**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020

Rogério César dos Santos
FUP
UnB
rogerc@unb.br

Vinícius Maia de Souza
UnB
suicinivms@hotmail.com

Paralelepípedos de área numericamente igual ao volume

Parallelepipeds whose area is numerically equal to volume

Resumo

Neste artigo, estudaremos a existência de paralelepípedos, de medidas inteiras, que possuem área total numericamente igual ao volume, quando fixada uma unidade de medida. Trata-se da generalização do problema dos retângulos de perímetro igual à área, de medidas inteiras. Para nossos estudos com os paralelepípedos, usamos as noções básicas de divisibilidade e o manejo de equações e inequações. Também, usamos recursos computacionais para a listagem dos paralelepípedos encontrados. A conclusão a que chegamos é que existem paralelepípedos que possuem área igual ao volume, e que é possível enumerá-los todos. Além disto, conclui-se também que o problema aqui abordado pode ser apresentado a alunos de Ensino Médio como fonte de investigação e pesquisa, já que as ferramentas utilizadas na demonstração não envolvem Matemática Superior.

Palavras-chave: Paralelepípedos. Ensino de Geometria Espacial. Áreas. Volumes. Equações. Desigualdades.

Abstract

In this paper, we will study the existence of parallelepipeds that have integer measurements, which have total area numerically equal to volume, when a unit of measurement is fixed. It is a generalization of the problem of rectangles that have perimeter equal to area, of whole measurements. For our studies with parallelepipeds, we use the basics of divisibility and the management of equations and inequalities. Also, we use computational resources to list the found parallelepipeds. The conclusion we have come to is that there are parallelepipeds that have area equal to the volume, and it is possible to enumerate them all. In addition, it is also concluded that the problem addressed here can be presented to high school students as a source of research, since the tools used in the demonstration do not involve higher mathematics.

Keywords: Parallelepipeds. Space geometry teaching. Areas. Volumes. Equations. Inequalities.

1 Introdução

O artigo de Usiskin ([1984]) resolve o problema de se saber quais são os retângulos de medidas inteiras que possuem área numericamente igual ao perímetro, fixada uma unidade de medida. Conforme mostra o artigo, são apenas dois os retângulos com esta propriedade: o quadrado de lado 4, que possui área e perímetro iguais a 16, e o retângulo de medidas 3 e 6, de área e perímetro iguais a 18. No referido trabalho, é mostrado que o problema de se encontrar os retângulos que têm área igual ao perímetro é equivalente a outros cinco problemas matemáticos, que, a princípio, são desvinculados entre si.

Neste artigo, vamos generalizar este problema para o espaço tridimensional e nos perguntar quais são os paralelepípedos de medidas inteiras que possuem área total numericamente igual ao volume, isto é, vamos subir uma dimensão e tentar resolver o problema equivalente. Tais paralelepípedos existem? Se sim, são finitos? Se são finitos, quais são?

O problema pode ser apresentado a alunos de Ensino Médio como atividade de pesquisa ou como desafio, para solidificação do aprendizado em diversos assuntos, como: geometria, divisibilidade, equações e inequações.

2 Encontrando os paralelepípedos

Queremos, portanto, encontrar os paralelepípedos de medidas inteiras $x > 0$, $y > 0$ e $z > 0$ que satisfazem a equação $xyz = 2(xy + xz + yz)$, isto é, volume igual à área total.

Primeiro, é útil notar que nenhuma das medidas pode ser igual ou inferior a 2, pois, se $x \leq 2$, por exemplo, então $xyz \leq 2yz$ e, da igualdade acima,

$$\begin{aligned} 2xy + 2xz + 2yz &= xyz \rightarrow \\ 2xy + 2xz &= xyz - 2yz \leq 2yz - 2yz = 0, \end{aligned}$$

um absurdo.

Feita esta observação, podemos prosseguir. Também da igualdade entre o volume e a área, temos:

$$\begin{aligned} xyz - 2xy - 2xz &= 2yz \rightarrow \\ x(yz - 2y - 2z) &= 2yz. \end{aligned}$$

Esta igualdade nos informa que o termo dentro dos parênteses não pode ser nulo, pois, se pudesse, anularia o segundo membro. Assim, podemos isolar x e manipular a expressão para obter x :

$$\begin{aligned} x &= \frac{2yz}{yz - 2y - 2z} = \\ \frac{2yz - (4y + 4z) + (4y + 4z)}{yz - 2y - 2z} &= \\ \frac{2(yz - 2y - 2z) + 4(y + z)}{yz - 2y - 2z} &\rightarrow \\ x &= 2 + \frac{4(y + z)}{yz - 2y - 2z} (*). \end{aligned}$$

Na igualdade (*), denote $t = \frac{4(y+z)}{yz-2y-2z}$. Se $t \leq 0$, então $x \leq 2$, e já vimos que isto não pode ocorrer. Logo, $t > 0$. Porém, se $0 < t < 1$, então x não é inteiro, também não é possível. Portanto, temos necessariamente que $t \geq 1$ e, conseqüentemente, o denominador de t é positivo, pois seu numerador o é. Portanto,

$$\frac{4(y+z)}{yz-2y-2z} \geq 1 \rightarrow$$

$$4y + 4z \geq yz - 2y - 2z \rightarrow$$

$$6y - yz \geq -6z \rightarrow$$

$$y(z - 6) \leq 6z (**).$$

Neste momento, vamos dividir a demonstração em casos, considerando as seguintes possibilidades para z : $z = 6$, $z > 6$ e $3 \leq z \leq 5$ (lembramos que as três medidas são superiores a 2).

1) $z = 6$. Nesta situação, por (*), temos:

$$x = 2 + \frac{4(y + 6)}{6y - 2y - 12} = 2 + \frac{4y + 24}{4y - 12} \rightarrow$$

$$x = 2 + \frac{4y - 12 + 12 + 24}{4y - 12} = 3 + \frac{36}{4y - 12} \rightarrow$$

$$x = 3 + \frac{9}{y - 3}.$$

Logo, y não pode ser igual a 3 neste caso. Como já tínhamos que $y > 2$, então temos que $y \geq 4$. Assim, $y - 3$ deve ser positivo e, portanto, para que x seja um inteiro, $y - 3$ deve ser um divisor de 9: 1, 3 ou 9. Dividindo em sub-casos, temos:

$$\text{i) } y - 3 = 1 \rightarrow y = 4 \text{ e } x = 3 + \frac{9}{1} = 12.$$

Achamos nosso primeiro paralelepípedo: $x = 12, y = 4, z = 6$ de área total e volume iguais a $12 \cdot 4 \cdot 6 = 288$.

$$\text{ii) } y - 3 = 3 \rightarrow y = 6 \text{ e}$$

$$x = 3 + \frac{9}{3} = 6.$$

Mais um paralelepípedo encontrado: o cubo $x = 6, y = 6, z = 6$ de área total e volume iguais a $6^3 = 216$. O último sub-caso recai no primeiro, onde há apenas uma troca de notação entre as medidas x e y :

$$\text{iii) } y - 3 = 9 \rightarrow y = 12 \text{ e}$$

$$x = 3 + \frac{9}{9} = 4.$$

Até o momento temos, portanto, dois paralelepípedos com a propriedade desejada, sendo um deles o cubo de lado 6.

Continuando a análise dos casos sobre z , temos:

2) $z > 6$.

Neste caso, $z - 6 > 0$ e, por (**), temos:

$$y(z - 6) \leq 6z \rightarrow$$

$$y \leq \frac{6z}{z - 6} \rightarrow$$

$$y \leq \frac{6z - 36 + 36}{z - 6} \rightarrow$$

$$y \leq 6 + \frac{36}{z - 6}.$$

Por consequência, y é igual ou inferior ao valor máximo de $6 + \frac{36}{z - 6}$, que é $6 + 36 = 42$. Então, para cada valor de y entre 3 e 42, devemos tentar encontrar x e z , lembrando que estamos no caso $z > 6$. Vamos fazer o caso $y = 42$ e, para os demais casos $3 \leq y < 42$, vamos apenas apresentar os resultados obtidos, pois a forma de lidar é inteiramente análoga para cada y :

$$z > 6 \text{ e } y = 42 \rightarrow$$

$$x = 2 + \frac{4(y+z)}{yz-2y-2z} = 2 + \frac{4(42+z)}{42z-84-2z} \rightarrow$$

$$x = 2 + \frac{168+4z}{40z-84}.$$

Logo, x é uma função de z :

$$x(z) = 2 + \frac{42+z}{10z-21}.$$

Vamos mostrar agora que $x(z)$ é decrescente com z , provando que $x(z+1) < x(z)$ para todo $z > 6$:

$$2 + \frac{42+z+1}{10z+10-21} < 2 + \frac{42+z}{10z-21} \Leftrightarrow$$

$$\frac{43+z}{10z-11} < \frac{42+z}{10z-21}.$$

Como o denominador que aparece aí é positivo para todo $z > 6$, esta desigualdade é equivalente a:

$$(43+z)(10z-21) < (42+z)(10z-11) \Leftrightarrow$$

$$430z - 903 + 10z^2 - 21z < 420z - 462 + 10z^2 - 11z \Leftrightarrow$$

$$-903 < -462,$$

que é verdade, logo $x(z)$ é decrescente com z . Isto significa que existe uma quantidade finita de possíveis valores para x para este caso em que $y = 42$ e $z > 6$, pois, à medida que o valor de z cresce, x decresce e deve parar em algum valor maior do que 2, como vimos mais acima.

Além disto, o limite de x na função $x(z) = 2 + \frac{42+z}{10z-21}$, quando z tende a infinito, é $2 + \frac{1}{10}$. Logo, podemos substituir z por valores maiores do que 6, na expressão de $x(z)$, até que x chegue a um valor igual ou inferior a 3, esgotando assim todas as possibilidades para o caso $y = 42$. Substituindo z por 7,

$$x = 2 + \frac{42+7}{10 \cdot 7 - 21} = 2 + \frac{49}{49} = 3.$$

Como x é estritamente decrescente com z , então os próximos valores de x , quando pegarmos $z = 8, 9, \dots$, serão inferiores a 3, o que não é possível. Logo, para $y = 42$, temos apenas o seguinte paralelepípedo: $x = 3, y = 42, z = 7$, de área total e volume iguais a 882.

Fazendo a mesma análise para $y = 41, 40, \dots$, mostra-se analogamente que $x(z)$ será sempre uma função decrescente com z para cada um destes valores de y . Assim, para cada y entre 3 e 41, podemos novamente pegar valores de z maiores do que 6 até que se esgotem todas as possibilidades para x , para cada y tomado. Utilizando planilhas eletrônicas, uma para cada y entre 3 e 41, para nos auxiliar nos cálculos que à mão se tornariam enfadonhos, podemos encontrar, portanto, todos os demais paralelepípedos nos quais $z > 6$.

Antes, porém, de fornecermos os resultados encontrados nas planilhas para este caso, é importante notar que, no caso em que $y = 41$ então, por (*), temos que

$x(z) = 2 + \frac{4(41+z)}{41z-2 \cdot 41-2z} = 2 + \frac{4z+164}{39z-82}$, que tende a $2 + \frac{4}{39}$ e é decrescente com z , e, assim, $x > 2$. Por outro lado, para $y = 3$, temos que $x(z) = 2 + \frac{4(3+z)}{3z-2 \cdot 3-2z} = 2 + \frac{4z+12}{z-6}$, que tende a 6 e é decrescente com z , e, assim, $x > 6$. Já no caso em que $y = 24$, então $x = 2 + \frac{4(24+z)}{24z-48-2z} = 2 + \frac{4z+96}{22z-48}$, que tende a $2 + \frac{2}{11}$, o que implica $x > 2$. Estes três exemplos mostram que, para cada y entre 3 e 41, x tende a um valor específico: na planilha em que $y = 3$, basta que consideremos valores de z até que x chegue a 7 ou a um número inferior a 7, enquanto nas planilhas de $y = 24$ e $y = 41$, basta que x alcance 3 ou algum número menor.

A título de ilustração, seguem três tabelas que mostram três planilhas das que foram utilizadas: a de $y = 41$ na qual $x > 2$, a de $y = 24$ na qual $x > 2$ e a de $y = 3$ na qual $x > 6$. Em todas elas, as duas primeiras colunas são inseridas manualmente e a terceira coluna contém a fórmula (*) para o cálculo de x .

Tabela 1 – Cálculo dos valores de x para o caso $y = 41$, dentro do caso $z > 6$.

y	z	$x > 2$
41	7	3,005236
41	8	2,852174

Fonte: Planilha eletrônica.

Tabela 2 – Cálculo dos valores de x para o caso $y = 24$, dentro do caso $z > 6$.

y	z	$x > 2$
24	7	3,169811
24	8	3
24	9	2,88

Fonte: Planilha eletrônica.

Tabela 3 – Cálculo dos valores de x para o caso $y = 3$, dentro do caso $z > 6$ (continua na próxima página).

y	z	$x > 6$
3	7	42
3	8	24
3	9	18
3	10	15
3	11	13,2
3	12	12
3	13	11,14286
3	14	10,5
3	15	10
3	16	9,6
3	17	9,272727
3	18	9
3	19	8,769231
3	20	8,571429
3	21	8,4
3	22	8,25
3	23	8,117647
3	24	8
3	25	7,894737
3	26	7,8
3	27	7,714286
3	28	7,636364
3	29	7,565217
3	30	7,5
3	31	7,44
3	32	7,384615
3	33	7,333333

3	34	7,285714
3	35	7,241379
3	36	7,2
3	37	7,16129
3	38	7,125
3	39	7,090909
3	40	7,058824
3	41	7,028571
3	42	7
3	43	6,972973

Fonte: Planilha eletrônica.

Na lista completa de todas as possibilidades de y dentro do caso $z > 6$, desconsideramos os casos em que x não é inteiro. São os seguintes, portanto, os paralelepípedos encontrados, a menos de repetição:

$$\begin{aligned}
 y = 42, z = 7, x = 3, \\
 y = 24, z = 8, x = 3, \\
 y = 18, z = 9, x = 3, \\
 y = 15, z = 10, x = 3, \\
 y = 12, z = 12, x = 3, \\
 y = 8, z = 8, x = 4, \\
 y = 6, z = 12, x = 4, \\
 y = 5, z = 10, x = 5, \\
 y = 4, z = 20, x = 5.
 \end{aligned}$$

Destes, o de medidas 6, 12 e 4 já havia sido encontrando no caso em que $z = 6$. Logo, juntando estes nove com o cubo de lado 6, temos até o momento dez paralelepípedos com a propriedade.

Terminamos, portanto, os casos $z = 6$ e $z > 6$. Agora, $z < 6$.

3) $z < 6$

Iremos analisar separadamente os casos $z = 5$, $z = 4$ e $z = 3$.

Dado $z = 5$, pela igualdade (*), temos:

$$\begin{aligned}
 x &= 2 + \frac{4(y+z)}{yz-2y-2z} \rightarrow \\
 x &= 2 + \frac{4(y+5)}{5y-2y-10} \rightarrow \\
 x &= 2 + \frac{4y+20}{3y-10}.
 \end{aligned}$$

Neste caso, se $y = 3$, então $x = 2 + \frac{32}{-1} < 0$. Assim, $y \geq 4$.

Prova-se, como anteriormente, que x é decrescente em relação a y .

Além disto, quando y tende a infinito, x tende a $2 + \frac{4}{3} = 3,33 \dots$. Mas nunca o alcança. Logo, $x > 3,33 \dots$ e, em procedimento análogo ao do caso anterior, podemos pegar valores de y iguais ou superiores a 4, até que x alcance um valor igual ou inferior a 4, lembrando que estamos considerando $z = 5$. Também devemos descartar os casos em que x é decimal:

$y = 4 \rightarrow x = 2 + \frac{4 \cdot 4 + 20}{3 \cdot 4 - 10} = 2 + 18 = 20, x = 20, y = 4, z = 5$, paralelepípedo já encontrado, repetido.

Continuando, para $y = 5$, temos $x = 10$ e $z = 5$, repetido. Para $y = 10$, temos $x = 5$ e $z = 5$ repetido. E, para $y = 20$, então $x = 4$ e $z = 5$, também repetido. Para $y > 20$, o valor de x se torna menor do que 4, e assim não precisamos mais continuar. O caso $z = 5$ está, assim, concluído. Falta ainda analisar $z = 4$ e $z = 3$. Para $z = 4$, temos:

$$x = 2 + \frac{4(y+z)}{yz-2y-2z} \rightarrow x = 2 + \frac{4y+16}{2y-8} = 2 + \frac{2y+8}{y-4}.$$

Assim, se $y = 3$, então $x = 2 + \frac{14}{-1} < 0$. Portanto, $y > 4$. Além disto, x é estritamente decrescente com y , e tende a $2 + 2 = 4$ quando y tende a infinito, mas nunca o alcança. Podemos então pegar novamente valores para y até que x chegue a valer 5 ou menos, lembrando que agora $z = 4$:

$y = 5 \rightarrow x = 20, z = 4$, repetido.

$y = 6 \rightarrow x = 12, z = 4$, repetido.

$y = 8 \rightarrow x = 8, z = 4$, repetido.

$y = 12, x = 6, z = 4$, repetido.

$y = 20, x = 5, z = 4$, repetido.

Para valores de y maiores do que 20, x atinge valores inferiores a 5. Como x tende a 4 e nunca o alcança, não há mais casos a considerar para $z = 4$. Por fim, para $z = 3$:

$$x = 2 + \frac{4(y+z)}{yz-2y-2z} \rightarrow x = 2 + \frac{4y+12}{y-6}.$$

Neste caso, se $3 \leq y < 6$ então $x < 0$ e, além do mais, x tende a 6 e nunca o atinge. Logo, vamos pegar valores de y maiores do que 6 até que x chegue a valer 7 ou menos:

$y = 7 \rightarrow x = 42, z = 3$, repetido.

$y = 8 \rightarrow x = 24, z = 3$, repetido.

$y = 9 \rightarrow x = 18, z = 3$, repetido.

$y = 10 \rightarrow x = 15, z = 3$, repetido.

$y = 12 \rightarrow x = 12, z = 3$, repetido.

$y = 15 \rightarrow x = 10, z = 3$, repetido.

$y = 18, x = 9, z = 3$, repetido.

$y = 24, x = 8, z = 3$, repetido.

$y = 42, x = 7, z = 3$, repetido.

A partir daqui x seria inferior a 7, o que não pode ocorrer nesse subcaso.

Assim, catalogamos ao todo, considerando todas as possibilidades para z , dez paralelepípedos distintos para os quais a área é numericamente igual ao volume, tendo fixada uma unidade de medida de comprimento para os lados, resumidos na tabela 4:

Tabela 4 - Paralelepípedos que possuem área igual ao volume, de medidas inteiras.

x	y	z	Área = Volume
3	8	24	576
3	9	18	486
3	10	15	450
3	12	12	432
3	7	42	882
4	5	20	400
4	6	12	288
4	8	8	256
5	5	10	250
6	6	6	216

Fonte: Planilha eletrônica.

3 Abordagem numérica

É possível a criação de um programa, em qualquer linguagem estruturada como o C, o MAXIMA ou o MAPLE, que forneça os paralelepípedos da tabela 4 que possuem área igual ao volume, fazendo-o testar a propriedade em todos os paralelepípedos de medidas inteiras até um certo limite, por exemplo, 1.000, a título de ilustração. A escrita do programa em uma linguagem computacional também pode ser sugerida a estudantes de Ensino Médio. Um algoritmo possível seria o abaixo descrito:

Defina $i = 0$ (contador de paralelepípedos que possuem a propriedade)

Para x de 1 a 1.000 faça

Para y de x a 1.000 faça (para não repetir medidas, y começa a valer x)

Para z de y a 1.000 faça (para não repetir medidas, z começa a valer y , isto é, $z \geq y \geq x$)

Se $x*y*z = 2*(x*y + x*z + y*z)$ então faça

$i = i + 1$

imprima $(i, x, y, z, \text{"área=volume="} x*y*z)$

Fizemos um programa no MAXIMA tendo por base o algoritmo acima. A tela de comandos e a de saída estão na figura 1. As saídas são as linhas com as letras em preto.

```
wxMaxima 14.12.1 [ programa para paralelepípedos.wxmx* ]
Arquivo  Editar  Célula  Maxima  Equações  Álgebra  Cálculo  Simplificar  Gráfico  Numérico  Ajuda

(%i3) i:0;
(%o3) 0

(%i4) for x from 1 thru 1000 do
      (for y from x thru 1000 do
      (for z from y thru 1000 do
      (if x*y*z=2*x*y+2*x*z+2*y*z then
      (i:i+1,print(i,"->",x,y,z," área=volume =",x*y*z))));
1 -> 3 7 42 , área=volume = 882
2 -> 3 8 24 , área=volume = 576
3 -> 3 9 18 , área=volume = 486
4 -> 3 10 15 , área=volume = 450
5 -> 3 12 12 , área=volume = 432
6 -> 4 5 20 , área=volume = 400
7 -> 4 6 12 , área=volume = 288
8 -> 4 8 8 , área=volume = 256
9 -> 5 5 10 , área=volume = 250
10 -> 6 6 6 , área=volume = 216
(%o4) done

Bem-vindo ao wxMaxima          Pronto para entrada do usuário
```

Figura 1- Tela do MAXIMA com todos os paralelepípedos de medidas inteiras até 1.000, que possuem área igual ao volume.

Fonte: Print tirado pelo autor.

4 Referências

USISKIN, Z. Seis problemas não triviais equivalentes. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n. 4, [1984].