**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac
Iniciação Científica

**João Pedro Mucheroni Covo-
lan**

UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Fi-
lho”
joao.mucheroni@unesp.br

Márcia A. Zanoli Meira e Silva

UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Fi-
lho”
marcia.zanoli@unesp.br

Comparação entre métodos numéricos para sistemas lineares na aplicação do método primal dual barreira logarítmica para dimensionamento de biodigestores rurais

Comparison between numerical methods for linear systems in the application of the primal dual logarithmic barrier method for sizing of rural digesters

Resumo

Biodigestores rurais representam uma alternativa para a geração de energia e destinação correta dos dejetos da produção agropecuária. Anteriormente os autores desenvolveram um software em Java que calcula as dimensões dos principais biodigestores utilizados no Brasil: indiano, chinês e batelada. Os problemas, modelos de programação não linear restritos, foram transformados em irrestritos através do método Primal Dual Barreira Logarítmica e otimizados pelo método de Newton. Visando minimizar o tempo de processamento, os sistemas lineares do método de Newton foram resolvidos por Gauss com Pivotamento Parcial sem troca de linhas, Decomposição LU e Newton modificado com Decomposição LU, com os melhores resultados encontrados nos dois últimos casos. O trabalho atual realizou as implementações utilizando o método de Cholesky, cuja aplicação demonstrou-se inadequada.

Palavras-chave: Biodigestor. Otimização não linear. Método primal dual barreira logarítmica. Métodos numéricos.

Abstract

The rural digesters represent an alternative for energy generation and the correct destination for the manure from agricultural production. Previously, the authors developed a Java software that calculates the dimensions of the main digesters used in Brazil: Indian, Chinese and Batch. The problems, constrained nonlinear programming models, were transformed into unconstrained through the Primal Dual Logarithmic Barrier method and optimized by Newton's method. In order to minimize the processing time, the linear systems of Newton's method were solved by Gauss with partial pivot without exchange lines, LU Decomposition and Newton modified with LU Decomposition, with the best results found in the last two cases. The current work performed the implementations using the Cholesky method, whose application proved inadequate.

Keywords: Digester. Nonlinear optimization. Primal dual logarithmic barrier method. Numerical methods.

1 Introdução

Biodigestores são reatores químicos que, através da fermentação anaeróbica, transformam a matéria orgânica residual da agropecuária em biofertilizante, além de produzirem biocombustível. Por proporcionarem um descarte adequado aos resíduos orgânicos e gerarem uma fonte alternativa de energia o interesse pelo seu uso tem crescido consideravelmente, porém a eficiência de um biodigestor está diretamente relacionada com o seu dimensionamento, cujo cálculo não é trivial.

Ortolani, Benincasa e Lucas Júnior (1991) definem os parâmetros e restrições para o cálculo das dimensões dos três principais modelos de biodigestores no contexto brasileiro: indiano, chinês e batelada e propõem o método de “tentativa e erro” para o seu cálculo tendo em vista atender uma determinada demanda diária de biogás da propriedade rural. Tal método além de ser lento garante apenas que os parâmetros determinados atendam à demanda respeitando as restrições, porém não garante que seu volume seja mínimo e, consequentemente não minimiza seu custo de construção.

Os modelos indiano e chinês são classificados como contínuos, ou seja, são alimentados em curtos intervalos de tempo, trabalhando o indiano com pressão contínua e o chinês com pressão variável. O modelo batelada é alimentado uma única vez e após um período de fermentação seu conteúdo é removido e, consequentemente classificado como batelada.

Com o objetivo de minimizar o volume atendendo a uma demanda diária de biogás Florentino (2003) propõe um modelo de programação não linear restrito para cada biodigestor. Em 2006 Portes e Florentino desenvolveram um software no MATLAB utilizando tal modelo para calcular os parâmetros dos biodigestores. Entretanto, o MATLAB é uma plataforma paga, o que dificulta o acesso ao produtor rural e aos desenvolvedores de software.

Superando esse obstáculo Massola (2015) e Alvarez (2016) apresentam, respectivamente, os softwares para os modelos indiano e batelada na linguagem Java, gratuita e de código aberto, usando o ambiente de desenvolvimento integrado (IDE) NetBeans. Tais aplicativos utilizam o algoritmo Primal Dual Barreira Logarítmica (PDBL), de Baptista, Belati, Sousa e Costa (2006), para transformar o problema restrito de Florentino (2003) em um problema irrestrito, resolvido então pelo método de Newton para otimização não linear multivariáveis. Para a resolução dos sistemas lineares escolheu-se o método da eliminação de Gauss com Pivotamento Parcial (GPP) sem troca de linhas (FRANCO, 2006).

Em 2018 Covolan e Silva desenvolvem um software para o dimensionamento dos três modelos através do método PDBL e atualizam os softwares de Massola (2015) e Alvarez (2016). Visando aumentar a eficiência deste aplicativo, os sistemas lineares gerados pelo método PDBL foram implementados utilizando o método da Decomposição LU (DLU) e o método de Newton modificado com Decomposição LU. Os resultados obtidos por esses métodos, comparados em termos de tempo de execução, mostraram-se melhores que os obtidos pelo método de GPP. Este trabalho de comparação entre os métodos de sistemas lineares originou o trabalho de conclusão de curso do primeiro autor e seus resultados apresentados no VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (COVOLAN; SILVA, 2019).

Com o objetivo de complementar este último trabalho, explorar a característica da matriz dos coeficientes destes sistemas lineares e atender uma sugestão originada durante a apresentação no referido evento, o trabalho atual utiliza o método de Cholesky na resolução dos sistemas lineares gerados pelo método PDBL. O resultado obtido contrariou as expectativas e será discutido na seção 5.

Este trabalho está organizado como segue: na seção 2 é apresentado os tipos de biodigestores e seus respectivos modelos de programação não linear; a seção 3 contém uma descrição dos métodos utilizados; na seção 4 é apresentado o software desenvolvido considerando-se apenas o biodigestor do modelo indiano; e na seção 5 estão as conclusões.

2 Modelos de biodigestores

Nesta seção são apresentados os principais parâmetros para os três biodigestores analisados (ORTOLANI; BENINCASA; LUCAS JÚNIOR, 1991) e seus respectivos problemas de programação não linear multivariáveis restritos propostos por Florentino (2003).

Para cada biodigestor, o processo de otimização determina os dois principais parâmetros, diâmetro interno (D_i , D_c ou apenas D) e altura (H) do biodigestor, a partir dos quais são calculados os demais.

2.1 Indiano

Este tipo de biodigestor é contínuo e deve ser alimentado constantemente com dejetos. A fim de proporcionar uma maior movimentação da biomassa em seu interior possui uma parede divisória no centro do cilindro principal. À medida que o biogás é produzido e consumido, o gasômetro se desloca através do tubo guia para cima e para baixo, respectivamente, aumentando e diminuindo o volume ocupado pelo biogás e mantendo assim a pressão constante. Essa pressão é determinada pela altura ociosa do gasômetro (h_1).

A Figura 1 apresenta um corte frontal de um biodigestor indiano com os principais parâmetros (D_i e H) e os demais parâmetros, essenciais para o seu bom funcionamento, obtidos a partir de D_i e H .

Figura 1 – Corte frontal de um biodigestor indiano

Os parâmetros representados na Figura 1 são:

H: Altura do nível do substrato;	n: Comprimento do tubo de PVC acima da superfície do solo;
h: Altura da parede divisória;	e: Altura do posicionamento dos tubos de entrada e saída;
h₁: Altura ociosa do gasômetro;	m: Distância entre o meio da caixa de entrada e a parede do gasômetro;
h₂: Altura útil do gasômetro;	l: Comprimento do tubo de PVC até a superfície do solo.
D_i: Diâmetro interno do biodigestor;	
D_g: Diâmetro do gasômetro;	
D_b: Diâmetro da base;	
D_s: Diâmetro interno da parede superior;	
a: Altura do fundo da caixa de entrada;	
b: Altura da parede do biodigestor acima do nível do substrato;	

O seu modelo de programação não linear é dado por Florentino (2003):

$$\begin{aligned} & \underset{(D,H)}{\text{Minimizar}} \quad p D^2 H \\ & \text{sujeito a:} \quad \begin{cases} p D^2 H \geq x K B \\ D - H \leq 0 \\ D - 0,6 H \geq 0 \\ 3 \leq H \leq 6 \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

em que:

$$p = \frac{\pi}{4};$$

D = D_i: diâmetro interno (m);

H: altura do biodigestor (m);

x: Porcentagem mínima a ser adicionada ao volume útil do biodigestor;

K: fator de rendimento (adquirido em literatura específica);

B: demanda energética diária (m³);

K B: volume útil do biodigestor e obedece a relação $2 \leq K B \leq 25$.

2.2 Chinês

O biodigestor chinês, também do tipo contínuo, trabalha com pressão variável. Neste tipo de biodigestor não existe o deslocamento do gasômetro e por isso, conforme o biogás é produzido, a pressão aumenta empurrando a biomassa para a caixa de saída, e diminui com o consumo do biogás. A pressão máxima é atingida quando um terço do volume do cilindro principal é ocupado pelo biogás.

A Figura 2 apresenta um corte frontal de um biodigestor chinês e seus principais parâmetros.

Figura 2 - Corte frontal de um biodigestor chinês
Fonte: Portes e Florentino (2006)

Os parâmetros representados na Figura 2 são:

D_c: Diâmetro do corpo cilíndrico;
H_c: Altura do corpo cilíndrico;
h_g: Altura da calota do gasômetro;
h_r: Altura da calota do fundo;
R_g: Raio da calota do gasômetro;
R_r: Raio da calota do fundo;
D_e: Diâmetro da caixa de entrada;
h_e: Altura da caixa de entrada;
z: Comprimento do tubo de PVC até a superfície do solo;

D_s: Diâmetro da caixa de saída;
h_s: Altura da caixa de saída;
a_r: Afundamento da cúpula no solo;
a: Altura do fundo da caixa de entrada;
M₂: Distância entre o meio da caixa de entrada e o corpo cilíndrico do biodigestor;
n₂: Comprimento do tubo de PVC acima da superfície do solo.

De acordo com Florentino (2003), o modelo não linear para este biodigestor é dado por:

$$\begin{aligned} & \underbrace{\text{Minimizar}}_{(D, H)} (p_1 D^2 H + p_2 D^3) \\ & \text{sujeito a:} \\ & \begin{cases} p_1 D^2 H + p_2 D^3 \geq K B \\ 0,5 D - H \leq 0 \\ 0,6 D - H \geq 0 \\ D \geq 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (2)$$

sendo:

$$p_1 = \frac{\pi}{4};$$

$$p_2 = \frac{49\pi}{3072};$$

K: fator de rendimento;

D = D_c: diâmetro do corpo cilíndrico (m);

H = H_c: altura do corpo cilíndrico (m);

B: demanda energética diária (m^3).

2.3 Batelada

Diferentemente dos modelos anteriores, este tipo de biodigestor é alimentado de uma só vez. Ele é aberto e sua biomassa retirada apenas após um período conveniente de fermentação. Para que seja possível manter um fornecimento contínuo de biogás costuma-se adotar uma bateria de biodigestores, que são preenchidos e esvaziados alternadamente em períodos regulares, conforme detalhado em Ortolani, Benincasa e Lucas Júnior (1991).

A Figura 3 apresenta um corte frontal de um biodigestor modelo batelada com seus principais parâmetros.

Figura 3 - Corte frontal de um biodigestor batelada
Fonte: Portes e Florentino (2006)

Os parâmetros representados na Figura 3 são:

H: Altura do nível do substrato;	b: Altura da parede do biodigestor acima do nível do substrato;
h1: Altura ociosa do gasômetro;	Di: Diâmetro interno do biodigestor;
h2: Altura útil do gasômetro;	Dg: Diâmetro do gasômetro;
h3: Altura livre para o deslocamento do gasômetro;	Db: Diâmetro da base;
hg: Altura do gasômetro;	Ds: Diâmetro interno da parede inferior;
c: Altura do gasômetro acima da parede do biodigestor;	De: Diâmetro externo da parede superior.

O modelo de programação não linear associado a este biodigestor é dado por Florentino (2003):

$$\begin{aligned} & \underset{(D,H)}{\text{Minimizar}} \quad p D^2 H \\ & \text{sujeito a:} \\ & \begin{cases} p D^2 H \geq VD \\ H - D \geq 0 \\ 0,6 H - D \leq 0 \\ 0 < H < 6 \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

em que:

$$p = \frac{\pi}{4};$$

$D = D_i$: diâmetro interno (m);

H : altura do nível do substrato (m);

VD : volume do substrato a ser colocado no biodigestor (m^3).

3 Métodos

Em Covolan e Silva (2018) os modelos não lineares de Florentino (2003) foram transformados em problemas irrestritos com o uso do método Primal Dual Barreira Logarítmica. Este método consiste em acrescentar as restrições de desigualdade à função objetivo com o uso de um parâmetro de barreira. Partindo de um ponto inicial factível, as barreiras impedem que as variáveis saiam da região de viabilidade. Entre os métodos de pontos interiores, o PDBL é o mais utilizado por ser eficiente e de fácil implementação.

Considerando apenas o biodigestor do tipo indiano, pois para os outros tipos o procedimento é análogo, a função Lagrangiana associada à equação (1) é apresentada na equação (4):

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } L = & \frac{\pi}{4} D^2 H - \mu [\ln(s_1) + \ln(s_2) + \ln(s_3) + \ln(s_4) + \ln(s_5)] + \\ & \pi_1 \left[xKB - \frac{\pi}{4} D^2 H + s_1 \right] + \pi_2 [D - H + s_2] + \\ & \pi_3 [0,6H - D + s_3] + \pi_4 [H - 6 + s_4] + \pi_5 [3 - H + s_5] \end{aligned} \quad (4)$$

Este modelo possui doze variáveis, a saber, $D, H, s_i, \pi_i, i = 1, \dots, 5$, com s e $\pi > 0$. Neste modelo s_i são as variáveis de folga ou excesso, π_i os multiplicadores de Lagrange e μ o parâmetro de barreira.

De acordo com o algoritmo de Baptista, Belati, Sousa e Costa (2006) para a solução do subproblema de barreira, as condições necessárias de otimalidade de primeira ordem são aplicadas à função Lagrangiana (4), ou seja:

$$\nabla_d L = 0 \quad (5)$$

sendo $d = (x, s, \lambda, \pi)^T$.

A equação (5) representa um sistema de equações não lineares que pode ser resolvido pelo método de Newton através da resolução do sistema linear $H\Delta d = \nabla_d L$, em que H é a matriz Hessiana e $\nabla_d L$ o vetor gradiente da função Lagrangiana L descrita em (4).

Em 2018 Covolan e Silva resolveram esse sistema linear utilizando o método de Gauss com Pivotamento Parcial sem troca de linhas (GPP). Visando aumentar a eficiência computacional no cálculo dos parâmetros do biodigestor e a partir de uma analogia com o método de Newton modificado para otimização monovariável, Covolan e Silva (2019) utilizaram uma versão modificada do método de Newton para otimização multivariáveis irrestrita.

De acordo com Covolan e Silva (2019), o método modificado consiste em resolver o sistema linear $H\Delta d = \nabla_d L$ mantendo-se a mesma matriz Hessiana (H) por n iterações, sendo modificado apenas o valor de $\nabla_d L$. Na iteração $(n+1)$ ou quando o valor de μ é atualizado, a Hessiana é recalculada e o procedimento se repete.

Com o objetivo de complementar as comparações realizadas em Covolan e Silva (2019) este trabalho aplicou o método de Cholesky na resolução do sistema linear $H\Delta d = \nabla_d L$. Os resultados obtidos contrariaram as expectativas e são discutidos na seção 5.

4 Aplicação

O *software* foi desenvolvido utilizando-se a linguagem de programação Java e a IDE NetBeans. Consiste basicamente de duas partes: entrada de dados e saída dos resultados.

Considerando o biodigestor do modelo indiano, a Figura 4 mostra a tela principal de entrada de dados. Nela o usuário informa, através de uma caixa de combinação, o modelo de biodigestor de sua preferência e o tipo de resíduo com que o biodigestor será alimentado. São informados também, em caixas de edição de texto, os dados necessários para o cálculo da demanda diária de biogás, tais como: o número de pessoas que irão utilizar o biogás para cozinhar, o número de lâmpões, a quantidade de horas de uso desses lâmpões, o número de pessoas que usarão o chuveiro e, através de uma tabela, a quantidade, potência e horas de uso de motores (ORTOLANI; BENINCASA; LUCAS JÚNIOR, 1991). O valor do pico de consumo pode ser informado diretamente ou calculado pelo programa utilizando os dados preenchidos em uma tabela correspondente aos períodos de uso dos equipamentos que demandam biogás.

The screenshot shows a software window titled "Dados" (Data) with a menu bar containing "Ajuda" (Help). The interface is divided into two main sections: "Dados" (Data) on the left and "Motores" (Motors) on the right.

Dados Section:

- Tipo de biodigestor:** A dropdown menu with "Indiano" selected.
- Tipo de resíduo:** A dropdown menu with "Exemplo (K = 2,5)" selected.
- Número de pessoas que irão cozinhar:** A text input field with the value "5".
- Número de lâmpões:** A text input field with the value "6".
- Tempo [horas] de uso dos lâmpões:** A text input field with the value "4".
- Número de pessoas que usarão o chuveiro:** A text input field with the value "5".
- Frequência [dias] de retirada dos resíduos:** A text input field with the value "50".
- Pressão máxima [m.c.a] =** A text input field with the value "0.15".
- Buttons:** "Executar", "Fechar", "Exemplo", and "Informar horários: Horários de uso dos equipamentos" (selected with a radio button). There is also an option "Informar pico de consumo [m³]:" which is currently unselected.

Motores Section:

- Quantidade:** A spinner control with the value "1".
- Table:** A table with two columns: "Potência (HP)" and "Horas de uso". The first row contains the values "5" and "1" respectively.

Figura 4 - Entrada de dados

A janela de saída exibe uma imagem esquemática fixa de um biodigestor do modelo selecionado e, ao lado, os respectivos valores dos parâmetros calculados. Abaixo da imagem do biodigestor o botão “PDF” permite ao usuário gerar um arquivo em formato PDF com os dados presentes no formulário, facilitando a impressão desses dados e tornando-os disponíveis em locais onde não seria conveniente portar um computador. A Figura 5 mostra a tela de saída de um biodigestor indiano.

Figura 5 - Saída para o biodigestor indiano

5 Conclusões

Conforme apresentado em Covolan e Silva (2019), os sistemas lineares foram resolvidos pelos métodos de Gauss com pivotamento parcial sem troca de linhas e Decomposição LU(n), onde n representa o número de iterações em que a matriz Hessiana H manteve-se fixa sendo recalculada na iteração ($n+1$), conforme mencionado na seção 3.

Os valores de n variaram de 1 a 10, sendo escolhidos empiricamente. Quando $n = 1$ o método é a Decomposição LU tradicional, visto que a matriz Hessiana é recalculada a cada iteração.

A Tabela 1 apresenta os tempos de execução, em milissegundos, para o cálculo dos parâmetros dos três modelos de biodigestores, com os três métodos considerados. Os dados de entrada utilizados são os apresentados em Ortolani, Benincasa e Lucas Júnior (1991).

Tabela 1 - Tempos de execução para os três modelos e métodos

	Indiano	Chinês	Batelada
GPP	21	39	6138
DLU(1)	24	43	142
DLU(2)	19	50	50
DLU(3)	15	72	28
DLU(4)	5979	26	5
DLU(5)	180	74	7
DLU(6)	62	131	41
DLU(7)	12	30	10
DLU(8)	14	34	8
DLU(9)	130	55	313
DLU(10)	11	66	38

Fonte: Covolan e Silva, 2019

Conforme Covolan e Silva (2019) explicam, os valores em vermelho da Tabela 1 correspondem aos casos que não seguiram o padrão de normalidade da maioria dos casos. Após depuração da execução verificou-se que este fato ocorre devido a mal condicionamento e erros de arredondamento. Os valores em verde são os menores tempos encontrados para cada modelo de biodigestor, e os valores em azul correspondem ao menor tempo médio para cada um dos três modelos.

Observando a Tabela 1, pode-se verificar que o método de Newton modificado com Decomposição LU e $n = 7$ apresentou o menor tempo médio para os três modelos de biodigestores, aproximadamente 17,33 milissegundos, sendo este o método adotado na versão final do *software* desenvolvido.

Devido à eficiência do método de Cholesky e a característica da matriz Hessiana H do sistema linear $H\Delta d = \nabla_d L$ o trabalho atual aplicou tal método esperando resultados iguais ou superiores aos obtidos pelo método de Newton modificado com Decomposição LU e $n = 7$. As expectativas não foram atingidas, pois ao aplicar o método de Cholesky para a resolução dos sistemas lineares o processo de otimização não convergiu.

Após uma série de testes, foi possível notar que, de maneira semelhante ao que ocorreu no método da Decomposição LU (COVOLAN; SILVA, 2019), erros de aproximação acabaram introduzindo elementos iguais a zero na diagonal principal das matrizes triangulares, impedindo a continuidade do processo de decomposição e de resolução do sistema.

No caso da Decomposição LU, esse problema foi solucionado substituindo-se os zeros na diagonal principal da matriz U por valores muito pequenos, chegando-se a uma solução próxima da original.

No Método de Cholesky, essa técnica não foi efetiva, gerando sempre sistemas e soluções muito distintas das originais. Do ponto de vista computacional, isso pode ser explicado por pelo menos dois fatores. Em primeiro lugar, os erros gerados na substituição de valores acabam sendo maiores, porque é necessário evitar não apenas os zeros na diagonal principal como também valores negativos no cálculo desses elementos, que envolve operação de radicia-

ção com índice par (raiz quadrada). Além disso, a propagação desses erros acaba sendo ampliada tanto pela operação de radiciação quanto pelo fato dos erros na matriz triangular inferior serem replicados na matriz triangular superior (transposta) e, consequentemente, aplicados duas vezes na resolução dos sistemas triangulares.

Assim, em poucos passos do algoritmo ocorrem *overflows* de variável e divisões por zero que impedem o processo de otimização de continuar e cuja tentativa de contornar acaba gerando erros cada vez maiores.

Deve-se destacar que a matriz Hessiana, para todos os métodos, foi determinada através de métodos numéricos computacionais que, pela sua natureza, geram erros de arredondamento e cuja propagação pode afetar os resultados finais. Esta matriz Hessiana gerada por técnicas numéricas é considerada a matriz Hessiana completa.

Entretanto, sabe-se que o uso do método de Cholesky em métodos de pontos interiores para programação linear e quadrática convexa é realizado com sucesso, pois nestes casos, a matriz do sistema normal de equações é definida positiva. Contudo, em problemas de programação não linear não convexo este método pode falhar, pois a matriz do sistema normal pode não ser definida positiva.

Assim, constata-se que a escolha da matriz Hessiana completa não foi adequada para a aplicação do método de Cholesky. Tanto Vanderbei e Shanno (1999) quanto Wächter e Biegler (2006) apresentam técnicas para contornar essa falha utilizando a matriz normal do sistema e não a completa. Consequentemente, pretende-se em trabalho futuro realizar novos testes utilizando o método de Cholesky aplicado à matriz do sistema normal e, caso necessário, as técnicas descritas em Vanderbei e Shanno (1999) e/ou Wächter e Biegler (2006).

Diante desses fatores pode-se concluir que, considerando a matriz Hessiana completa, dentre os métodos de sistemas lineares utilizados para resolver o sistema $H\Delta d = \nabla_d L$ (Gauss com Pivotamento Parcial sem troca de linhas, Decomposição LU e Newton modificado com Decomposição LU) o método de Newton modificado com Decomposição LU e $n = 7$ foi o mais eficiente em termos de tempo de execução. Além disso, conclui-se que o método de Cholesky não pode ser aplicado considerando a matriz Hessiana completa para o tipo de problema analisado neste trabalho.

Referências

- ALVAREZ, I. L. **Software para construção de biodigestores do modelo batelada**. 2016. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2016.
- BAPTISTA, E. C.; BELATI, E. A.; SOUSA, V. A.; COSTA, G. R. M. Primal-dual logarithmic barrier and augmented Lagrangian function to the loss minimization in power systems. **Electric Power Components and Systems**, v. 34, n. 7, p. 775-784, 2006.
- COVOLAN, J. P. M.; SILVA, M. A. Z. M. Método primal dual barreira logarítmica aplicado no desenvolvimento de software para dimensionamento de biodigestores contínuos. In: CONGRESSO DE INICIAÇÃO CIENTÍFICA DA UNESP, 30., 2018, Bauru: UNESP. **Anais [...]**. [S.l.]: Unesp, 2018. Disponível em: http://prope.unesp.br/cic_isbn/. Acesso em: 20 mar. 2019.
- COVOLAN, J. P. M.; SILVA, M. A. Z. M. Uso dos métodos de Newton modificado, Gauss e

decomposição LU na aplicação do método primal dual barreira logarítmica para o dimensionamento de biodigestores rurais. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos e resumos** [...]. Bauru: UNESP, Faculdade de Ciências, 2019. p. 408-413. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 10 set. 2019.

FLORENTINO, H. O. Mathematical tool to size rural digesters. **Scientia Agricola**, v. 60, n. 1, p. 185-190, 2003.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2006.

MASSOLA, W. C. **Uso da programação não linear para o dimensionamento de biodigestores indianos**. 2015. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Ciência da Computação) - Faculdade de Ciências, UNESP, Bauru, 2015.

ORTOLANI, A. F.; BENINCASA, M.; LUCAS JÚNIOR, J. **Biodigestores rurais: modelos indiano, chinês e batelada**. Jaboticabal: Unesp, 1991.

PORTES, Z. A.; FLORENTINO, H. O. Aplicativo computacional para projetos e construções de biodigestores rurais. **Energia na Agricultura**, v. 21, n. 1, p. 118–138, 2006.

VANDERBEI, R. J.; SHANNO, D. F. An interior-point algorithm for nonconvex nonlinear programming. **Computational Optimization and Applications**, v. 13, n. 1-3, p. 231-252, 1999.

WÄCHTER, A.; BIEGLER, L. T. On the implementation of an interior-point filter line-search algorithm for large-scale nonlinear programming. **Mathematical programming**, 106(1), p. 25-57, 2006.