Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020
Iniciação Científica

O formalismo de Hamilton-Lagrange

The Hamilton-Lagrange formalism

Wyndam Baxter Cardoso
Universidade Federal do Delta do Parnaíba
wyndam22@gmail.com

Francisco de Paula Santos de Araújo Junior
Universidade Estadual do Piauí
pjhatata@hotmail.com

Anna Karla Barros da Trindade
Universidade Federal do Piauí
anna.trindade@ifpi.edu.br

Resumo

Este documento apresenta o princípio de Hamilton como forma alternativa para a resolução de problemas físicos, adjunto do forte rigor matemático instituido pela equação de Euler-Lagrange, por meio da solução do problema de pêndulo duplo, usando método de Newton e as equações de movimento de Lagrange; evidenciando através do embasamento teórico a eficácia do método de Hamilton para a interpretação de problemas complexos em mecânica. A metodologia baseia-se na revisão bibliográfrica, assim como também se caracteriza como um estudo que possui abordagem qualitativa, usando como instrumento a coleta de dados e análise documental. A utilização dos métodos resulta em soluções iguais para o mesmo sistema, o método de Newton requer um recurso algébrico complexo para chegar a resposta do problema, no entanto, o método de Hamilton é lépido na solução. Conclui-se que o formalismo de Hamilton é mais eficiente, em comparação ao método Newton, para a solução de sistemas de movimento com alto grau de liberdade.

Palavras-chave: Pêndulo Duplo. Método Variacional. Equação de Euler-Lagrange. Revisão Bibliográfica.

Abstract

This paper presents the Hamilton principle as an alternative form for solving physical problems, which is attached to the strong mathematical rigor instituted by the Euler-Lagrange equation, through the solution of the double pendulum problem using Newton's method and the equations of motion of Lagrange; evidencing through the theoretical basis the effectiveness of the Hamilton method for the interpretation of complex problems in mechanics. The methodology is based on bibliographical review, as well as being characterized as a qualitative study using data collection and document analysis as an instrument. The use of the methods results in equal solutions for the same system, the Newton method solution requires a complex algebraic solution to arrive at the problem response, however, the Hamilton method is lepid in the solution. It is concluded that the Hamilton formalism is more efficient, in comparison to the Newton method, for the solution of systems of movement with high degree of freedom.

Keywords: Double Pendulum. Variational Method. Euler-Lagrange equation. Literature review.

Artigo recebido em mar. 2020 e aceito em jun. 2020

1 Introdução

A primeira formulação de um princípio de extremo na mecânica, advêm de Pierre-Louis Moreau de Maupertius (1698-1759), que em 1744 descreveu a natureza como "econômica em todas suas ações". Denota-se atualmente de ação reduzida o que Maupertius obteve em seus estudos sobre fenômenos na mecânica. A ideia de menor esforço, contudo, é antiga e já tinha sido observada por Heros de Alexandria (10-70 DC) que descreveu que raios de luz em meios homogêneos viajavam sempre em linha reta, fazendo assim uma alusão de que a luz sempre percorria o menor caminho entre dois pontos, fato que foi estudado e ampliado por Pierre de Fermat (1607-1665). Entre os que deram continuidade aos estudos de Maupertius, pode-se incluir Euler e Leibniz, porém a formulação moderna do princípio de extremo no campo da mecânica com base na lagrangeana: $L = T - U$ deve-se a William Rowan Hamilton (1805-1865). Segundo Thornton e Marion (2014, p. 183): "os nomes de Peter Dirichlet (1805-1859) e Karl Weierstrass (1815-1879) são especificamente associados com o estabelecimento da base matemática rigorosa para a matéria."

1.1 Condições de otimalidade de um funcional e convexidade

O problema clássico do cálculo das variações é a minimização de funções na forma:

$$J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx \tag{1}$$

de modo que o intervalo $[x_1, x_2]$ é fixo e a aplicação: $f : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é conhecida. A minimização do funcional definido em 1 realiza-se pelas funções $y : [x_1, x_2] \to \mathbb{R}$ continuamente diferenciáveis em $[x_1, x_2]$.
Para que o funcional 1 seja minimizado ele deve estar, via de regra, sujeito a algumas restrições:

- Condições impostas a y nas extremidades do intervalo, isto é, $y(x_1) = y_1$ e/ou $y(x_2) = y_2$;
- Exigir que para $x \in [x_1, x_2]$, $f(x, y(x), y'(x)) \equiv 0$ onde $f : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;
- Exigir que $\int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx = c$, onde $f : [x_1, x_2] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $c \in \mathbb{R}$.

Segundo Leitão (2001, p. 4):

> O primeiro tipo de restrição é denominado **condição de contorno** e pode ser exigido em ambos ou em apenas um dos extremos $[x_1, x_2]$. O segundo tipo de restrição é denominada **restrição lagrangeana**, devido a sua semelhança com as restrições presentes nos problemas da mecânica lagrangeana. O terceiro tipo é denominada **restrição isoperimétrica**(integral), uma vez que os primeiros problemas de interesse relacionados à esta restrição apresentavam a exigência dos candidatos y terem todos o mesmo *comprimento* (fato relacionado a escolha $f(x, y, y') = |y'|$).

Considerando a seguinte família de problemas variacionais:

$$\begin{cases} Minimizar \;\; J(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x))dx \\ Sujeito\ a \\ y \in Y_{fa} = \{y \in C^1[x_1, x_2] \mid y(x_1) = y_1 \ e \ y(x_2) = y_2\} \end{cases} \tag{2}$$

Denota-se que Y_{fa} é o conjunto das funções admissíveis ou viáveis. Para tanto, segundo Leitão (2001, p. 4), "é preciso distinguir entre mínimos locais e globais do funcional." Assim, define-se:

CARDOSO, W. B.; ARAÚJO JUNIOR, F. P. S.; TRINDADE, A. K. B. O formalismo de Hamilton-Lagrange. **C.Q.D. – Revista Eletrônica Paulista de Matemática**, Bauru, v. 18, p. 89–111, jul. 2020. Edição Iniciação Científica.
DOI: 10.21167/cqdvol18ic202023169664wbcfpsajakbt89111 Disponível em: www.fc.unesp.br/departamentos/matematica/revista-cqd/

Definição 1.1.1 *$\overline{y} \in Y_{fa}$ é denominado mínimo global de $J : Y_{fa} \to \mathbb{R}$ quando a desigualdade*

$$J(y) \geq J(\overline{y}),$$

é satisfeita para todo $\overline{y} \in Y_{fa}$.

Para dar continuidade com a definição de mínimos locais de J é necessário primeiramente fazer algumas observações importantes sobre a topologia dos espaços $C[x_1, x_2]$ e $C^1[x_1, x_2]$.

Observação 1.1.1 *O espaço vetorial $C[x_1, x_2]$ é completo (Banach) com a norma do supremo (ou Tschebyscheff)*

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [x_1, x_2]} |f(t)|, \ f \in C[x_1, x_2]$$

Logo, $d(f, g) = \|f - g\|_\infty$ define uma métrica em $C[x_1, x_2]$. De forma análoga é possível construir uma métrica para $C^1[x_1, x_2]$ com distância $\|f - g\|_{1,\infty} = \|f - g\|_\infty + \|f' - g'\|_\infty$, para $f, g \in C^1[x_1, x_2]$.

□ □ □

Definição 1.1.2 *$\overline{y} \in Y_{fa}$ é denominado mínimo local fraco de J quando*

$$\exists\, \delta > 0 \ tq \ \forall\, y \in Y_{fa} \ com \ \|y - \overline{y}\|_{1,\infty} < \delta \ tem\text{-}se \ J(y) \geq J(\overline{y}).$$

$\overline{y} \in Y_{fa}$ é denominado mínimo local forte de J quando

$$\exists\, \delta > 0 \ tq \ \forall\, y \in Y_{fa} \ com \ \|y - \overline{y}\|_\infty < \delta \ temos \ J(y) \geq J(\overline{y}).$$

□ □ □

Os mínimos locais fracos são de maior interesse no que diz respeito a minimização, por conta que a vizinhança forte dos $y \in Y_{fa}$ possui mais pontos que a vizinhança fraca correspondente. Também faz-se necessário definir o conceito de derivada direcional de aplicações $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pois este conceito é fundamental para caracterização de soluções do problema variacional 2.

Definição 1.1.3 *Seja Y um espaço vetorial e $I : Y \to \mathbb{R}$. Dados y e $v \in \mathbb{R}$, define-se a variação de Gâteaux de I em y na direção de v por:*

$$\delta I(y; v) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{I(y + \epsilon v) - I(y)}{\epsilon}$$

quando o limite existe.

□ □ □

Nota-se que, se a derivada total em relação a variável ϵ da função real $\mathbb{R} \ni \epsilon \mapsto I(y + \epsilon v) \in \mathbb{R}$ estiver bem definida para $\epsilon = 0$, então pode-se reescrever:

$$\delta I(y; v) = \frac{d}{d\epsilon} I(y + \epsilon v)\bigg|_{\epsilon=0}$$

Assim, da definição 1.1.3 segue a linearidade da variação de Gâteaux em relação ao funcional I, isto é, fixados y e $v \in Y$:

$$\delta(\alpha I_1 + \beta I_2)(y; v) = \alpha \delta I_1(y; v) + \beta \delta I_2(y; v), \quad \alpha \ (e) \ \beta \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Supondo que as variações envolvidas existam, então pode-se denotar outra propriedade com relação a direção da derivação.

$$\delta I(y;\alpha v) = \alpha\delta(y;v), \text{ para } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Novamente supondo que essa variação existe.

Lema 1.1.1 *Seja $Y \in \mathbb{R}^n$ e $f \in C^1(Y;R)$. Para y, $v \in Y$, tem-se:*

$$\delta f(y;v) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(y-\epsilon v) - f(y)}{\epsilon} = \langle \nabla f(y), v\rangle$$

que é a derivada parcial de f em y na direção v.

□ □ □

Lema 1.1.2 *Seja $Y = C^1[x_1,x_2]$ e $J : Y \ni y \mapsto \int_{x_1}^{x_2} f(x,y(x),y'(x))dx \in \mathbb{R}$, de modo que f é uma aplicação $C^1([x_1,x_2]\times\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. Dados y e v em Y, tem-se:*

$$\delta J(y;v) = \frac{d}{d\epsilon}J(y+\epsilon v)\bigg|_{\epsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2}\left[\frac{d}{d\epsilon}f(x,y+\epsilon v,y'+\epsilon v')\right]_{\epsilon=0} dx; =$$

$$\int_{x_1}^{x_2} f_y\{[x,y(x),y'(x)]v(x) + f_{y'}[x,y(x),y'(x)]v'(x)\}dx$$

□ □ □

Os primeiros conceitos para as condições de otimização do problema 2 surgem quando supõe-se uma hipótese de convexidade nessas funções. Desse modo, define-se:

Definição 1.1.4 *Dado um espaço vetorial Y e um funcional $I : D \subset Y \to \mathbb{R}$, dizemos que I é convexo em D quando para todo par de elementos y, $v \in Y$, tem-se*

$$I(\alpha y + (1-\alpha)v) \leq \alpha I(y) + (1-\alpha)I(v), \quad \alpha \in [0,1].$$

I é denominado estritamente convexo quando a desigualdade acima for estrita.

□ □ □

Para o caso onde a variação de Gâteaux $\delta I(y;v)$ do funcional I esteja definida para todos os elementos y, $y+v$ em D, é possível definir convexidade de outra forma:

Lema 1.1.3 *Seja Y um espaço vetorial e $I : D \subset Y \to \mathbb{R}$, tal que para todo par de elementos y e $v \in Y$ satisfazendo y e $y+v \in D$ a variação de Gâteaux $\delta I(y;v)$ existe. São equivalentes as afirmações:*

a) I é convexo em D;

b) Para todo par de elementos y e $v \in Y$, com y $y+v \in D$, tem-se:

$$I(y+v) - I(y) \geq \delta I(y;v).$$

tem-se ainda que I é estritamente convexo em D quando a igualdade na desigualdade do item b) ocorre se, e somente se, $v = 0$.

Demonstração: É bastante demonstrar a equivalência de a) e b).
$(a) \Longrightarrow (b)$ Nota-se, que para $0 < \epsilon < 1$ pode-se escrever $y + \epsilon v$ na forma da combinação linear convexa:

$$y + \epsilon v = (1 - \alpha)y + \alpha(y + v),$$

onde $\alpha = \epsilon \in [0, 1]$. Da definição de convexidade, segue que:

$$I(y + \epsilon v) = (1 - \epsilon)I(y) + \epsilon I(y + v),$$

de onde, obtém-se:

$$\frac{1}{\epsilon}[I(y + \epsilon v) - I(y)] \leq I(y + v) - I(y).$$

Tomando o limite de $\epsilon \to 0$, obtém-se a desigualdade do item b).
$(a) \Longleftarrow (b)$ Dados y e $v \in Y$ e $\alpha \in [0, 1]$ define-se $\omega = \alpha y + (1 - \alpha)v$. Da hipótese b) tem-se:

$$\delta I(\omega; h_1) \leq I(v) - I(\omega), \qquad \delta I(\omega; h_2) \leq I(y) - I(\omega)$$

para $h_1 = \alpha(v - y),\ h_2 = (1 - \alpha)(y - v)$. Então de 4, tem-se:

$$\frac{1}{\alpha}[I(v) - I(\omega)] \geq \delta I(\omega; (v - y)) \geq \frac{1}{1 - \alpha}[I(\omega) - I(y)],$$

de onde, obtém-se

$$\alpha I(y) + (1 - \alpha)I(v) \geq I(\omega)$$

■

Apresenta-se a seguir uma condição suficiente para otimização de um problema abstrato para uma função objeto convexa.

Lema 1.1.4 *Dado um espaço vetorial Y e um funcional convexo $I : D \subset Y \to \mathbb{R}$, então cada $\overline{y}$ que satisfaz*

$$\delta I(\overline{y}; y) = 0,\ \forall\ \overline{y} + v \in D,$$

minimiza I em D. Se $\overline{y}$ é estritamente convexo, então $\overline{y}$ é único.

Demonstração: Dado $y \in D$ define-se $v = y - \overline{y} \in Y$. Logo,

$$I(y) - I(\overline{y}) = I(\overline{y} + v) - I(\overline{y}) \geq \delta I(\overline{y}; v) = 0.$$

A unicidade de $\overline{y}$ é consequência direta da definição de convexidade estrita. ■

Apresentam-se a seguir as definições suficientes para condições de otimização do problema 2.

Teorema 1.1.1 *Seja $Y = C^1[x_1, x_2]$, $Y_{fa} = \{y \in Y;\ y(x_1) = y_1,\ y(x_2) = y_2\}$, $J : Y_{fa} \ni y \mapsto \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \in \mathbb{R}$ onde $f \in C^1([x_1, x_2] \times \mathbb{R}^2; \mathbb{R})$ satisfaz*

$$f(x, y + v, z + w) - f(x, y, z) \geq f_y(x, y, z)v + f_z(x, y, z)w \tag{5}$$

Para todo $(x, y, z),\ (x, y + z, z + w) \in [x_1, x_2] \times \mathbb{R}^2$. São verdadeiras as afirmações:

a) J é convexo em Y_{fa};

b) Se f é tal que a igualdade na equação 5, se , e somente se, $vw = 0$, então J é estritamente convexo em Y_{fa};

c) Cada $\overline{y} \in Y_{fa}$ que satisfaz a equação diferencial

$$\frac{d}{dt} f_{y'}(x, \overline{y}, \overline{y}') = f_y(x, \overline{y}, \overline{y}') \; x \in [x_1, x_2] \tag{6}$$

é um mínimo global de J em Y_{fa}.

d) Se a hipótese do item b) é verificada, o elemento $\overline{y} \in Y_{fa}$, que satisfaz a equação diferencial do item c) é o único mínimo global de J em Y_{fa}.

Demonstração: Dados y e $y + v \in Y_{fa}$, tem-se da equação 5

$$f(x, y + v, y' + v') - f(x, y, y') \geq f_y(x, y, y')v + f_{y'}(x, y, y')v' \tag{7}$$

Integrando, tem-se:

$$\int_{x_1}^{x_2} [f(x, y + v, y' + v') - f(x, y, y')]dx \geq \int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y')v + f_{y'}(x, y, y')v']dx$$

isto é, $J(y+v) - J(y) \geq \delta J(y; v)$ provando o item (a). Supondo que a hipótese do item (b) acontece, então, dados y e $y + v \in Y_{fa}$ a igualdade em 7 ocorre se, e somente se, $v(x)v'(x) \equiv 0$ em $[x_1, x_2]$. Nota-se que:

$$v(x)v'(x) = \frac{1}{2}(v^2(x))' \quad \Rightarrow \quad v(x)v'(x) \Leftrightarrow v^2(x) = k, \; k \in \mathbb{R}$$

Como $v^2(k) = 0 \Rightarrow J(y + v) - J(y) = \delta J(y; v) \Leftrightarrow v \equiv 0$ o que prova o item (b).
Supondo que $\overline{y} \in Y_{fa}$, seja solução da equação diferencial 6. Desse modo, para $v \in Y$ com $\overline{y} + v \in Y_{fa}$, tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta J(\overline{y}; v) &= \textstyle\int_{x_1}^{x_2} [f_y(x, y, y')v + f_{y'}(x, y, y')v']dx \\
&= \textstyle\int_{x_1}^{x_2} \left[\dfrac{d}{dx} f_{y'}(x, y, y')\right] dx \\
&= [f_{y'}(x, y, y')]_{x_1}^{x_2} = 0.
\end{aligned}$$

Agora, como J é convexo (vide item (a)), então o item (c) obedece o Lema 1.1.4. Se a hipótese do item (b) é verificada, então J é estritamente convexo e a unicidade de $\overline{y}$ segue da segunda parte do Lema 1.1.4. ■

A equação diferencial 6 é dita *equação de Euler-Lagrange*, segundo Leitão (2001, p. 8): "desempenha um papel ímpar no cálculo variacional". O teorema 1.1.1 fornece condições suficientes para garantir a convexidade do funcional J, e caso J seja convexo, caracteriza a equação de Euler-Lagrange como condição suficiente para a otimalidade do problema 2.

1.2 A equação de Euler - Lagrange

O método variacional tem origem na mecânica clássica e advém da generalização de problemas na mecânica analítica. Segundo Viana (2011, p. 5-6), "o problema central do cálculo

variacional pode ser expresso da seguinte forma: deseja-se encontrar uma função $y(x)$ que possui os pontos fixos $x = x_1$ e $x = x_2$, de modo que a integral de linha, dada a função $f(x, y, y')$.

$$J = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx$$

seja um extremo (máximo, mínimo ou um ponto de inflexão)". Em outras palavras, deve-se encontrar $y(x)$ de tal modo que para valores fixos $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, a função J seja estacionária. Pode-se ver que essa função é *funcional*, pois não depende apenas dos valores de y e os valores de sua derivada dado um ponto x, mas também em todos os pontos $x \in [x_1, x_2]$, já que a integral de J depende do caminho escolhido entre esses pontos.

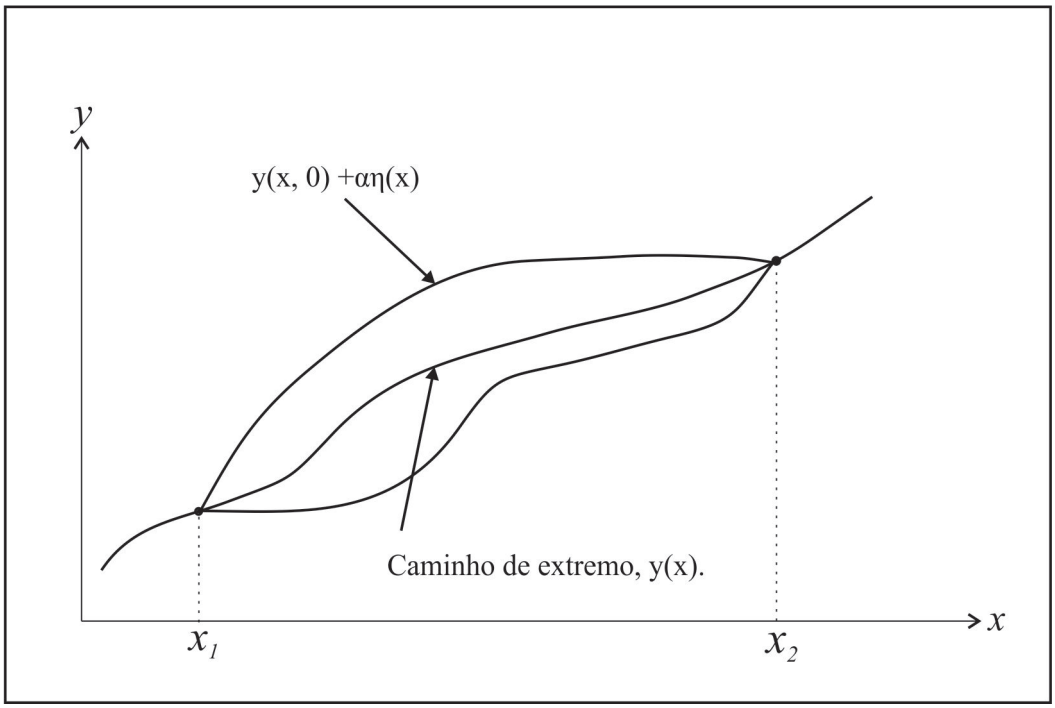

Figura 1: O caminho de extremo. Fonte: Elaborada pelo autor.

Ainda segundo este autor, há infinitas funções com valores fixos em (x_1, y_1) e (x_2, y_2), mas a equação J admite valores diferentes para cada um. No plano cartesiano, isso quer dizer que existem infinitos caminhos ligando dois pontos, porém em apenas um deles J admite um extremo.

Formalmente, pode-se denotar todos os caminhos possíveis entre (x_1, y_1) e (x_2, y_2) por meio de um parâmetro variacional α. Desse modo, a função $y(x, \alpha)$ representa cada "caminho" entre os pontos fixos. Logo, o caminho "ótimo" é dado por $y(x, 0)$, ou seja, quando a função J é *estacionária* (vide figura 1). Pode-se então supor que cada deformação do caminho expressa-se pela função:

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha\eta(x)$$

onde $\eta(x)$ representa a deformação. Nota-se que a função deve ser continuamente diferenciável no intervalo $[x_1, x_2]$ e que também deve satisfazer a condição $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Com o auxílio do parâmentro variacional pode-se então escrever a integral funcional como:

$$J(\alpha) = \int_{x_1}^{x_2} f\{y(x, \alpha); y'(x, \alpha); x\}dx \tag{8}$$

Logo, para que a condição ótima $y(x,0)$ seja atingida, o funcional deve ser estacionário, desse modo:

$$\left(\frac{\partial J}{\partial x}\right)_{\alpha=0} = 0 \tag{9}$$

Diferenciando a equação 8 com relação a α, tem-se:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y'}{\partial \alpha}\right] dx$$

Integrando por partes o segundo termo do lado direito:

$$\int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y'}}_{u} \underbrace{\frac{\partial y'}{\partial \alpha}}_{dv} dx = \frac{\partial f}{\partial y'}\frac{\partial y}{\partial \alpha}\bigg|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\frac{\partial y}{\partial \alpha}}_{v} \underbrace{\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) dx}_{du}$$

Uma vez que:

$$v = \int \frac{\partial y'}{\partial \alpha} dx = \int \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\alpha y}{\alpha x}\right) dx = \int \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right) dx = \frac{\partial y}{\partial \alpha}$$

Como todas as curvas parametrizadas por α devem passar pelos pontos fixos

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x_1} = 0 \qquad\qquad \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{x_2} = 0$$

de modo que a primeira parcela da integração por partes é identicamente nula, restando apenas

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx$$

Substituindo a equação anterior em:

$$dJ = \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right) d\alpha = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \frac{\partial y}{\partial \alpha} dx d\alpha \tag{10}$$

Após encontrar as derivadas em relação a α para o caminho = 0 e usando a definição 1.1.3, denota-se a variação em J como:

$$\delta J \equiv \left(\frac{\partial J}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha,$$

assim como também, de modo análogo, a variação de y:

$$\delta y \equiv \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)_{\alpha=0} d\alpha$$

Desse modo, reescreve-se a equação 10 como:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right)\right] \delta y dx \tag{11}$$

A condição 9 para que a integral J seja estacionária é simplesmente:

$$\delta J = 0$$

Impondo essa condição à equação 11, e como δy é arbitrário, conclui-se que o termo entre colchetes deve anular-se, tendo assim a equação de Euler-Lagrange.[1] :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y'}\right) = 0. \tag{12}$$

A equação que leva o nome de Leonhard Euler foi divulgada em 1744, por meio de seu trabalho intitulado *Métodos para achar curvas planas que mostram algumas propriedades de máximos e mínimos*, posteriormente esse trabalho foi aprofundado por Joseph Louis Lagrange, em 1760, na obra *Ensaio sobre um novo método para determinar os máximos e mínimos de fórmulas integrais indefinidas*.

A equação de Euler é uma condição necessária, porém não é suficiente, para que a integral J seja estacionária. Além disso, na dedução feita, a solução implícita da solução procurada $y(x)$ deve ser pelo menos duas vezes diferenciável.

2 O método de Hamilton em comparação ao de Newton

A mecânica newtoniana consegue descrever corretamente o movimento de uma partícula, dado um sistema de referência inercial. Se não houver necessidade de movimentar a partícula de algum modo complexo, e as coordenadas retangulares forem utilizadas para descrever o movimento, então segundo Thornton e Marion (2014, p. 201): " as equações que regem o movimento dessa partícula podem ser relativamente simples. Porém, caso alguma dessas restrições seja removida, pode-se ter problemas bastante complexos de se manipular. "

Pode-se observar também, que se o movimento de uma partícula está restrito a uma superfície, logo tem-se algumas forças que mantém a partícula em contato com a superfície, por exemplo, se uma partícula se move em um plano horizontal, sem atrito, então pode-se considerar que essa força é dada por $F = -ma$, porém ao se considerar uma gota deslizando sobre um fio curvo, determinar a força de restrição nesse caso é algo bastante complexo. Assim, há sistemas onde o nível de complexidade da abordagem newtoniana torna esse método inviável.

Ressalta-se que ao "resolver um problema ao utilizar um procedimento newtoniano devemos conhecer todas as forças, porque a quantidade F que aparece na equação fundamental é a força total agindo em um corpo" (THORNTON; MARION, 2014, p. 201). Desse modo, observa-se que o procedimento de Newton é útil em sistemas com certo grau de limitação, porém torna-se inviável por conta de sua alta complexidade em sistemas, onde essas limitações não existem.

[1] A condição dada pela equação de Euler-Lagrange é necessária, mas não suficiente, para que $\delta y = 0$

Com o intuito de evitar dificuldades advindas de aplicações mais elaboradas na dinâmica de partículas, meios alternativos de abordar esses problemas foram desenvolvidos. Todas essas observações, são essencialmente, resultados a posteriori que podem ser obtidos a partir das equações de Newton.

Segundo Thornton e Marion (2014, p. 201):

> Para as equações de Lagrange constituírem uma descrição apropriada da dinâmica de partículas, elas devem equivaler às equações de Newton. Por outro lado, o princípio de Hamilton pode ser aplicado a uma faixa ampla de fenômenos físicos (particularmente aqueles que envolvem *campos*) que não são comumente associados às equações de Newton. Para certificar cada um dos resultados que podem ser obtidos a partir do princípio de Hamilton foi *primeiro* obtido como equações de Newton, pela correlação de fatos experimentais. O princípio de Hamilton não nos ofereceu nenhuma teoria física nova, mas permitiu uma unificação satisfatória de várias teorias individuais por um único postulado básico simples.

O método alternativo encontrado para abordar esses problemas está contido no princípio de Hamilton e a equação de Euler-Lagrange, discutida no capítulo anterior. O embasamento matemático que fundamenta esse meio alternativo de abordar o problema advêm do cálculo variacional, mais precisamente em problemas de otimalidade em funcionais, fato abordado no capítulo 1.

3 O princípio de Hamilton

Segundo Thornton e Marion (2014, p. 203) o princípio de Hamilton pode ser enunciado como:

> De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico (consistente com quaisquer restrições), o caminho seguido é aquele que minimiza a integral da diferença entre as energias cinéticas e potenciais.

Ainda segundo esses autores, pode-se escrever o princípio de Hamilton em termos do cálculo de variações:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)dt = 0 \tag{13}$$

Os autores discutem que as afirmações iniciais sobre essas variações necessitam somente que a integral de $T - U$ seja um extremo, não necessariamente um mínimo, porém em praticamente todas as aplicações importantes em dinâmica, a condição mínima ocorre.

Com o intuíto de simplificar a visualização das equações, serão adotadas as seguintes notações: Sendo $f(x) = y \in \mathbb{R}$ diferenciável em $\mathbb{R}$

$$\frac{dy}{dx} = y' = \dot{y} \;\; e \;\; \frac{dy^2}{dx^2} = y'' = \ddot{y}.$$

Quanto às discussões sobre a energia cinética, os autores afirmam que essa energia pode ser expressa em coordenadas fixas, retangulares como uma função somente de $\dot{x_i}$, desse modo:

$$T = T(\dot{x_i}), \qquad\qquad U = U(x_i),$$

pode-se definir a diferença dessas quantidades como:

$$L \equiv T - U = L(x_i, \dot{x}_i)$$

Assim, a equação 13 se torna:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(x_i, \dot{x}_i) dt = 0 \tag{14}$$

A função L que aparece na equação 14 é identificada como a função f da integral de variação:

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} f\{y_i(x), y_{x_i}(x); x\} dx$$

se feitas as transformações:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow t \\ y_i(x) &\rightarrow x_i(t) \\ y_{x_i}(x) &\rightarrow \dot{x}_i(t) \\ f\{y_i(x), y_{x_i}(x); x\} &\rightarrow L(x_i, \dot{x}_i) \end{aligned}$$

tem-se então, a equação de movimento de Lagrange, presente na forma: $\boxed{\dfrac{\partial L}{\partial x_i} - \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ A quantidade L é chamada de *lagrangeana* para a partícula.

O princípio de Hamilton permite calcular as equações de movimento de um corpo, completamente sem referência à teoria newtoniana, este fato é evidenciado na resolução do problema de pêndulo duplo. Verifica-se por meio disso, que este formalismo constitui uma ferramenta poderosa para resolução de problemas físicos e matemáticos.

4 O pêndulo duplo

O pêndulo duplo é constituído de duas massas m_1 e m_2, conectadas por cordas de massa desprezível e de comprimento l_1 e l_2. O sistema todo está sujeito à força gravitacional e às restrições nos fios que conectam as massas por meio de suas articulações. Supondo-se que o sistema de coordenadas tem origem no topo de suspensão, e por haver duas partículas, então a posição dessas partículas pode ser escrita em termos de coordenadas gerais, como r_1 e r_2, com componentes do tipo (x_i, y_i, z_i), que podem ser escritos em termos de suas restrições.

$$\begin{aligned} z_1 &= 0 \\ z_2 &= 0 \\ |r_1| &= l_1 \\ |r_1 - r_2| &= l_2 \end{aligned}$$

Vale notar que essas restrições são holonômicas, ou seja, são apenas relações algébricas entre coordenadas, não envolvendo desigualdades ou derivadas. Desse modo, expressam-se em termos de coordenadas gerais, as posições das partículas.

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1(sen\theta_1, \cos\theta_1, 0) \\ r_2 &= r_1 + l_2(sen\theta_2, \cos\theta_2, 0) \end{aligned}$$

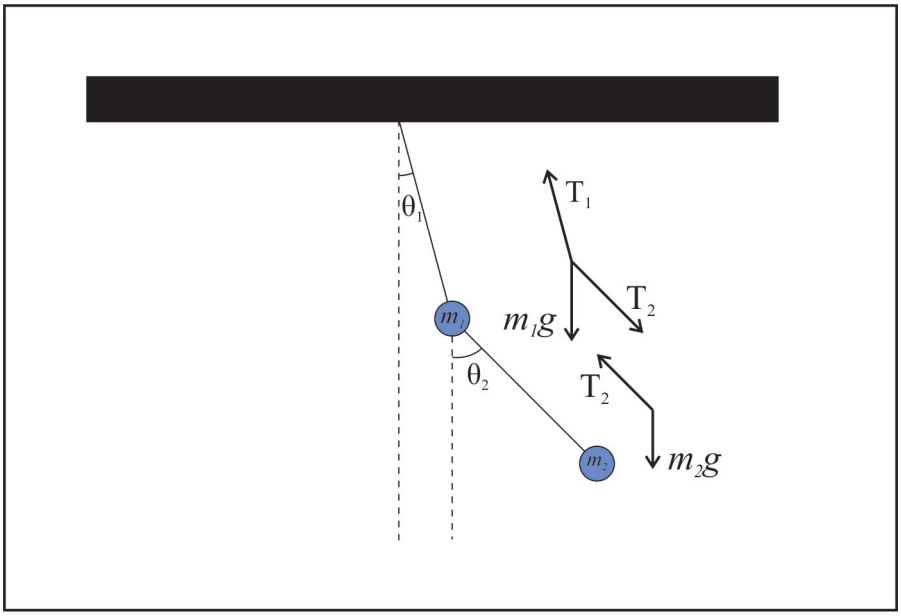

Figura 2: O pêndulo duplo e as restrições sobre o sistema. Fonte: Elaborada pelo autor.

Para encontrar a velocidade e aceleração da primeira partícula, faz-se:

$$\begin{aligned} r_1 &= l_1(sen\theta_1, \cos\theta_1) \\ \dot{r_1} &= v_1 = l_1\dot{\theta}_1(\cos\theta_1, -sen\theta_1) \\ \ddot{r_1} &= a_1 = l_1\ddot{\theta}_1(\cos\theta_1, -sen\theta_1) - l_1\dot{\theta_1}^2(sen\theta_1, \cos\theta_1) \end{aligned} \tag{15}$$

De modo análogo, para a segunda partícula:

$$\begin{aligned} r_2 &= r_1 + l_2(sen\theta_2, \cos\theta_2) \\ \dot{r_2} &= v_2 = v_1 + l_2\dot{\theta}_2(\cos\theta_2, -sen\theta_2) \\ \ddot{r_2} &= a_2 = a_1 + l_2\ddot{\theta}_2(\cos\theta_2, -sen\theta_2) - l_2\dot{\theta_2}^2(sen\theta_2, \cos\theta_2) \end{aligned} \tag{16}$$

As forças envolvidas no sistema de pêndulo duplo atuam nas massas m_1, por meio da tensão nas duas articulações e a gravitacional (Vide figura 2). A tensão sobre a articulação mais acima, no topo de suspensão, está ao longo da direção $-r_1$, a força de tensão da massa m_1 até a articulação inferior está distribuida ao longo da direção $r_2 - r_1$, desse modo, a força F_1 pode ser escrita como:

$$F_1 = T_1\frac{-r_1}{|r_1|} + T_2\frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|} + m_1 g = -\frac{T_1}{l_1}r_1 + \frac{T_2}{l_2}(r_2 - r_1) + m_1 g$$

As forças atuando sobre m_2, são a tensão devido à articulação inferior e a gravidade. A tensão em m_2 distribui-se ao longo da direção $-(r_2 - r_1)$.

$$F_2 = T_2\frac{-(r_2 - r_1)}{|r_1 - r_2|} + m_2 g = -\frac{T_2}{l_2}(r_2 - r_1) + m_2 g$$

Usando a segunda lei de Newton para descrever a força nas respectivas partículas:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{r}_1 &= -\tfrac{T_1}{l_1}r_1 + \tfrac{T_2}{l_2}(r_2 - r_1) + m_1 g \\ m_2\ddot{r}_2 &= -\tfrac{T_2}{l_2}(r_2 - r_1) + m_2 g \end{aligned}$$

Considerando que a movimentação está restrita ao plano xoy, então as equações em termos das coordenadas gerais e as incógnitas θ_1, θ_2, T_1 e T_2 são:

$$m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 sen\theta_1) = -T_1 sen\theta_1 + T_2 sen\theta_2 \tag{17}$$

$$-m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 sen\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1) = -T_1 \cos\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 + m_1 g \tag{18}$$

$$m_2(l_1\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 - l_1\dot{\theta}_1^2 sen\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 \cos\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 sen\theta_2) = -T_2 sen\theta_2 \tag{19}$$

$$-m_2(l_1\ddot{\theta}_1 sen\theta_1 + l_1\dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 + l_2\ddot{\theta}_2 sen\theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2 \cos\theta_2) = -T_2 \cos\theta_2 + m_2 g \tag{20}$$

Com o intuito de simplificar as equações acima, multiplica-se a equação 17 por $\cos\theta_1$, e a equação 18 por $-sen\theta_1$, tem-se respectivamente:

$$m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 \cos^2\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 sen\theta_1 \cos\theta_1) = -T_1 sen\theta_1 \cos\theta_1 + T_2 sen\theta_2 \cos\theta_1 \tag{21}$$

e

$$m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 sen^2\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos\theta_1 sen\theta_1) = T_1 \cos\theta_1 sen\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 sen\theta_1 - m_1 g sen\theta_1 \tag{22}$$

Ao somar 21 com 22, usando $cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1 = 1$ e $sen(\theta_2 - \theta_1) = sen\theta_2 \cos\theta_1 - sen\theta_1 \cos\theta_2$, obtém-se:

$$l_1\ddot{\theta}_1 = \frac{T_2}{m_1} sen(\theta_2 - \theta_1) - g sen\theta_1. \tag{23}$$

De modo análogo, multiplica-se a equação 17 por $sen\theta_1$, e a equação 18 por $\cos\theta_1$, obtém-se respectivamente:

$$m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 \cos\theta_1 sen\theta_1 - \dot{\theta}_1^2 sen^2\theta_1) = -T_1 sen^2\theta_1 + T_2 sen\theta_2 sen\theta_1 \tag{24}$$

e

$$-m_1 l_1(\ddot{\theta}_1 sen\theta_1 \cos\theta_1 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2\theta_1) = -T_1 \cos^2\theta_1 + T_2 \cos\theta_2 \cos\theta_1 + m_1 g \cos\theta_1 \tag{25}$$

Somando 24 com 25, usando que $cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1 = 1$ e $\cos(\theta_2 - \theta_1) = sen\theta_2 sen\theta_1 + \cos\theta_1 \cos\theta_2$:

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1. \tag{26}$$

Multiplicando a equação 19 por $\cos\theta_2$, e 20 por $sen\theta_2$, tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_2(l_1\ddot{\theta}_1\cos\theta_1\cos\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 sen\theta_1\cos\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2\cos^2\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 sen\theta_2\cos\theta_2) \\ = -T_2 sen\theta_2\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{27}$$

e

$$\begin{aligned} -m_2(l_1\ddot{\theta}_1 sen\theta_1 sen\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1 sen\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2 sen^2\theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2\cos\theta_2 sen\theta_2) \\ = -T_2\cos\theta_2 sen\theta_2 + m_2 g sen\theta_2 \end{aligned} \tag{28}$$

Subtraindo 27 de 28, e usando $cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2 = 1$, $\cos(\theta_2-\theta_1) = sen\theta_2 sen\theta_1 + \cos\theta_1\cos\theta_2$, $sen(\theta_2-\theta_1) = sen\theta_2\cos\theta_1 - sen\theta_1\cos\theta_2$, tem-se:

$$l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2-\theta_1) + l_1\dot{\theta}_1^2 sen(\theta_2-\theta_1) + l_2\ddot{\theta}_2 = -g sen\theta_2. \tag{29}$$

Multiplicando a equação 19 por $sen\theta_2$, e 20 por $\cos\theta_2$, tem-se respectivamente:

$$\begin{aligned} m_2(l_1\ddot{\theta}_1\cos\theta_1 sen\theta_2 - l_1\dot{\theta}_1^2 sen\theta_1 sen\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2\cos\theta_2 sen\theta_2 - l_2\dot{\theta}_2^2 sen^2\theta_2) \\ = -T_2 sen^2\theta_2 \end{aligned} \tag{30}$$

e

$$\begin{aligned} -m_2(l_1\ddot{\theta}_1 sen\theta_1\cos\theta_2 + l_1\dot{\theta}_1^2\cos\theta_1\cos\theta_2 + l_2\ddot{\theta}_2 sen\theta_2\cos\theta_2 + l_2\dot{\theta}_2^2\cos^2\theta_2) \\ = -T_2\cos^2\theta_2 + m_2 g\cos\theta_2 \end{aligned} \tag{31}$$

Somando 30 com 31, tem-se:

$$-l_1\ddot{\theta}_1 sen(\theta_2-\theta_1) + l_1\dot{\theta}_1^2\cos(\theta_2-\theta_1) + l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{T_2}{m_2} - g\cos\theta_2. \tag{32}$$

Substituindo as equações 23 e 26, nas equações 29 e 32 respectivamente, usando mais identidades trigonométricas pode-se escrever as equações de modo simplificado, como:

$$\begin{aligned} l_2\ddot{\theta}_2 = -g sen\theta_2 - \left(\tfrac{T_2}{m_1} sen(\theta_2-\theta_1) - g sen\theta_1\right)\cos(\theta_2-\theta_1) \\ -\left(\tfrac{T_1}{m_1} - \tfrac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2-\theta_1) - g\cos\theta_1\right) sen(\theta_2-\theta_1) \\ = -\tfrac{T_1}{m_1} sen(\theta_2-\theta_1) \end{aligned} \tag{33}$$

$$\begin{aligned} l_2\dot{\theta}_2^2 = \tfrac{T_2}{m_2} - g\cos\theta_2 + \left(\tfrac{T_2}{m_1} sen(\theta_2-\theta_1) - g sen\theta_1\right) sen(\theta_2-\theta_1) \\ -\left(\tfrac{T_1}{m_1} - \tfrac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2-\theta_1) - g\cos\theta_1\right)\cos(\theta_2-\theta_1) \\ = \tfrac{T_2}{m_2} + \tfrac{T_2}{m_1} - \tfrac{T_1}{m_1}\cos(\theta_2-\theta_1) \end{aligned} \tag{34}$$

Desse modo, as equações 23, 26, 27 e 28 modelam o movimento das partículas, denota-se por:

$$l_1\ddot{\theta}_1 \quad = \quad \tfrac{T_2}{m_1} sen(\theta_2-\theta_1) - g sen\theta_1. \tag{35}$$

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1. \tag{36}$$

$$l_2\ddot{\theta}_2 = -\frac{T_1}{m_1}sen(\theta_2 - \theta_1). \tag{37}$$

$$l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_1} - \frac{T_1}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1). \tag{38}$$

Desde que as equações não tenham derivadas de T_1 e T_2, o melhor caminho para solucionar as mesmas, numericamente ou analiticamente, é obtendo duas equações diferenciais para θ_1 e θ_2, sem os termos T_1 e T_2, e usando suas expressões em termos de θ_1 e θ_2, e suas derivadas. Desse modo, isolando T_1 e T_2 nas equações 35 e 37, obtém-se respectivamente:

$$T_2 = m_1\frac{l_1\ddot{\theta}_1 + gsen\theta_1}{sen(\theta_2 - \theta_1)} \tag{39}$$

$$T_1 = -m_1\frac{l_2\ddot{\theta}_2}{sen(\theta_2 - \theta_1)} \tag{40}$$

Substituindo 39 e 40 na equação 36, obtém-se:

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = \frac{T_1}{m_1} - \frac{T_2}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) - g\cos\theta_1 \Rightarrow$$

$$l_1\dot{\theta}_1^2 = -\frac{l_2\ddot{\theta}_2}{sen(\theta_2-\theta_1)} - \frac{l_1\ddot{\theta}_1+gsen\theta_1}{sen(\theta_2-\theta_1)} - g\cos\theta_1 \Rightarrow$$

$$-l_1\dot{\theta}_1^2 sen(\theta_2 - \theta_1) = l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1 - gsen\theta_1\cos(\theta_2 - \theta_1) \tag{41}$$

De modo análogo, substituindo 39 e 40 em 38, obtém-se:

$$l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{T_2}{m_2} + \frac{T_2}{m_1} - \frac{T_1}{m_1}\cos(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow$$

$$l_2\dot{\theta}_2^2 = \frac{m_1}{m_2}\frac{l_1\ddot{\theta}_1+gsen\theta_1}{sen(\theta_2-\theta_1)} + \frac{l_1\ddot{\theta}_1+gsen\theta_1}{sen(\theta_2-\theta_1)} + \frac{l_2\ddot{\theta}_2}{sen(\theta_2-\theta_1)}\cos(\theta_2 - \theta_1) \Rightarrow$$

$$m_2l_2\dot{\theta}_2^2 sen(\theta_2 - \theta_1) = (m_1 + m_2)gsen\theta_1 + (m_1 + m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2l_2\ddot{\theta}_2\cos(\theta_2 - \theta_1). \tag{42}$$

Nota-se que as equações 41 e 42 modelam suficientemente o sistema do pêndulo duplo, de modo que, apenas a generalização da coordenada θ é necessária para a descrição do mesmo. Evidencia-se nessa resolução que o método newtoniano é suficientemente capaz de descrever o sistema, dadas algumas restrições.

A solução para as equações diferenciais 41 e 42 não pode ser alcançada analiticamente, porém pode-se encontrar uma solução numérica ou para condições onde o ângulo θ possui uma variação muito pequena. Considerando que a variação do ângulo θ é muito pequena, usando a aproximação

por polinômio de Taylor, tem-se:

Para θ_1 e $\theta_2 << 1 \Rightarrow \cos(\theta_2 - \theta_1) \cong 1;\ sen(\theta_2 - \theta_1) \cong 0,\ sen\theta_1 \cong \theta_1$ e $sen\theta_2 \cong \theta_2$

Ainda com o intuito de simplificar as equações, considera-se:

$$l_1 = l_2 = l \text{ e } m_1 = m_2 = m.$$

As equações de movimento 41 e 42 tornam-se respectivamente:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 + \tfrac{g\theta_2}{l} &= 0 \\ \text{e} & \\ 2\ddot{\theta}_1 + \tfrac{2g\theta_1}{l} + \ddot{\theta}_2 &= 0 \end{aligned} \tag{43}$$

Pode-se propor que uma solução dessas equações é do tipo:

$$\theta_k(t) = \Theta_k e^{-i\omega t},\ \ K = 1\ \ e\ \ 2$$

Substituindo essa solução geral nas equações 43, obtem-se:

$$\begin{cases} \Theta_2(\frac{g}{l} - \omega^2) - \omega^2\Theta_1 &= 0 \\ \Theta_1(\frac{2g}{l} - \omega^2) - \omega^2\Theta_2 &= 0 \end{cases}$$

Desse modo, calculam-se as frequências fundamentais:

$$M = \begin{bmatrix} -\omega^2 & \left(\frac{g}{l} - \omega^2\right) \\ \left(\frac{2g}{l} - 2\omega^2\right) & -\omega^2 \end{bmatrix}$$

Nessa condição, deve-se encontrar:

$$\det M = 0 \Rightarrow$$

$$(\tfrac{2g}{l} - 2\omega^2)(\tfrac{g}{l} - \omega^2) - \omega^4 = 0 \Rightarrow$$

$$\omega^4 - \frac{4g}{l}\omega^2 + \frac{2g^2}{l^2} = 0 \tag{44}$$

Para solucionar a equação 44, faz-se a substituição:

$$\mu = \omega^2;\ \alpha = \frac{g}{l} \ \Rightarrow \text{ Pode-se reescrever 44 como: } \mu^2 - 4\alpha\mu + 2\alpha^2 = 0.$$

Desse modo, a solução para a equação polinomial do segundo grau é dada por:

$$\Delta = 16\alpha^2 - 8\alpha^2 = 8\alpha^2; \Rightarrow\ \mu(\alpha) = \frac{4\alpha \pm \sqrt{8\alpha^2}}{2}.$$

Tem-se:

$$\mu_1(\alpha) = \alpha(2+\sqrt{2}) \;\text{ e }\; \mu_2(\alpha) = \alpha(2-\sqrt{2}).$$

Logo:

$$\omega_1 = \sqrt{\alpha(2+\sqrt{2})} \;\text{ e }\; \omega_2 = \sqrt{\alpha(2-\sqrt{2})}$$

Portanto, a combinação das duas frequências é:

$$\theta_k = \Theta_k e^{-i\omega t} = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}, \text{ Para } \omega_1 \text{ e } \omega_2 \Rightarrow$$

$$\theta_k(t) = c_1 e^{-i[\sqrt{\alpha(2+\sqrt{2})}]t} + c_2 e^{-i[\sqrt{\alpha(2-\sqrt{2})}]t}$$

A equação acima é a solução geral do problema de pêndulo duplo, porém sem as considerações com respeito às condições iniciais do problema. Essas considerações são necessárias para determinar os valores de c_1 e c_2, para isso, considera-se que o pêndulo é solto da posição $\theta_k(t=0) = \theta_0$, assim como também, para o mesmo instante, a velocidade no sistema é zero. Nessas condições, o problema de contorno fornece:

$$\text{Para, } \theta_k(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; c_1 + c_2 = \theta_0.$$

Como a velocidade no instante $t = 0$ é nula, tem-se:

$$\dot{\theta}_k(t) = -c_1 i\sqrt{\alpha(2+\sqrt{2})}\; e^{-i[\sqrt{\alpha(2+\sqrt{2})}]t} - c_2 i\sqrt{\alpha(2-\sqrt{2})}\; e^{-i[\sqrt{\alpha(2-\sqrt{2})}]t};$$

$$\text{Para, } \dot{\theta}_k(t=0) = 0 \;\Rightarrow\; -c_1\sqrt{\alpha(2+\sqrt{2})} - c_2\sqrt{\alpha(2-\sqrt{2})} = 0.$$

O valor das constantes c_1 e c_2, são os valores que satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = & \theta_0 \\ -c_1\sqrt{2} - c_2(2-\sqrt{2}) & = & 0 \end{cases}$$

Cuja solução é:

$$c_1 = \theta_0 \frac{-2+\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}} \;\; e \;\; c_2 = \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}}.$$

Logo, a equação que representa o movimento do sistema é:

$$\theta_k(t) = \theta_0 \frac{-2+\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}} e^{-i[\sqrt{\frac{g}{l}(2+\sqrt{2})}]t} + \theta_0 \frac{\sqrt{2}}{-2+2\sqrt{2}} e^{-i[\sqrt{\frac{g}{l}(2-\sqrt{2})}]t}.$$

A modelagem desse sistema por meio das leis de Newton deixa claro que esse método é muito cansativo e extenso, por conta do tratamento vetorial que lhe é dado. Por considerar toda a força

envolvida no sistema, o tratamento vetorial aumenta bastante a quantidade de cálculos para a modelagem do mesmo.

Ocorre que o método se torna complexo à medida que as restrições são retiradas, por exemplo: para o caso de que no pêndulo duplo a movimentação não fosse apenas no plano e sim no espaço. Descrever o comportamento do sistema é extremamente complexo por se tratar de um fenômeno caótico para essas condições.

O princípio de Hamilton também pode solucionar o problema do pêndulo duplo, de modo que, não é necessário fazer uma referência à força envolvida no sistema, apenas as energias. Esse fato propicia uma redução considerável do maquinário de cálculo, tornando o problema rápido e simples de ser modelado.

Com o intuito de fazer uso do princípio de Hamilton é necessário representar a energia cinética e potencial do sistema em termos das coordenadas generalizadas θ_1 e θ_2. Usando que as velocidades e acelerações já foram calculadas (vide equações 15 e 16). A energia cinética do sistema em termos de suas coordenadas é:

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2}m_1v_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2v_2^2 \\ T &= \tfrac{1}{2}m_1l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + l_2^2\dot{\theta}_2^2 + 2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1)) \\ T &= \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \end{aligned}$$

Observe que v^2 corresponde ao produto interno dos valores escalares e vetoriais de v, ou seja, $v^2 =< v, v >$.

A energia potencial é a energia potencial gravitacional:

$$\begin{aligned} V &= -m_1gy_1 - m_2gy_2 \\ V &= -m_1gl_1\cos\theta_1 - m_2g(l_1\cos\theta_1 + l_2\cos\theta_2) \\ V &= -(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2 \end{aligned}$$

A lagrangeana é:

$$L = T - V$$

$$\begin{aligned} L = {} & \tfrac{1}{2}(m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1^2 + \tfrac{1}{2}m_2l_2^2\dot{\theta}_2^2 + m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2\cos(\theta_2-\theta_1) \\ & +(m_1+m_2)gl_1\cos\theta_1 - m_2gl_2\cos\theta_2 \end{aligned}$$

Calculam-se os termos necessários para a equação de Lagrange para θ_1:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)l_1^2\dot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1). \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} &= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_2-\theta_1) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_2-\theta_1) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_1} &= m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_2-\theta_1) - (m_2+m_1) g l_1 sen\theta_1
\end{aligned}$$

Desse modo, a lagrangeana para θ_1 é:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial L}{\theta_1} \\
&= (m_1+m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) \\
&\quad - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_2-\theta_1) + (m_1+m_2) g l_1 sen\theta_1.
\end{aligned} \tag{45}$$

De modo análogo, os termos para montagem da equação de Lagrange para θ_2 são:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1). \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} &= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_2-\theta_1) - m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_2-\theta_1) \\
\frac{\partial L}{\partial \theta_2} &= -m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sen(\theta_2-\theta_1) - m_2 g l_2 sen\theta_2
\end{aligned}$$

Desse modo, a equação de Lagrange para θ_2 é:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial L}{\theta_2} \\
&= m_2 l_2^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 \cos(\theta_2-\theta_1) \\
&\quad + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1^2 sen(\theta_2-\theta_1) + m_2 g l_2 sen\theta_2.
\end{aligned} \tag{46}$$

Com isso, tem-se as equações que modelam o sistema em termos das coordenadas gerais θ_1 e θ_2, obtidas em 45 e 46:

$$\begin{aligned}
(m_1+m_2)l_1\ddot{\theta}_1 + m_2 l_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2-\theta_1) &= m_2 l_2 \dot{\theta}_2^2 sen(\theta_2-\theta_1) \\
&\quad - (m_1+m_2) g sen\theta_1
\end{aligned} \tag{47}$$

e

$$l_2\ddot{\theta}_2 + l_1\ddot{\theta}_1\cos(\theta_2 - \theta_1) \quad = \quad -l_1\dot{\theta}_1^2 sen(\theta_2 - \theta_1) - g sen\theta_2. \tag{48}$$

Nota-se que as equações 48 e 47 são iguais as equações 41 e 42 obtidas por meio das leis de Newton. Evidencia-se por meio disto que o princípio de Hamilton é equivalente ao método newtoniano, porém é mais rápido no sentido da modelagem, pois a abordagem variacional usa apenas a diferença nas energias envolvidas no sistema.

Observa-se que o método de Hamilton é eficaz e muito útil na modelagem de fenômenos físicos, onde a interpretação vetorial torna o mesmo muito extenso. Verifica-se que o método de Hamilton mesmo sendo eficaz, requer um entendimento amplo de cálculo, assim como também dos conhecimentos de cálculo variacional e condições de otimalidade para funcionais.

A interpretação vetorial de Newton possibilita uma gama de observações mais ricas quanto à força que está envolvida no sistema, por outro lado, essa consideração gera muitos dados para a modelagem de um problema onde as restrições são menos presentes. A mecânica de Newton proporciona uma descrição detalhada do modo como o problema está "alocado" do espaço, ou seja, como o dinamismo do sistema ocorre com relação à força total no mesmo.

Percebe-se que os dois métodos são equivalentes; porém, pela complexidade do método newtoniano em problemas de alto grau de liberdade com relação ao princípio de Hamilton, o mesmo torna-se inviável para esses casos. Como cada problema é uma interpretação nova a respeito de como um sistema se comporta, a aplicação das duas ferramentas de modelagem vem enriquecer o conjunto de recursos disponíveis para a observação e interpretação de problemas físicos e matemáticos.

5 A abordagem da pesquisa

A pesquisa constitui o fator motor no desenvolvimento humano. Nas ciências exatas ou não exatas, pesquisar é tão crucial como o próprio tema em questão. O princípio de Hamilton também é fruto de pesquisa, através dela tem-se os resultados atuais. O termo *pesquisa* significa, segundo Ferreira (1986, p. 231), "indagação ou busca minuciosa para averiguação da realidade; investigação, inquirição".

Além disso, significa investigação e estudo, minudentes e sistemáticos, com o fim de descobrir ou estabelecer fatos ou princípios relativos a um campo qualquer de conhecimento. Tonozi-Reis (2009), complementa, que essas definições ajudam a compreensão da pesquisa como um agente ativo de conhecimento da realidade, um processo de investigação minucioso, de característica natural ou social. O importante aqui é entender a pesquisa como um processo de produção de conhecimentos para a compreensão de uma dada realidade, ou seja, que auxiliem na sua interpretação.

De modo mais específico, Ruiz, citado por Kauark, Manhães e Medeiros (2010, p. 24), descreve que: "Pesquisa científica é a realização concreta de uma investigação planejada, desenvolvida e redigida de acordo com as normas da metodologia consagradas pela ciência". Pode-se notar

que os autores são bem claros com relação ao fator investigador que a pesquisa possui, assim como também deixam claro que, de modo geral, a pesquisa pode ser atrelada aos mais diversificados temas.

A utilidade da pesquisa baseia-se no fato de que sem ela nenhum trabalho, seja ele de cunho científico ou social, pode ter desenvolvimento nem conclusão. A importância de pesquisar é tão vital quanto o próprio ato de construir soluções, pois através da pesquisa é que há solução, ou não, para fenômenos observados. A pesquisa constitui a ligação importante e insubstituível entre o desconhecido e o conhecido, fazendo ponte para que os temas dos mais variados tipos sejam descobertos ou propiciem ainda mais perguntas, de modo que pesquisar torna-se um processo cíclico no trabalho de todo ser instigado, o quê por fim gera mais caminhos de possíveis soluções e resultados. Segundo Tozoni-Reis (2009, p. 8), "a função da pesquisa, por mais abstrata que possa nos parecer, é a interpretação do que vivemos".

Em seu caráter geral a pesquisa abrange todos os temas possíveis e é aplivável em todos, porém a efetividade da pesquisa deve ser pautada na real solução do problema, por exemplo, o princípio de Hamilton evidência a eficácia da pesquisa organizada com o propósito coerente à necessidade do problema. Segundo Tozoni-Reis (2009, p. 15):

> A ciência é uma das mais importantes realizações da humanidade pois confere poder e prazer intelectual àqueles que a ela se dedicam, e traz resultados para a sociedade como um todo. Diferentemente daquilo que expressa o senso comum, a ciência não resulta na verdade absoluta, embora se caracterize pela aproximação mais completa da realidade. Isso significa dizer que a ciência tem um caráter processual, isto é, ela não é um produto pronto e acabado para a compreensão da realidade, mas um processo de investigação constante e contínuo, de intenções e escolhas, incertezas e certezas temporárias que fazem avançar a compreensão das coisas e a vida.

Essa autora afirma que o processo de desenvolvimento científico e social é propiciado pela característica mutável da vida em todos os âmbitos, ela conclui que a pesquisa, assim como os processos investigativos de qualquer natureza, se aplica a todos os degraus de desenvolvimento humano. Desse modo, vê-se que a pesquisa deve ser aplicada em todo âmbito científico, social, cultural entre muitos outros, na solução de problemas ou na compreensão de fenômenos de qualquer natureza.

6 Forma de abordagem da pesquisa

A proposta de pesquisa se delineia em uma abordagem qualitativa, segundo Kauark, Manhães e Medeiros (2010, p. 25):

> Pesquisa Qualitativa: considera que há uma relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito, isto é, um vínculo indissociável entre o mundo objetivo e a subjetividade do sujeito que não pode ser traduzido em números. A interpretação dos fenômenos e a atribuição de significados são básicas no processo de pesquisa qualitativa. Não requer o uso de métodos e técnicas estatísticas. O ambiente natural é a fonte direta para coleta de dados e o pesquisador é o instrumento-chave. É descritiva. Os pesquisadores tendem a analisar seus dados indutivamente. O processo e seu significado são os focos principais de abordagem.

O princípio de Hamilton abordado nesse trabalho enquadra-se no tipo de pesquisa qualitativa por ser apresentado na forma de resolução de um problema em específico (pêndulo duplo). Segundo Martins e Bicudo (1989 apud KAUARK; MANHÃES; MEDEIROS, 2010, p. 25), a pesquisa qualitativa " lida com fenômenos (do grego *phainomenon*: aquilo que se mostra, que se manifesta) evento cujo sentido existe apenas num âmbito particular e subjetivo". O presente trabalho baseia-se na análise e exposição de um fenômeno partícular e por isso se enquadra na categoria de pesquisa qualitativa, pois aborda um problema em específico de caráter subjetivo.

7 Tipo de pesquisa

A pesquisa apresenta-se como bibliográfica, pois é um levantamento bibliográfico do material já publicado sobre o assunto, segundo Tozoni-Reis (2009, p. 25), pesquisa bibliográfica é:

> A pesquisa bibliográfica tem como principal característica o fato de que o campo onde será feita a coleta de dados é a própria *bibliografia* sobre o tema ou objeto que se pretende investigar.[...]. Na pesquisa bibliográfica, vamos buscar, nos autores e obras selecionados, os dados para a produção do conhecimento pretendido

8 Instrumentos de coleta de dados

O presente trabalho usa como instrumento de coleta de dados a análise documental. Segundo Tozoni-Reis (2009, p. 45), análise documental é:

> Considerando que todo documento, ou simplesmente um texto, tem um volume grande de informações que nem sempre interessam ao tema em estudo pela pesquisa documental, o principal objetivo da análise de conteúdo é desvendar os sentidos aparentes ou ocultos de um texto, um documento, um discurso ou qualquer outro tipo de comunicação. Obviamente que a escolha dos procedimentos para essa análise depende do estudo em questão, de seus objetivos, das intenções do pesquisador, de seus referenciais teóricos, epistemológicos, políticos, sociais, culturais, educacionais e pedagógicos.

O pricípio da Hamilton por ser um tema aplicado nas áreas de física e matemática, possui uma constituição majoritariamente documental, visto que o rigor matemático e as aplicações físicas desse princípio estão em concordância, o que assegura a existência e consistência do mesmo. Assim, o presente trabalho usa dessas características documentais com o intuito de extrair os dados necessários para alcançar os objetivos propostos no mesmo.

9 Conclusão

Neste trabalho, foi exposto o princípio de Hamilton como forma alternativa de solucionar problemas físicos, aliado ao rigor matemático usado na equação de Euler-Lagrange. A forma de enfoque deste trabalho justifica-se através da resolução do problema de pêndulo duplo por meio de duas vias: o método newtoniano e por meio da interpretação proposta por Hamilton.

Percebe-se que o método estipulado por Hamilton facilita a modelagem de sistemas com alto grau de liberdade, por conta de sua consideração referente às energias cinética e potencial envolvidas, desse modo, minimizando a quantidade de cálculos necessários à modelagem do mesmo. Conclui-se que mesmo sendo prático, o método usado por Hamilton requer um conceito matemático mais apurado, o que dificulta, em parte, sua ampla compreensão.

Conclui-se que o método variacional como ferramenta de interpretação de problemas físicos, por possuir forte embasamento matemático, flexibilidade na análise dos dados do problema, aplicações em sistemas de alto grau de liberdade, por aplicar os conceitos de funcional e otimização aprendidos em cursos de cálculo avançado, constitui uma poderosa ferramenta alternativa, com aplicações efetivas e úteis para matemáticos e físicos.

Referências bibliográficas

BUTKOV, Eugene. Espaços lineares de dimensão finita. *In*: BUTKOV, Eugene. **Física matemática**. Tradução de João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho. Rio de Janeiro: LTC, 2011. p. 406-452.

FERREIRA, Aurélio Buarque de Holanda. **Novo dicionário Aurélio da língua portuguesa**. Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 1986.

GONZÁLEZ, Gabriela. **Single and double plane pendulum**. 2006. Disponível em: http://www.phys.lsu.edu/faculty/gonzalez/Teaching/Phys7221/DoublePendulum.pdf. Acesso em: 17 fev. 2016.

KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. A pesquisa. *In*: KAUARK, Fabiana da Silva; MANHÃES, Fernanda Castro; MEDEIROS, Carlos Henrique. **Metodologia da pesquisa**. Itabuna: Via Litterarum, 2010. p. 24-29.

LEITÃO, Antônio. Cálculo variacional e controle ótimo. *In*: COLÓQUIO BRASILEIRO DE MATEMÁTICA, 23. 2001, Rio de Janeiro. **Anais** [...]. Rio de Janeiro: IMPA, 2001. p. 3-14.

SIMMONS, George Finlay. Calculus with analytic geometry. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 2011.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. Princípio de Hamilton - Dinâmica de Lagrange e Hamilton. *In*: THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. São Paulo: Cengage Learning, 2014. p. 201-251.

TOZONI-REIS, Marília Freitas de Campos. **Metodologia da pesquisa**. 2. ed. Curitiba: IESDE Brasil, 2009.

VIANA, Ricardo L. **Cálculo variacional**. Curitiba: UFPR, 2011. p. 5-7. Disponível em: https://www.docsity.com/pt/calculo-variacional-6/4830164/. Acesso em: 06 abr. 2020.