**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac
Iniciação Científica

Pedro Henrique Paiola

Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
pedro.paiola@unesp.br

Hércules de Araujo Feitosa

Faculdade de Ciências
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
hercules.feitosa@unesp.br

Lógica intuicionista I^1 : correção e completude

Intuitionistic logic I^1 : correctness and completeness

Resumo

O propósito desse artigo é apresentar a lógica intuicionista I^1 , que foi originalmente introduzida por Sette e Carnielli (1995), e dar provas de correção e completude entre o sistema axiomático e a semântica matricial da Lógica I^1 , de modo original e independente das demonstrações apresentadas no texto introdutório. Esse artigo também traz alguns breves comentários sobre o intuicionismo e lógicas intuicionistas.

Palavras-chave: Matemática Discreta. Lógicas não-clássicas. Lógicas intuicionistas. Lógica I^1 .

Abstract

The purpose this paper is to present the intuitionistic logic I^1 , originally presented by Sette and Carnielli (1995), as well as to settle a proof of correctness and completeness between the axiomatic system and the matrix semantics for the Logic I^1 . This proof is original and independent of the proofs of the introductory paper. It also provides some brief comments on intuitionism and intuitionistic logics.

Keywords: Discrete mathematics. Non-classical logics. Intuitionistic logics. Logic I^1 .

1 Introdução

Os intuicionistas consideram que a lógica clássica é, em certos aspectos, incorreta. E isso vai muito além de rejeitar certas leis clássicas. A própria concepção da lógica e da natureza da matemática é diferente para os intuicionistas. De acordo com eles, a matemática é essencialmente uma atividade mental, e os números são atividades mentais, ou seja, só há um número com uma determinada propriedade se esse tal número é construtível (HAACK, 2002).

Essa visão construtivista da matemática os leva a rejeitar algumas partes da matemática clássica, como aquelas que lidam com totalidades completas, infinitas. E dessa restrição da matemática, segue-se uma restrição da lógica, com a rejeição de alguns princípios da lógica clássica (HAACK, 2002).

Como exemplo de princípio rejeitado, temos a lei do terceiro excluído, ou seja, em uma lógica intuicionista, para uma proposição φ qualquer, nem sempre é válido que $\varphi \vee \neg\varphi$. Vamos supor que não seja possível a construção de um número com uma propriedade F , nem provar que não pode haver tal número. Então, para os intuicionistas, não é verdade que ou há um número com a propriedade F , ou não há (HAACK, 2002).

Na lógica clássica, a lei do terceiro excluído se apresenta claramente nas provas por redução ao absurdo, onde ao se provar que uma proposição não pode ser falsa, então ela só pode ser verdadeira. Os intuicionistas, por sua vez, exigem mais que isso, eles acreditam que não é só porque é possível provar que uma dada proposição não pode ser falsa, que ela pode ser considerada “plenamente” verdadeira ou “plenamente” aceitável. Os construtivistas exigem que, para se provar que uma dada proposição seja verdadeira, se apresente uma demonstração direta disso (BIANCONI, 2006).

Neste artigo, apresentamos a Lógica I^1 , introduzida por Sette e Carnielli (1995). Trata-se de uma lógica proposicional e intuicionista, que surge como contraparte da lógica paraconsistente P^1 .

A Lógica P^1 introduz um terceiro valor de verdade além dos valores Booleanos clássicos $\{T, F\}$, em que T representa o valor lógico verdadeiro, e F o valor falso. Esse terceiro valor foi originalmente representado por T^* e difere de T apenas com relação à negação. Porém, tanto T^* quanto $\neg T^*$ correspondem a verdades.

Por outro lado, a Lógica I^1 também insere um terceiro valor de verdade, o valor lógico F^* , que diferente de F apenas em relação à negação. De modo similar à P^1 , tanto F^* quanto $\neg F^*$ são considerados falsos. Neste trabalho usaremos outra notação para os valores de verdade: 1 para o valor V , 0 para F e $\frac{1}{2}$ para F^* .

A Lógica I^1 é considerada intuicionista por não admitir o Princípio do Terceiro Excluído, para fórmulas atômicas, o que pode ser verificado a partir do modelo axiomático proposto por Sette e Carnielli (1995) para a caracterização de I^1 . Esta caracterização é dada a seguir.

Este artigo é derivado do trabalho (PAIOLA; FEITOSA, 2019).

2 Lógica I^1

A linguagem proposicional de I^1 é composta por três grupos de símbolos: *variáveis proposicionais* $\{p_1, p_2, \dots\}$, *operadores* (conectivos) lógicos $\{\neg, \rightarrow\}$ (para negação e implicação, respectivamente) e *símbolos auxiliares* $\{, (,)\}$.

As suas fórmulas são definidas indutivamente, como nas linguagens proposicionais, a partir das fórmulas atômicas, as variáveis proposicionais, pelos operadores lógicos.

Se $Var(I^1) = \{p_1, p_2, \dots\}$ é o conjunto das variáveis proposicionais da Lógica I^1 , então o conjunto das fórmulas de I^1 , denotado por $For(I^1)$, é determinado por:

1. se $i \in \mathbb{N}$ e $p_i \in Var(I^1)$, então $p_i \in For(I^1)$;
2. se $\alpha \in For(I^1)$, então $\neg\alpha \in For(I^1)$;
3. se α e $\beta \in For(I^1)$, então $\alpha \rightarrow \beta \in For(I^1)$.

Os parênteses servem como marcadores.

Se α, β e γ são fórmulas, então o sistema dedutivo de I^1 é determinado por:

Axiomas:

$$Ax_1 : \alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$$

$$Ax_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$$

$$Ax_3 : (\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha)$$

$$Ax_4 : \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta);$$

Regra de Dedução: a única regra de I^1 é a *Modus Ponens*:

$$MP : \alpha, \alpha \rightarrow \beta \vdash_{I^1} \beta.$$

Na presença dos axiomas Ax_1 e Ax_2 e da regra MP, certamente, em I^1 vale o Teorema da Dedução $\Gamma \cup \{\alpha\} \vdash_{I^1} \beta \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{I^1} \alpha \rightarrow \beta$ (FEITOSA; PAULOVICH, 2005).

Como I^1 é uma lógica com três valores de verdade $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, em que o único valor distinguido, que corresponde à verdade, é 1 e $\{\neg, \rightarrow\}$ são os seus operadores básicos, então apresentamos agora as tabelas de verdade destes dois operadores:

	$\neg$		$\rightarrow$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	0	1	1	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1

Definição 1 A semântica matricial de I^1 é dada por:

$$\mathcal{M}_{I^1} = (\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \neg, \rightarrow, \{1\})$$

com o conjunto de valores distinguidos $\{1\}$.

Sette e Carnielli (1995) ainda definem os operadores de conjunção $\wedge$ e disjunção $\vee$ para a I^1 , da seguinte forma:

$$\alpha \wedge \beta =_{def} \neg((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \rightarrow \neg((\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \beta))$$

e

$$\alpha \vee \beta =_{def} (\neg(\beta \rightarrow \beta) \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha) \text{ o que determina as tabelas:}$$

$\wedge$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
0	0	0	0

$\vee$	1	$\frac{1}{2}$	0
1	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	0
0	1	0	0

Podemos, então, observar que as fórmulas compostas recebem valores apenas no conjunto $\{0, 1\}$.

Definição 2 Uma valoração para I^1 é uma função $v : Var(I^1) \rightarrow \{0, \frac{1}{2}, 1\}$, a qual é estendida para o conjunto $For(I^1)$ segundo as interpretações dadas aos operadores introduzidos anteriormente.

Definição 3 Uma fórmula $\varphi \in For(I^1)$ é válida, segundo $\mathcal{M}_{I^1}$, se, para toda I^1 -valoração v , $v(\varphi) = 1$.

Uma fórmula válida tem sua última coluna constituída apenas pelo valor 1.

A relação de implicação lógica ou consequência semântica para I^1 é dada da seguinte forma. Se $\Gamma \subseteq For(I^1)$, então temos que $v(\Gamma) = \{v(\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$.

Definição 4 Se $\Gamma \cup \{\alpha\} \subseteq For(I^1)$, então Γ implica α quando para toda I_1 -valoração v , se $v(\Gamma) \subseteq \{1\}$, então $v(\alpha) = 1$.

Portanto:

$$\Gamma \models_{I^1} \alpha \Leftrightarrow v(\Gamma) \subseteq \{1\} \Rightarrow v(\alpha) = 1.$$

Podemos construir tabelas de verdade de fórmulas da Lógica I^1 , que sendo uma lógica trivalente, terá tabelas com 3^n linhas, para n o número de variáveis proposicionais.

Tomemos como exemplo as tabelas para o axioma Ax_1 e para as fórmulas $\alpha \vee \neg\alpha$ e $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$:

(a) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$:

α	$\rightarrow$	$(\beta$	$\rightarrow$	$\alpha)$
0	1	0	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1	0
0	1	1	0	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	0	1	1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	1	1	1

(b) $\alpha \vee \neg\alpha$:

α	$\vee$	$\neg\alpha$
0	1	1
$\frac{1}{2}$	0	0
1	1	0

(c) $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$:

$\neg\neg\alpha$	$\rightarrow$	α
0	1	1
1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	1

Logo, a fórmula do exemplo (a) é válida em I^1 , enquanto as dos exemplos (b) e (c), que são tautologias na Lógica Clássica, não valem em I^1 .

Sette e Carnielli (1995) destacam que a fórmula $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ é I^1 -válida para o caso em que α não é uma variável de I^1 , não é atômica.

Eles apresentam uma prova a partir do sistema dedutivo axiomático, mas pela tabela de verdade também é possível perceber isso, visto que $\neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$ só é falso quando $v(\alpha) = \frac{1}{2}$, o que nunca acontece com fórmulas não atômicas. Tal característica dessa proposição será muito útil para a prova de que o sistema axiomático da Lógica I^1 é completo para a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$, sendo assim, definiremos dois novos operadores a partir desta proposição:

$$\circ\alpha =_{def} \neg\neg\alpha \rightarrow \alpha$$

$$\bullet\alpha =_{def} \neg \circ\alpha$$

Tais operadores apresentam as seguintes tabelas de verdade:

	$\circ$
1	1
$\frac{1}{2}$	0
0	1

	$\bullet$
1	0
$\frac{1}{2}$	1
0	0

A seguir, demonstramos que o sistema dedutivo axiomático da Lógica I^1 é correto e completo para a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$.

Para a demonstração da completude, em especial, nos baseamos no processo de demonstração da completude da Lógica L_3 por Epstein (1990) e da LPT por Feitosa e Silvestrini (2016). Sette e Carnielli (1995) já realizaram tal demonstração, mas nesse trabalho trilhamos um caminho diferente do seguido na versão original.

3 Correção

Para demonstrarmos a correção, provaremos que cada consequência sintática corresponde a uma consequência semântica.

Teorema 5 (da Correção) $\Gamma \vdash_{I^1} \gamma \Rightarrow \Gamma \models_{I^1} \gamma$

Demonstração: Por indução sobre o comprimento da dedução $\Gamma \vdash_{I^1} \gamma$.

Se o comprimento da dedução é 1, então γ é um axioma de I^1 ou $\gamma \in \Gamma$.

Se $\gamma \in \Gamma$, o resultado é imediato.

Seja γ um axioma de I^1 . Verificaremos que cada axioma de I^1 é válido segundo $\mathcal{M}_{I^1}$.

O axioma Ax_1 já foi verificado no exemplo (a) anterior, via tabela de verdade.

$Ax_3 : (\neg\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \neg\alpha):$

$(\neg\neg\alpha$	$\rightarrow$	$\neg\beta)$	$\rightarrow$	$((\neg\neg\alpha$	$\rightarrow$	$\beta)$	$\rightarrow$	$\neg\alpha)$
0	1	1	I	0	1	0	1	1
0	1	0	I	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	0	I	0	1	1	1	1
1	1	1	I	1	0	0	1	0
1	0	0	I	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
1	0	0	I	1	1	1	0	0
1	1	1	I	1	0	0	1	0
1	0	0	I	1	0	$\frac{1}{2}$	1	0
1	0	0	I	1	1	0	0	0

$Ax_4 : \neg\neg(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta):$

$\neg\neg$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$\beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$\beta)$
1	0	1	0	I	0	1	0
1	0	1	$\frac{1}{2}$	I	0	1	$\frac{1}{2}$
1	0	1	1	I	0	1	1
1	$\frac{1}{2}$	1	0	I	$\frac{1}{2}$	1	0
1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
1	$\frac{1}{2}$	1	1	I	$\frac{1}{2}$	1	1
0	1	0	0	I	1	0	0
0	1	0	$\frac{1}{2}$	I	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	I	1	1	1

$$Ax_2 : (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma)):$$

$(\alpha$	$\rightarrow$	$(\beta$	$\rightarrow$	$\gamma))$	$\rightarrow$	$((\alpha$	$\rightarrow$	$\beta)$	$\rightarrow$	$(\alpha$	$\rightarrow$	$\gamma))$
0	1	0	1	0	I	0	1	0	1	0	1	0
0	1	0	1	$\frac{1}{2}$	I	0	1	0	1	0	1	$\frac{1}{2}$
0	1	0	1	1	I	0	1	0	1	0	1	1
0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	I	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	0
0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	I	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$
0	1	$\frac{1}{2}$	1	1	I	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0	1	1
0	1	1	0	0	I	0	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	$\frac{1}{2}$	I	0	1	1	1	0	1	$\frac{1}{2}$
0	1	1	1	1	I	0	1	1	1	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	0	1	0	I	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	I	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	0	1	1	I	$\frac{1}{2}$	1	0	1	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0	I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1	I	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	0	0	I	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	0
$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$	I	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	I	$\frac{1}{2}$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	1	1
1	1	0	1	0	I	1	0	0	1	1	0	0
1	1	0	1	$\frac{1}{2}$	I	1	0	0	1	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	0	1	1	I	1	0	0	1	1	1	1
1	1	$\frac{1}{2}$	1	0	I	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	0
1	1	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	I	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	$\frac{1}{2}$	1	1	I	1	0	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1
1	0	1	0	0	I	1	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	$\frac{1}{2}$	I	1	1	1	0	1	0	$\frac{1}{2}$
1	1	1	1	1	I	1	1	1	1	1	1	1

Por fim, o passo indutivo. Se a dedução tem n passos, o enunciado vale para todas as fórmulas que ocorrem até o passo $n - 1$, e então aplicamos a única regra de dedução, a MP.

Assim, temos $\varphi, \varphi \rightarrow \psi \vdash_{I^1} \psi$.

Pela hipótese de indução, $v(\varphi) = 1$ e $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$. Pela tabela do operador $\rightarrow$, $v(\psi) = 1$ e, portanto, ψ é válida segundo $\mathcal{M}_{I^1}$.

O Teorema da Correção garante que tudo que é obtido em I^1 dedutivamente, também tem que ser obtido segundo a sua consequência semântica ou implicação lógica.

4 Completude

Para a completude, precisamos de mais algumas definições.

Definição 6 Seja $\Gamma \cup \{\varphi, \psi\} \subseteq \text{For}(I^1)$:

- (i) o conjunto das consequências de Γ é $C(\Gamma) = \{\varphi \in \text{For}(I^1) : \Gamma \vdash_{I^1} \varphi\}$;
- (ii) o conjunto Γ é uma teoria se $C(\Gamma) \subseteq \Gamma$;
- (iii) o conjunto Γ é não trivial se existe alguma fórmula $\psi \in \text{For}(I^1)$ tal que $\Gamma \not\vdash_{I^1} \psi$, ou seja, $\psi \notin C(\Gamma)$;
- (iv) o conjunto Γ é completo quando para toda fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, se $\Gamma \not\vdash_{I^1} \varphi$, então $\Gamma \cup \{\varphi\}$ é trivial;
- (v) o conjunto Γ é adequadamente completo se é completo e não trivial.

O conjunto Γ é completo quando não tem mais qualquer fórmula que pode dele ser deduzida. Assim, cada conjunto completo é uma teoria.

Proposição 7 Se $\Gamma \subseteq \text{For}(I^1)$, então Γ é não trivial se, e somente se, para toda fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, no máximo uma dentre φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ está em $C(\Gamma)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Se para alguma fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$ ou $\{\varphi, \bullet\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$ ou $\{\neg\varphi, \bullet\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$, então Γ é trivial.

Para $\{\varphi, \neg\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$, isso é evidente, pois vale o princípio da não-contradição, como demonstrado por Sette e Carnielli (1995). Já para $\{\varphi, \bullet\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$ e $\{\neg\varphi, \bullet\varphi\} \subseteq C(\Gamma)$, temos que considerar que se $\varphi \notin \text{Var}(I^1)$, então não vale $\bullet\varphi$, pois fórmulas não atômicas não assumem o valor $\frac{1}{2}$, como discutido anteriormente. Por outro lado, se $\varphi \in \text{Var}(I^1)$, vale $\bullet\varphi$ se, e somente se, $v(\varphi) = \frac{1}{2}$, mas nesse caso não vale φ e nem $\neg\varphi$.

($\Leftarrow$) Se alguma fórmula não está em $C(\Gamma)$, então Γ é não trivial.

Proposição 8 Se $\Gamma \subseteq \text{For}(I^1)$, então Γ é adequadamente completo se, e somente se, para toda fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, exatamente uma dentre φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ está em $C(\Gamma)$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Como Γ é adequadamente completo, então é não trivial. Pela proposição anterior, no máximo uma dentre φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ está em $C(\Gamma)$.

Mas a condição de conjunto completo dá maximalidade dedutiva para Γ e, sendo assim, não pode ocorrer menos que uma dentre φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ em $C(\Gamma)$.

($\Leftarrow$) Consideremos que para toda fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, exatamente uma dentre φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ está em $C(\Gamma)$. Pela proposição anterior, Γ não é trivial.

Agora, se $\Gamma \not\vdash_{I^1} \psi$ então ψ é uma dentre as outras duas fórmulas do tipo φ , $\neg\varphi$ e $\bullet\varphi$ que não está em $C(\Gamma)$ e, assim, pela proposição anterior, $\Gamma \cup \{\psi\}$ é trivial.

Proposição 9 Para toda fórmula $\varphi \in \text{For}(I^1)$, cada I^1 -valoração $v(\varphi)$ satisfaz exatamente uma das seguintes fórmulas: $\varphi, \neg\varphi, \bullet\varphi$.

Demonstração: Se $v_0(\varphi) = 0$, então $v_0(\neg\varphi) = 1$ e $v_0(\bullet\varphi) = 0$.

Se $v_1(\varphi) = \frac{1}{2}$, então $v_1(\neg\varphi) = 0$ e $v_1(\bullet\varphi) = 1$.

Se $v_2(\varphi) = 1$, então $v_2(\neg\varphi) = 0$ e $v_2(\bullet\varphi) = 0$.

Corolário 10 Seja $\Gamma \subseteq \text{For}(I^1)$. Se para toda $\sigma \in \text{For}(I^1)$ existe uma I^1 -valoração v tal que $v(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \in \Gamma$, então Γ é adequadamente completo.

Demonstração: Segue das duas proposições anteriores.

Teorema 11 Seja $\Gamma \subseteq \text{For}(I^1)$. O conjunto Γ é adequadamente completo se, e somente se, existe uma I^1 -valoração v tal que $v(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \in \Gamma$.

Demonstração: ($\Rightarrow$) Consideremos que Γ é adequadamente completo. Precisamos mostrar que existe uma valoração v , tal que $v(\sigma) = 1 \Leftrightarrow \sigma \in \Gamma$.

Pela Proposição 2.9, para cada I^1 -valoração v , temos que $v(\sigma) = 1$ para apenas uma das seguintes fórmulas: $\varphi, \neg\varphi, \bullet\varphi$.

A prova segue por indução na complexidade das fórmulas que ocorrem em Γ .

Seja σ uma variável $p \in \text{Var}(I^1)$.

Se $p \in \Gamma$, então definimos $v(p) = 1$, se $\neg p \in \Gamma$, então definimos $v(p) = 0$, e se não ocorre um destes dois casos, então definimos $v(p) = \frac{1}{2}$ e, neste caso:

$v(\bullet p) = 1$, então $\bullet p \in \Gamma$.

Com esta definição, temos uma valoração v tal que toda fórmula atômica que ocorre em Γ tem valor 1.

Também temos o único caso em que ocorre $\bullet\sigma \in \Gamma$, pois $\bullet\sigma$ só é válida quando $v(\sigma) = \frac{1}{2}$, o que só pode ocorrer se σ é uma fórmula atômica.

Se σ é uma negação $\neg\varphi$, então assume apenas os valores 0 e 1 e, pela HI, $v(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$.

Se $v(\sigma) = 0$, então $v(\neg\varphi) = 0$ e daí $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\varphi) = 1$:

se $v(\varphi) = \frac{1}{2}$, então φ é uma variável p e, portanto, $\varphi \notin \Gamma$ e $\neg\varphi \notin \Gamma$. Logo $\sigma \notin \Gamma$.

se $v(\varphi) = 1$, então $\varphi \in \Gamma$ e como Γ é adequadamente completo, então $\sigma \notin \Gamma$.

Se $v(\sigma) = 1$, então $v(\neg\varphi) = 1$ e, daí, $v(\varphi) = 0$. Pela HI, $\varphi \notin \Gamma$:

se φ é atômica p , então $v(p) = 0$ e $v(\bullet p) = 0$. Logo, $\neg\varphi \in \Gamma$.

se φ não é atômica p , então $\bullet\varphi \notin \Gamma$. Portanto, $\neg\varphi \in \Gamma$.

Se σ é do tipo $\varphi \rightarrow \psi$, então assume apenas os valores 0 e 1 e, pela HI, $v(\varphi) = 1 \Leftrightarrow \varphi \in \Gamma$ e $v(\psi) = 1 \Leftrightarrow \psi \in \Gamma$.

Se $v(\sigma) = 0$, então $v(\varphi \rightarrow \psi) = 0$ e, daí, $v(\varphi) = 1$ e $v(\psi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\psi) = 0$. Pela HI, $\varphi \in \Gamma$ e $\psi \notin \Gamma$. Assim, $\varphi \rightarrow \psi \notin \Gamma$, pois do contrário, usando a regra MP, teríamos que $\psi \in \Gamma$. Logo $\sigma \notin \Gamma$.

Se $v(\sigma) = 1$, então $v(\varphi \rightarrow \psi) = 1$ e daí $v(\varphi) = 0$ ou $v(\varphi) = \frac{1}{2}$ ou $v(\psi) = 1$. Nos dois primeiros casos, $\varphi \notin \Gamma$. Como Γ é adequadamente completo, então para qualquer fórmula ψ , temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{I^1} \psi$. Então, pelo Teorema da Dedução, segue que $\Gamma \vdash_{I^1} \varphi \rightarrow \psi$, ou seja, $\varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$ e, portanto, $\sigma \in \Gamma$.

Agora, se $v(\psi) = 1$, então $\psi \in \Gamma$. Logo, $\Gamma \vdash_{I^1} \psi$ e para toda fórmula φ temos que $\Gamma \cup \{\varphi\} \vdash_{I^1} \psi \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{I^1} \varphi \rightarrow \psi \Leftrightarrow \varphi \rightarrow \psi \in \Gamma$. Portanto, $\sigma \in \Gamma$.

($\Leftarrow$) A volta está no corolário anterior.

Teorema 12 (da Completude) $\Gamma \models_{I^1} \gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_{I^1} \gamma$

Demonstração: Se $\Gamma \not\models_{I^1} \gamma$, então Γ é não trivial. Mostraremos que existe uma teoria adequadamente completa Δ tal que $\Gamma \subseteq \Delta$ e $\gamma \notin \Delta$.

Como $\Gamma \not\models_{I^1} \gamma$, seja $\Delta_0 = \Gamma \cup \{\neg\gamma\}$, se $\Gamma \cup \{\neg\gamma\}$ é não trivial, ou seja $\Delta_0 = \Gamma \cup \{\bullet\gamma\}$, caso contrário.

Consideremos uma enumeração de todas as fórmulas de I^1 : $\psi_0, \psi_1, \psi_2, \dots$

Seja:

$$\Delta_{n+1} = \begin{cases} \Delta_n \cup \{\psi_n\}, & \text{se } \Delta_n \cup \{\psi_n\} \text{ é não trivial} \\ \Delta_n \cup \{\neg\psi_n\}, & \text{se } \Delta_n \cup \{\neg\psi_n\} \text{ é não trivial} \\ \Delta_n \cup \{\bullet\psi_n\}, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

e

$$\Delta = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n.$$

Por construção, para cada $n \in \mathbb{N}$, o conjunto Δ_n é não trivial e, desse modo, também Δ é não trivial.

Além disso, o conjunto Δ é adequadamente completo e como $\Delta_0 \subseteq \Delta$, então $\gamma \notin \Delta$.

Por fim, pelo Teorema 2.11, existe uma I^1 -valoração v tal que, para toda $\sigma \in \Delta$, $v(\sigma) = 1$ e $v(\gamma) \neq 1$. Logo, $\Gamma \not\models_{I^1} \gamma$.

5 Considerações finais

Nesse trabalho, aprofundamos nos estudos da Lógica I^1 , quando provamos que o sistema dedutivo axiomático da Lógica I^1 é correto e completo para a semântica matricial $\mathcal{M}_{I^1}$, usando recursos distintos daquele em que os criadores da lógica I^1 desenvolveram seu trabalho. Desse aprofundamento obtivemos os resultados apresentados nesse artigo, os quais nos auxiliarão num trabalho posterior, de elaboração de um sistema de tablôs para I^1 .

6 Agradecimentos

À FAPESP, pelo apoio financeiro em forma de bolsa de Iniciação Científica, Processo 2018/17286-8.

7 Referências Bibliográficas

BIANCONI, R. **Lógicas construtivas:** intuicionismo, uma introdução. 2006. Disponível em: <https://www.ime.usp.br/~bianconi/recursos/in.pdf>. Acesso em: 29 maio 2018.

EPSTEIN, R. L. **The semantic foundation of logic:** propositional logics. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. v. 1.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica.** São Paulo: Editora Unesp, 2005.

FEITOSA, H. A.; SILVESTRINI, L. H. C. On the logic of pragmatic truth. *In:* ARENHART, J. R. A.; CONTE, J.; MORTARI, C. A. (org.). **Temas em Filosofia Contemporânea II.** Florianópolis: NEL/UFSC, 2016. cap. 7, p. 123-136.

HAACK, S. **Filosofia das lógicas.** Tradução de Cezar Augusto Mortari e Luiz Henrique de Araújo Dutra. São Paulo: Editora Unesp, 2002.

PAIOLA, P. H.; FEITOSA, H. A. Lógica intuicionista I^1 : correção e completude. *In:* ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...].** Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 200-206. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos>. Acesso em: 13 ago. 2019.

SETTE, A. M.; CARNIELLI, W. A. Maximal weakly-intuitionistic logics. **Studia Logica**, v. 55, n. 1, p. 181-203, 1995.