**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 18, jul. 2020

**Carlos Augusto do Nascimento
Vieira**

Escola Estadual de Educação Profissional Francisca de Albuquerque Moura
carlosanv83@gmail.com

Erica Boizan Batista

Universidade Federal do Cariri
erica.batista@ufca.edu.br

Leandro da Silva Tavares

Universidade Federal do Cariri
leandro.tavares@ufca.edu.br

Explorando conceitos de geometria não-euclidiana com *softwares* de geometria dinâmica

Exploring non-euclidian geometrical concepts using dynamic
geometry softwares

Resumo

Este trabalho visa oferecer alternativas para a abordagem de alguns conceitos de Geometrias Não-Euclidianas no ensino básico. Para isso, apresentamos uma proposta de atividades em um ambiente de geometria dinâmica com a intenção de possibilitar a exploração e a realização de comparações entre Geometria Euclidiana e Geometrias Não-Euclidianas. A metodologia utilizada está focada na investigação matemática através de atividades elaboradas nos *softwares* Geogebra e Cinderella. O objetivo dessas atividades é garantir que o aluno tenha a liberdade de experimentar com os objetos geométricos em mais de um ambiente, podendo assim construir o conhecimento matemático através da comparação dos conceitos geométricos vistos em Geometria Euclidiana com conceitos semelhantes verificados em Geometria Esférica e em Geometria Hiperbólica.

Palavras-chave: Geometrias não-euclidianas. Geometria Hiperbólica. Geometria Esférica. Geogebra. Cinderella.

Abstract

In this work, we propose activities in a dynamic geometry environment with the intention of exploring and comparing Euclidean Geometry and non-Euclidean geometry. The methodology is focused on Mathematical Investigation through activities developed in the software Geogebra and Cinderella. We aim to guarantee that the student has the freedom to experiment with the geometry and thus to construct the mathematical knowledge through the comparison of the geometric concepts of Euclidean Geometry with similar concepts of Spherical Geometry and of Hyperbolic Geometry.

Keywords: Non-euclidean geometry. Hyperbolic Geometry. Spherical Geometry. Geogebra. Cinderella.

1 Introdução

De acordo com a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017) a Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Neste contexto, o estudo das Geometrias Não-Euclidianas é interessante pois elas apresentam modelos que descrevem o mundo ao nosso redor de forma mais adequada do que o modelo Euclidiano, que é atualmente o mais abordado no ensino básico.

As Geometrias Não-Euclidianas apresentam uma dinâmica única e rica, que permite ao aluno analisar diversos aspectos geométricos, simultaneamente às características da Geometria Euclidiana, permitindo a construção do conhecimento não apenas por experimentação, mas também por comparação.

De acordo com Gasparin (2002)

A tarefa docente consiste em trabalhar o conteúdo científico e contrastá-lo com o cotidiano, a fim de que os alunos, ao executarem inicialmente a mesma ação do professor, através das operações mentais de analisar, comparar, explicar, generalizar, etc. apropriem-se dos conceitos científicos e neles incorporem os anteriores, transformando-os também em científicos constituindo uma nova síntese mais elaborada (GASPARIN, 2002, p.58).

Em Martos (2002) vemos uma investigação com base em uma proposta que possibilitou aos alunos explorar o ambiente da Geometria Não-Euclidiana e realizar comparações entre alguns conceitos de Geometria Euclidiana. Segundo a autora, em vários momentos da pesquisa os alunos identificaram as diferenças entre os conceitos geométricos da Geometria Não-Euclidiana abordada, a esférica, e a Geometria Euclidiana através da comparação dos mesmos.

Sendo assim, o estudo das Geometrias Não-Euclidianas é propício para o ensino de geometria. Infelizmente as Geometrias Não-Euclidianas são pouco exploradas no ensino básico, sendo que a falta de materiais didáticos voltados ao tema em questão é um dos fatores que impossibilita o professor de abordar este tema em sala de aula.

Inspirado na experiência relatada em Martos (2002), o presente trabalho tem como objetivo produzir uma proposta de introdução das Geometrias Não-Euclidianas (esférica e hiperbólica) no ensino básico.

2 O surgimento das geometrias não-euclidianas

A Geometria Não-Euclidiana surge no século XIX com a busca de alguns matemáticos em demonstrar que o quinto postulado de Euclides, “*por um ponto fora de uma reta incide uma única reta que não a intersecta*”, é consequência dos outros quatro.

Nomes como Carl Friedrich Gauss, Johann Bolyai, Nicolai Ivanovich Lobachevsky e Georg Bernhard Rieman desenvolveram trabalhos que trouxeram à luz da sociedade essa nova geometria. Diferente dos demais, que consideraram negações para o quinto postulado, Bernhard Rieman considerou a distância entre dois pontos infinitamente próximos. De acordo com Andrade (2013), “A busca pela comprovação do modelo absoluto para o espaço passou a ser uma obsessão. Muitas pseudoprovas do Teorema das paralelas foram publicadas por candidatos ao Panteão”.

Por quase vinte séculos muitos matemáticos tentaram demonstrar o famoso quinto postulado de Euclides, ou postulado das paralelas, que diferente dos outros quatro não era facilmente aceito

pela comunidade matemática como postulado e sim como teorema. Contestado desde sua primeira publicação, o que Euclides chamava de postulado poderia na verdade ser provado a partir dos anteriores? Para responder a esta pergunta apresentaremos os matemáticos responsáveis por aprofundar e desenvolver os estudos acerca da demonstração do quinto postulado de Euclides e produzir uma nova concepção de geometria.

O surgimento da Geometria Não-Euclidiana ocorreu de forma impressionante. Segundo Boyer (1996), “Na Geometria Não-Euclidiana também encontramos um caso surpreendente de simultaneidade de descobertas, pois idéias semelhantes ocorreram, durante o primeiro terço do século dezanove a três homens, um alemão, um húngaro e um russo”.

As investigações feitas por vários matemáticos acerca da prova do quinto postulado de Euclides produziu diversos trabalhos e resultados muito importantes para a matemática. Vejamos alguns dos resultados obtidos durante a busca por uma demonstração do quinto postulado de Euclides.

2.1 Saccheri

O matemático italiano e padre jesuíta Giovanni Girolamo Saccheri (1667 - 1733) é considerado o precursor daqueles que viriam a descobrir as Geometrias Não-Euclidianas. De acordo com Boyer (1996) “No próprio ano em que morreu ele publicou um livro chamado *Euclides ab omni naevo vindicatus* (Euclides com toda falha retirada) em que fez um elaborado esforço para provar o postulado das paralelas”.

Saccheri aplicou o método de *reductio ad absurdum* (redução ao absurdo) para provar o postulado das paralelas. Primeiro, considerou um quadrilátero birretangular isósceles, ou seja, um quadrilátero $ABCD$ com os ângulos $\angle BAD$ e $\angle ABC$ retos e os lados $\overline{AD}$ e $\overline{BC}$ iguais (Veja figura 4).

Os ângulos $\angle BCD$ e $\angle CDA$ são chamados de ângulos superiores. Foi sobre esses ângulos que Saccheri chegou a conclusão que eles eram iguais e assim, analisou os três casos possíveis: ângulo agudo, reto ou obtuso. Em todos os casos, os ângulos superiores de um quadrilátero de Saccheri são congruentes.

Figura 1: Quadrilátero de Saccheri

2.2 Lambert

Johann Heinrich Lambert (1728 - 1777) foi um matemático suíço que deixou o seu nome na história da matemática como um dos que chegaram mais próximo da descoberta das Geometrias Não-Euclidianas. Na verdade ele é mais lembrado pela prova que o π é irracional em 1761. Seguindo os mesmos passos de Saccheri, Lambert também usou um quadrilátero mas supondo que este possuísse

três ângulos retos e levou em consideração os três casos possíveis para o quarto ângulo (agudo, reto e obtuso). Em sua homenagem esses quadriláteros são chamados de *Quadriláteros de Lambert*.

Figura 2: Quadrilátero de Lambert

2.3 Gauss

O alemão Johann Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855), é considerado um dos maiores matemáticos de todos os tempos. Filho de um artesão, foi um menino prodígio que utilizava seu tempo em se divertir resolvendo cálculos matemáticos. A sua genialidade ficava evidente desde cedo. Um caso famoso dessa genialidade aconteceu aos dez anos. Durante a aula o seu professor mandou que todos os alunos somassem os números de 1 a 100. Rapidamente, Gauss entregou a resposta para espanto do professor que olhou com certa desconfiança, já que a tarefa deveria levar muito tempo para ser respondida. Ao olhar a resposta correta, o seu professor ficou assustado ao ver que um garoto de dez anos conseguiu somar tantos números mentalmente.

Gauss escreveu sobre os mais variados ramos da matemática e os seus trabalhos foram muito relevantes para o seu desenvolvimento, em especial para a teoria dos números e astronomia. Um destes foi sobre o quinto postulado de Euclides. Chegou à conclusão que não seria possível demonstrá-lo e que a existência de geometrias diferentes à de Euclides era possível. Como na época vivera sobre a influência da filosofia de Kant e do domínio da igreja, Gauss não apresentou os seus resultados e deixou que outros matemáticos continuassem a tentativa de provar o quinto postulado. Mesmo assim, é considerado o precursor desta nova geometria que surgia.

2.4 Bolyai

O jovem húngaro János Bolyai (1802 - 1860), filho do famoso matemático Farkas Bolyai que foi colega de classe de Gauss, ficou conhecido pelo seu trabalho na Geometria Não-Euclidiana. Desde cedo o jovem János apresentava uma mente brilhante. Excelente músico e um matemático dedicado se interessou pela demonstração do quinto postulado de Euclides graças ao seu pai Farkas. Acompanhou o trabalho de Farkas e Gauss que trocavam correspondência acerca de suas descobertas. Após muito tempo dedicado em vão e por achar uma tarefa árdua Farkas aconselha o filho János a desistir. Segundo Boyer (1996), Farkas escreveu ao filho oficial do exército o seguinte: “Pelo amor de Deus, imploro a você, desista. Receie isto tanto quanto as paixões sensuais porque isso, também, pode tomar todo o seu tempo e privá-lo de sua saúde, paz de espírito e felicidade na vida”.

Mesmo após o pedido do pai, János continuou o seu estudo e ao substituir o quinto postulado por uma de suas negações, admitindo que por um ponto fora de uma reta dada passa pelo menos um par de retas paralelas à reta dada surgindo assim a Geometria Hiperbólica.

Ao publicar esse trabalho, Farkas comunica o amigo Gauss sobre o feito do filho e ele o responde que não poderia elogiá-lo já que estaria elogiando a si mesmo pois esses resultados já faziam parte de seus trabalhos há alguns anos. Com essa descoberta, János deixou de publicar novos trabalhos e seu nome está ligado à matemática apenas pelo seu trabalho com a Geometria Hiperbólica.

2.5 Lobachevsky

Nikolai Ivanovich Lobachevsky (1793 - 1856) foi um matemático russo, o seu pai era funcionário público e morreu quando ele tinha apenas sete anos. De família humilde conseguiu estudar na Universidade de Kazan onde aos vinte e um anos se tornou professor e em seguida Reitor.

Suas descobertas sobre o quinto postulado começam a aparecer quando em suas aulas de Geometria ouvia que nenhuma prova de ser verdadeiro havia sido encontrada. Ao ler um artigo em francês sobre o teorema das paralelas, Lobachevsky escreveu e apresentou vários resultados, inclusive a data de publicação do seu primeiro artigo é considerada como a data não oficial do nascimento da Geometria Não-Euclidiana. Com a publicação de seu artigo intitulado "Sobre os Princípios da Geometria" nasce oficialmente a Geometria Não-Euclidiana.

Convencido de que não é possível provar o quinto postulado de Euclides usando os outros quatro, Lobachevsky cria uma nova geometria contradizendo àquela escrita por Euclides. Esta substitui o quinto postulado de Euclides pela seguinte hipótese: Por um ponto fora de uma reta dada podem passar mais de uma reta paralela à reta dada.

Foi difícil compreender a existência dessa nova geometria, inclusive o próprio Lobachevsky a chama de "geometria imaginária" em um primeiro momento. Segunda Boyer (1996) "Num certo sentido a descoberta da Geometria Não-Euclidiana vibrou um golpe devastador na filosofia Kantiana, comparável ao efeito da descoberta dos incomensuráveis no pensamento pitagórico".

2.6 Riemann

O matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826 - 1866) foi outro que escreveu sobre as Geometrias Não-Euclidianas. De saúde frágil e tímido o jovem ingressou na Universidade de Göttingen para estudar Teologia aos dezenove anos graças ao apoio de seu pai, um pastor luterano. Apaixonado pela matemática, resolve estudar na Universidade de Berlin, retornando para Göttingen anos depois para obter o título de doutor sob a orientação de Gauss.

Riemann era um matemático que tinha interesse em geometria, teoria dos números e análise. Diferente de Lobachevsky e Bolyai que usaram o método axiomático e a negação do quinto postulado, de acordo com Eves,

Em 1854, Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) mostrou que, descartando-se a infinitude da reta, e admitindo-se simplesmente que a reta seja ilimitada, então, com alguns outros ajustamentos pequenos nos demais postulados, pode-se desenvolver uma outra Geometria Não-Euclidiana consistente a partir da hipótese do ângulo obtuso. As três geometrias, a de Bolyai e Lobachevsky, a de Euclides e a de Riemann foram batizadas por Klein em 1871 de Geometria Hiperbólica, Geometria Parabólica e Geometria Elíptica, respectivamente. (EVES, 2004, p. 544)

Ele apresentou o plano como a superfície esférica, os pontos como posições e as retas como circunferências máximas da superfície esférica. Em sua homenagem por desenvolver essa nova geometria ela também ficou conhecida como Geometria Riemanniana e foi usada como base para o desenvolvimento da teoria da relatividade de Einstein.

3 Investigação com *softwares* de geometria dinâmica

A educação tem se apropriado cada vez mais das novas tecnologias para melhorar ou aprimorar o processo de ensino-aprendizagem. O computador, um dos ícones da revolução tecnológica, se transformou em uma importante ferramenta para ajudar o professor a acompanhar essa mudança que ocorre com os educandos pela busca do conhecimento. A informação está disponível a qualquer um o tempo todo através da internet (rede global de computadores conectados), ou seja, o acesso ficou mais fácil e rápido e isso reflete diretamente na abordagem que o professor faz acerca dos conteúdos a serem ministrados.

Neste contexto, o uso de *softwares* educativos contribui para estreitar a relação teoria e prática à medida que possibilita a apresentação de resultados abstratos ou teóricos em tempo real na tela de qualquer dispositivo. Dessa forma, torna-se possível a substituição da imaginação pela observação, e até mesmo pela experimentação, e isso provoca uma abertura ao novo, fazendo com que as aulas sejam mais atrativas e interessantes para o aluno.

Com o propósito de sugestão e divulgação, faremos a síntese de dois *softwares* usados para o estudo da geometria dinâmica. O primeiro por ser muito conhecido pelos professores de matemática e o segundo pela condição de mostrar na sua tela as Geometria Euclidiana e Não-Euclidianas simultaneamente.

3.1 Geogebra

Desenvolvido nos Estados Unidos por Markus Hohenwarter e ganhador de vários prêmios, o Geogebra é um *software* livre de matemática dinâmica que tem diversas utilidades com o objetivo de ampliar o conhecimento em ambiente de sala de aula. O seu nome vem de geometria e álgebra mas também pode ser usado para o cálculo. Pode ser utilizado em vários sistemas operacionais como Microsoft Windows, Linux, Macintosh etc, devido a sua plataforma JAVA. Apresenta uma interface simples e intuitiva.

Na interface do Geogebra encontramos uma janela gráfica que se divide em área de trabalho e janela algébrica com uma entrada que pode ser usada para escrever desde coordenadas até funções. Podemos inserir na área de trabalho o sistema de coordenadas cartesianas como também alguns tipos de malhas que ajudam na hora da construção geométrica. Os seus comandos usam imagens sugestivas e indicativas que facilitam a sua manipulação.

O *software* Geogebra traz para o ensino de matemática, e em especial da geometria, a possibilidade de movimentar as figuras em várias direções, permitindo ao aluno maior liberdade para construir e investigar. Além disso, a possibilidade de representar um mesmo objeto de diversas formas no *software* permite ao aluno realizar comparações e conjecturas, sejam elas relacionadas a objetos ou a conceitos geométricos.

Figura 3: Interface do Geogebra

Figura 4: Barra de ferramentas

3.2 Cinderella

Criado por J. Richter-Gebert e U. H. Kortenkamp, o *software* Cinderella é um programa gratuito, usado para o estudo de geometria dinâmica (aquela criada por programas gráficos que permitem construções geométricas e manipulações). Desenvolvido inicialmente na plataforma NEXT, o nome Cinderella é em homenagem ao barco que os amigos navegavam. Com a decadência da plataforma NEXT os dois começaram um novo projeto para a plataforma JAVA. Diferente da primeira versão que era voltada para o estudo de Geometria Projetiva, a nova versão disponibiliza a visualização em modelos de Geometria Euclidiana, Geometria Esférica e Geometria Hiperbólica.

De fácil manipulação (ao toque do mouse) e de aparência simples, o Cinderella apresenta vários recursos especiais, sendo a possível a visualização simultânea de objetos geométricos na Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana, o recurso que destacamos neste trabalho.

4 Explorando alguns conceitos de geometrias não-euclidianas

Não é por acaso que o uso de instrumentos tecnológicos na sala de aula vem crescendo a cada dia, em especial o computador. Na verdade, essas tecnologias permitem simular com facilidade situações abstratas que, de outro modo, teríamos dificuldade de visualizar. Em particular, no caso das Geometrias Não-Euclidianas, podemos utilizar os softwares Geogebra e Cinderella para estudar duas das principais Geometrias Não-Euclidianas: a Geometria Esférica (caso particular da Geometria Elíptica) e a Geometria Hiperbólica.

Figura 5: Vista simultânea das Geometria Euclidiana e Não-Euclidiana

4.1 Geometria esférica

Desenvolvida por Riemann, a Geometria Elíptica foi apresentada na Universidade de Göttingen durante a sua palestra para o corpo docente com o intuito de expor um *Habilitationsschrift* (habilitação escrita), que de costume era pedida para aqueles que se tornaram Privatdozent (professor em cargo probatório e não remunerado).

O exemplo mais clássico de Geometria Elíptica é o que considera o plano como sendo uma esfera, chamada de Geometria Esférica. Quando comparada com a Geometria Euclidiana, a Geometria Esférica apresenta os seguintes conceitos básicos:

Reta: circunferência máxima (ou geodésica) obtida pela interseção de um plano euclidiano com a esfera passando pelo centro desta.

Ângulo: interseção de duas circunferências máximas.

Distância: sejam A e B dois pontos de uma circunferência máxima da esfera, a distância entre eles é o menor comprimento do arco desta circunferência.

Triângulo esférico: figura formada pelos arcos das circunferências máximas, contidos em um mesmo hemisfério, e unem três pontos distintos que não pertencentes a uma mesma circunferência máxima.

No entanto, um dos fatos mais intrigantes desta geometria é que nela não existe o conceito de retas paralelas. O aluno poderá constatar este fato na atividade sugerida abaixo com o *software* Geogebra:

1. Ao abrir o Geogebra vá na barra de ferramentas e clique sobre o ícone configurações. Escolha a opção “janela de visualização 3D” e uma nova janela será aberta.
2. Clique sobre o ícone “Esfera” e escolha a opção “Esfera Dados o Centro e um de Seus Pontos” ou

“Esfera Dados Centro e Raio”.

3. Após a escolha, clique no centro do eixo e digite o valor do raio, caso tenha escolhido a segunda opção, e aparecerá a esfera. Veja a figura abaixo.

Figura 6: Retas Esféricas

4. Clique sobre o ícone círculo e escolha a opção “Círculo (Centro - Raio + Direção)”.
5. Coloque o primeiro ponto no centro da esfera e em seguida clique a superfície da esfera, formando uma reta esférica ou circunferência máxima (tem o mesmo centro e raio da esfera).
6. Repita esses itens quantas vezes achar necessário e aproveite para demonstrar que não é possível traçar reta paralela a nenhuma reta dada. Durante a construção questione os alunos sobre a interseção destas retas. É possível construir duas retas que não se intersectam?

Nesta atividade o aluno perceberá que não importa quantas retas ele trace nesta geometria, elas sempre irão se interceptar, ou seja, nessa geometria verificamos a seguinte negação do quinto postulado: “*Por um ponto fora de uma reta não passa nenhuma reta paralela à reta dada.*”

Diferente da Geometria Euclidiana, a Geometria Esférica tem uma superfície que pode ser finita, mas ilimitada. Além disso, a reta (círculo máximo) tem comprimento finito, mas é ilimitada, pois percorrendo uma circunferência máxima retornamos ao ponto de partida e podemos continuar percorrendo-a.

4.2 Geometria hiperbólica

Lobachevsky e Bolyai, independentemente, criaram versões de uma Geometria Não-Euclidiana chamada de Geometria Hiperbólica. Esta geometria está fundamentada em uma das possíveis negações do postulado das paralelas, conhecida como Postulado de Lobachevsky: “*Dada uma reta e um ponto P, não pertencente a reta dada, existem pelo menos duas retas distintas paralelas a ela passando por P.*”

Dentre os diversos resultados intrigantes da Geometria Hiperbólica destacamos os seguintes:

1. Para toda reta r e todo ponto P não pertencente à r , existem pelo menos duas retas que passam por P e não intersectam r .
2. A soma dos ângulos de qualquer triângulo retângulo é menor do que dois ângulos retos.
3. A soma dos ângulos de qualquer triângulo é menor do que dois ângulos retos.
4. Os ângulos do topo de um quadrilátero de Saccheri são agudos.
5. A soma dos ângulos internos de um quadrilátero $ABCD$ é menor do que dois ângulos rasos.

Apesar destes resultados serem muitas vezes de difícil visualização, o aluno pode utilizar o *software* Cinderella para explorar esta geometria e fazer comparações, não apenas com a Geometria Euclidiana, mas também com a Geometria Esférica. Um exemplo disso pode ser verificado na atividade sugerida a seguir, que aborda a soma dos ângulos internos de um triângulo:

1. Ao abrir o Cinderella vá na barra de ferramentas e no ícone vistas clique em Geometria Hiperbólica (ou $\text{ctrl}+2$) e será aberto uma nova página. Faça o mesmo para abrir a janela para a Geometria Esférica (ou $\text{ctrl}+3$).
2. No modelo euclidiano clique sobre o ícone "traçar um segmento".
3. Com um clique com o botão esquerdo do mouse crie um ponto e arraste-o até o local desejado criando o segundo ponto.
4. Repita o processo acima até construir um triângulo qualquer
5. O triângulo aparecerá nos outros dois modelos.

Figura 7: Soma dos ângulos internos de um Triângulo

6. Faça questionamentos aos alunos acerca dos três modelos expostos de triângulos. Mostre que os modelos apresentam ângulos cuja soma pode ser maior (Modelo Esférico), menor (Modelo Hiperbólico) e igual a dois ângulos retos (Modelo Euclidiano).

Esta atividade proporciona ao aluno a oportunidade de observar os ângulos internos de três triângulos: um hiperbólico, um esférico e um euclidiano.

Observamos que o professor poderá ainda incentivar o aluno a verificar diversas outras propriedades e conceitos geométricos nas Geometrias Esférica e Hiperbólica através da comparação.

5 Considerações finais

Ao pensar na importância de relacionar os conteúdos da disciplina de matemática com o cotidiano, em particular a geometria, é preciso destacar que nem sempre esta é uma tarefa fácil, devido ao fato de que os conceitos mais intrínsecos da Geometria Euclidiana muitas vezes não se refletem no mundo físico.

Nota-se então a necessidade de abordar as geometrias que descrevem de forma mais exata a realidade e auxiliam na qualidade do processo ensino-aprendizagem. Estas são as chamadas Geometrias Não-Euclidianas.

Para que isso venha a ser abordado em sala de aula, é necessário no entanto, propiciar ao professor o material e as ferramentas necessárias. Neste contexto, os *softwares* de geometria dinâmica apresentam um grande potencial, permitindo ao aluno a experimentação e a comparação de conceitos geométricos em mais de uma geometria.

Na Tabela 5 apresentamos alguns dos conceitos que podem ser comparados pelos alunos utilizando os *softwares* Geogebra e Cinderella.

Conceito Matemático	Geometria Elíptica	Geometria Hiperbólica
Por um ponto A fora de uma reta r:	não passa nenhuma reta paralela à reta r	passam no mínimo duas retas paralelas a r
Retas paralelas:	não existem	existem infinitas
Se uma reta intercepta uma de duas paralelas	não pode interceptar a outra	pode ou não interceptar a outra
O quadrilátero de Saccheri possui:	ângulos do topo obtusos	ângulos do topo agudos
A soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo mede:	mais do que 180°	menos do que 180°
A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero mede:	360°	menos do que 360°

Tabela 1: Conceitos geométricos a serem comparados com os *softwares* Geogebra e Cinderella

6 Referências Bibliográficas

ANDRADE, P. **Introdução à geometria hiperbólica**: o modelo de Poincaré. Rio de Janeiro: SBM, 2013. (Coleção textos universitários).

BARBOSA, J. L. M. **Geometria hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2007. (Publicações Matemáticas).

BOYER, C. B. **História da matemática**, Tradução de Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Editora Edgar Blücher Ltda, 1996.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: MEC, 2017. Disponível em: <http://basenacionalcomum.mec.gov.br/abase/>. Acesso em: 05 mar. 2020.

EVES, H. W. **Introdução à história da matemática**. 2. ed. São Paulo: Editora UNICAMP, 2004.

GASPARIN, J. L. **Uma didática para a pedagogia histórico-crítica**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2002.

MARTOS, Z. G. **Geometrias não euclidianas: uma proposta metodológica para o ensino de geometria no ensino fundamental**. 2002. 179 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2002.

MARTOS, Z. G. O trabalho pedagógico envolvendo geometrias não-euclidianas no Ensino Fundamental. **Revista Zetetiké**. Campinas, v. 10, n. 17/18, p. 43-70, jan/dez. 2002.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.