaleur**. Paris: Chez Firmin Didot, père et fils, 1822.

FRICK, P. *et al.* Wavelet analysis of stellar chromospheric activity variations. **The Astrophysical Journal**, v. 483, n. 1, p. 426-434, 1997.

GABOR, D. Theory of communication. Part 1: The analysis of information. **Journal of the Institution of Electrical Engineers-Part III: Radio and Communication Engineering**, v. 93, n. 26, p. 429-441, 1946.

GRÖCHENIG, K. Uncertainty Principles for Time-Frequency Representations. *In*: FEICHTINGER, H. G.; STROHMER, T. (ed.). **Advances in Gabor Analysis**. Boston: Birkhäuser, 2003. (Applied and numerical harmonic analysis).

GROSSMANN, A.; MORLET, J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape. **SIAM Journal on Mathematical Analysis**, v. 15, n. 4, p. 723-736, 1984.

KATZNELSON, Y. **An introduction to harmonic analysis**. 3rd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2004.

MAGRINI, L. A. **Transformadas *wavelet* na análise de sinais com falha e na detecção da sincronização das dinâmicas lenta e rápida em sistemas caóticos com múltiplas escalas de tempo**. 271 f. Tese (Doutorado em Computação Aplicada) - Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais, São José dos Campos, 2020.

MORLET, J. *et al.* Wave propagation and sampling theory — Part I: complex signal and scattering in multilayered media. **Geophysics**, v. 47, n. 2, p. 203-221, 1982.

NYQUIST, H. Certain topics in telegraph transmission theory. **Transactions of the American Institute of Electrical Engineers**, v. 47, n. 2, p. 617-644, 1928.

OLIVEIRA, E. C.; TYGEL, M. **Métodos matemáticos para engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2010.