**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac
Iniciação Científica

Beatriz Liara Carreira

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
beatrizlcarreira@gmail.com

Rafael de Lima Sterza

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
rlsterza@gmail.com

Analice Costacurta Brandi

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
analice.brandi@unesp.br

Esquema de diferenças finitas exponencial na solução de um problema de distribuição de calor em regime estacionário

Exponential finite difference scheme for solving a steady-state
heat distribution problem

Resumo

A necessidade do desenvolvimento de novas técnicas computacionais para solução de equações diferenciais parciais surge da importância dessa classe de equações que modelam diversos fenômenos físicos na natureza e na indústria. Recentemente um novo método de diferenças finitas de alta ordem foi desenvolvido e aplicado na solução de equações diferenciais parciais de segunda ordem. Nesse sentido, o objetivo deste trabalho está em analisar e comparar a solução de um problema estacionário de distribuição de calor, através de diferentes esquemas de diferenças finitas: exponencial e compacto. Além disso, métodos iterativos não-estacionários para solução do sistema linear resultantes são testados e analisados. Com isso é possível verificar tanto a competitividade do esquema exponencial em comparação com o esquema compacto mais clássico, bem como determinar qual método destinado à solução do sistema de equações lineares é mais adequado.

Palavras-chave: Métodos Numéricos e Aplicações. Diferenças Finitas Exponencial. Métodos Iterativos Não-Estacionários. Equação Elíptica.

Abstract

The need for the development of new computational techniques for solving partial differential equations arises from the importance of this equations class that model several physical phenomena in nature and industry. Recently a new high order finite difference method has been developed and applied in the solution of second order partial differential equations. In this sense, the objective of this paper is to analyze and compare the solution of a stationary heat distribution problem, through different finite difference schemes: exponential and compact. Also, nonstationary iterative methods for resulting linear system solution are tested and analyzed. Thus it is possible to verify both the competitiveness of the exponential scheme compared to the more classic compact scheme, and to determine which method for solving the linear equation system is most appropriate.

Keywords: Numerical Methods and Applications. Exponential Finite Differences. Nonstationary Iterative Methods. Elliptic Equation.

1 Introdução

A principal característica dos problemas estacionários é que sua propriedade de interesse permanece constante em relação ao tempo. E ainda, esses problemas são modelados, em grande parte, por equações diferenciais parciais elípticas, justamente pela ausência da variável temporal.

As equações elípticas mais conhecidas são as equações de Poisson e de Laplace, cujas aplicações são as mais variadas. Por exemplo, a equação de Poisson representa o movimento de um fluido viscoso incompressível a baixa velocidade e a equação de Laplace é empregada para descrever potencial eletromagnético, conforme Fortuna (2012).

O estudo de métodos numéricos surge da necessidade de solucionar problemas que, muitas vezes não admitem solução por meio de outras abordagens. Métodos analíticos nem sempre podem ser adotados, pois a teoria matemática de algumas dessas equações ainda não está suficientemente desenvolvida. Da mesma forma, resolver experimentalmente alguns problemas pode não ser vantajoso, devido principalmente, aos custos operacionais elevados. São esses, alguns dos motivos pelos quais a abordagem computacional tem sido preferencialmente empregada.

Tal abordagem é realizada por meio de métodos numéricos que aproximam precisamente a solução de equações diferenciais parciais com o auxílio de computadores. Recentemente, um novo método numérico foi desenvolvido por Pandey (2013), chamado de método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem, simulado computacionalmente para equações diferenciais parciais elípticas de segunda ordem com diferentes condições de contorno.

A aplicação do método de diferenças finitas exponencial em problemas lineares resulta em um sistema linear de equações que apresenta uma característica peculiar: geralmente a matriz de discretização é simétrica e esparsa. Aproveitando-se da esparsidade dessas matrizes, convém recorrer ao uso dos métodos iterativos para calcular sua solução.

Desta forma, o objetivo deste trabalho está em aplicar o método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem para resolver um problema estacionário de distribuição de calor em uma placa de prata, modelado por uma equação elíptica linear de segunda ordem. Para fins de comparação, também foram apresentados resultados obtidos através da aplicação do esquema de diferenças finitas compacto de quarta ordem. Além disso, diferentes métodos iterativos não-estacionários para resolução do sistema linear foram testados.

2 Formulação matemática

O domínio de integração de uma equação diferencial parcial bidimensional é uma região Ω limitada pela fronteira $\partial\Omega$. Uma das principais equações elípticas que representam os problemas de equilíbrio é a equação de Poisson dada por

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (1)$$

Uma característica dos problemas modelados por equações diferenciais parciais elípticas é que as propriedades físicas desses problemas se propagam em todas as direções dentro da região Ω , afetando os pontos interiores, e por este motivo suas condições de contorno normalmente são especificadas ao longo de toda fronteira. Neste trabalho, considera-se um problema numa região quadrada $\Omega = \{(x, y) : a \leq x \leq b; a \leq y \leq b\}$ com condição de contorno de Dirichlet $u(x, y) = g(x, y)$ em $\partial\Omega$.

3 Formulação numérica

Para aplicar a abordagem computacional em um problema, inicialmente é necessário conhecer seu domínio e, pensando nisso, selecionar alguns pontos nos quais a solução será aproximada, uma vez que o computador é incapaz de aplicar as técnicas numéricas num domínio contínuo, contendo infinitos pontos.

A esse processo denomina-se discretização e deve ser o primeiro passo para solucionar um problema estacionário através de um método numérico. Considerando Ω uma região quadrada, coberta por uma malha, conforme a Figura 1, os pontos nodais são representados pelo cruzamento das linhas e o espaçamento ou passo da malha corresponde à menor distância entre dois pontos nodais vizinhos.

Figura 1: Discretização do domínio: (a) domínio contínuo e (b) domínio discreto.

3.1 Método de diferenças finitas exponencial

O método de diferenças finitas exponencial produz aproximações de alta ordem considerando um espaçamento uniforme h nas direções x e y . Para aproximar a solução da equação elíptica de Poisson, este método utiliza nove pontos e inicialmente é dado pela seguinte equação

$$a_0(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + a_1(u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) + a_2u_{i,j} = b_0h^2f_{i,j}e^{\phi(h)}, \quad (2)$$

com $i, j = 0, 1, \dots, N$, onde N representa a quantidade de subintervalos, enquanto a_0, a_1, a_2 e b_0 são constantes e $\phi(h)$ é uma função diferenciável. O desenvolvimento do método baseia-se em série de Taylor, série de Maclaurin e expansão exponencial. Expandindo a Equação (2) e realizando algumas substituições convenientes, descobre-se o valor das variáveis presentes na expressão, além de uma aproximação para a função ϕ , obtendo-se assim a equação do novo método de diferenças finitas na sua forma final

$$4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 20u_{i,j} = 6h^2f_{i,j}e^{\frac{h^2\nabla^2 f_{i,j}}{12f_{i,j}}}, \quad (3)$$

com $i, j = 0, 1, \dots, N$. O laplaciano que se encontra no expoente é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem.

4 Métodos iterativos baseados no subespaço de Krylov

Nesta seção apresenta-se a família dos métodos do subespaço de Krylov para solução de sistemas lineares. Sendo $C^{n \times n}$ uma matriz e o vetor $\mathbf{y}$ de mesmo comprimento, o espaço de Krylov de C com respeito a $\mathbf{y}$ é definido por

$$K_k(C, \mathbf{y}) = \text{span}\{C^0 \mathbf{y}, C^1 \mathbf{y}, \dots, C^{k-1} \mathbf{y}\}. \quad (4)$$

Considerando o processo iterativo não-estacionário para resolver o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, pode-se definir o resíduo

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k A \mathbf{p}^{(k)}, \quad (5)$$

sendo $\mathbf{p}^{(k)}$ um vetor direção de busca definido, e por recursão obtém-se

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{r}^{(0)} + \sum_{j=1}^{k-1} c_j A^j \mathbf{r}^{(0)}, \quad (6)$$

onde os coeficientes c_j são determinados de forma que a Equação (6) seja satisfeita. A partir disso, também é possível garantir que

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} - \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} A^j \mathbf{r}^{(0)} \Rightarrow \mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)} = - \sum_{j=1}^{k-1} c_{j+1} A^j \mathbf{r}^{(0)}. \quad (7)$$

Portanto, tomando $\mathbf{y} = \mathbf{r}^{(0)}$ e $C = A$, segue que $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$.

O desenvolvimento desses métodos requer primeiramente a construção de bases ortogonais nesse subespaço de Krylov. Para tanto, recorre-se ao Processo de Arnold (JING; HUANG, 2009, p.1584), que fornece a seguinte relação

$$A Q^{(k)} = Q^{(k+1)} H^{(k+1,k)}, \quad (8)$$

onde $Q^{(k+1)}$ é a matriz contendo os $k+1$ vetores da base ortogonal do subespaço de Krylov e $H^{(k+1,k)}$ é uma matriz de Hessenberg de tamanho $(k+1) \times k$.

4.1 Ortogonalização de Galerkin

A técnica de orthogonalização de Galerkin produz o *Full Orthogonalization Method* (FOM) no caso de matrizes não simétricas e o método dos Gradientes Conjugados quando a matriz do sistema é simétrica e positiva definida. Para ambos, após a construção de bases ortogonais no espaço de Krylov, necessita-se forçar que o residual $\mathbf{r}^{(k)}$ seja ortogonal ao subespaço de Krylov K_k . Então o próximo passo consiste em garantir que

$$[Q^{(k)}]^T (\mathbf{b} - A \mathbf{x}^{(k)}) = 0. \quad (9)$$

Como $\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(0)} \in K_k(A, \mathbf{r}^{(0)})$, então $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + Q^{(k)} \mathbf{y}$, onde $\mathbf{y}$ é um vetor a ser determinado de tal forma que satisfaça a condição de otimalidade. Finalmente, o que se obtém é

$$[Q^{(k)}]^T A Q^{(k)} \mathbf{y} = [Q^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(0)}. \quad (10)$$

Utilizando a Equação (8), mostra-se facilmente que $[Q^{(k)}]^T A Q^{(k)} = H^{(k,k)}$. Também pode-se verificar que $[Q^{(k)}]^T \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}^{(0)}\|$ conforme Ascher e Greif (2011), onde $\mathbf{e}_1$ é o vetor canônico com a primeira componente equivalente a 1 e as demais iguais a zero. Assim, tem-se que

$$H^{(k,k)} \mathbf{y} = \mathbf{e}_1 \|\mathbf{r}^{(0)}\|, \quad (11)$$

onde $H^{(k,k)}$ é a matriz de Hessenberg. Então basta resolver este sistema linear para determinar $\mathbf{y}$ e atualizar $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + Q^{(k)} \mathbf{y}$.

4.2 Generalized minimum residual

No método *Generalized Minimum Residual* (GMRES), após a construção de bases ortogonais no subespaço de Krylov, necessita-se minimizar o residual $\mathbf{r}^{(k)}$ na norma-2. Utilizando a Equação (8) e lembrando-se da relação $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + Q^{(k)} \mathbf{z}$, então o vetor $\mathbf{z}$ deve ser calculado de maneira que minimize $\|\mathbf{b} - A\mathbf{x}^{(k)}\|_2$. Com algumas substituições, descobre-se que o problema consiste em resolver

$$\min_{\mathbf{z}} \|\mathbf{e}_1 \gamma_0 - H^{(k+1,k)} \mathbf{z}\|, \quad \text{onde } \gamma_0 = \|\mathbf{r}^{(0)}\|. \quad (12)$$

Aplicando a decomposição QR (ASCHEER; GREIF, 2011, p.153) para resolver o problema de mínimos quadrados, então $H^{(k+1,k)} = U^{(k+1,k)} R^{(k,k)}$, e portanto

$$\|\mathbf{e}_1 \gamma_0 - H^{(k+1,k)} \mathbf{z}\| = \|\gamma_0 [U^{(k+1,k)}]^T \mathbf{e}_1 - R^{(k,k)} \mathbf{z}\|. \quad (13)$$

Então basta resolver o sistema linear dado por

$$R^{(k,k)} \mathbf{z} = \gamma_0 [U^{(k+1,k)}]^T \mathbf{e}_1, \quad (14)$$

para determinar $\mathbf{z}$ e atualizar $\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^{(0)} + Q^{(k)} \mathbf{z}$.

5 Resultados numéricos

Esta seção contém testes numéricos para solução de uma equação de Poisson. Primeiramente, resolve-se uma equação elíptica a fim de verificar a ordem de acurácia do método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem. Finalmente, aplica-se o método para solucionar um problema de distribuição de calor em regime estacionário.

5.1 Ordem de acurácia

De acordo com a análise teórica, o método de diferenças finitas exponencial é um método de quarta ordem e para verificação da ordem de acurácia desse método, testes numéricos foram realizados considerando a seguinte equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2e^{x+y}, \quad (15)$$

com condição de contorno de Dirichlet $u(x, y)$ em todos os lados unitários de um quadrado (FORTUNA, 2012, p.236) e com solução exata dada por $u(x, y) = e^{x+y}$.

A discretização foi aplicada em diferentes refinamentos de malha, considerando as malhas grossa com espaçamento $h = 0.2$, intermediária grossa com $h = 0.1$, intermediária com $h = 0.05$, intermediária fina com $h = 0.025$ e fina com $h = 0.0125$.

A Tabela 1 contém os valores obtidos para o erro máximo absoluto calculado a partir da norma $\|E\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |U_{i,j} - u_{i,j}|$ em cada malha computacional utilizada, sendo U a solução numérica

enquanto u é a solução analítica. A partir do erro, foi então calculada a ordem de acurácia do método. Pode-se notar que o erro numérico obtido nas simulações diminui à medida que a malha é refinada, e principalmente que a ordem de acurácia do método de diferenças finitas exponencial mantém-se próxima de quatro, em concordância com a análise teórica.

Tabela 1: Teste de verificação da ordem de acurácia para o método exponencial.

Malha	Erro	Ordem de acurácia
Grossa	7.6665e-06	–
Intermediária grossa	4.7808e-07	4.0032
Intermediária	2.9874e-08	4.0002
Intermediária fina	1.8713e-09	3.9968
Fina	1.2337e-10	3.9230

5.2 Problema de distribuição de calor em regime estacionário

Nesta seção apresenta-se a solução de um problema elíptico, considerando que esteja sendo gerado calor uniformemente em cada ponto de uma placa de prata quadrada de 5 cm por 5 cm, à taxa $q = 1.5 \text{ cal}/(\text{cm}^3 \cdot \text{s})$. E, ainda, que as bordas sejam mantidas às seguintes temperaturas

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= x(5 - x), \\ u(0, y) &= y(5 - y), \\ u(x, 5) &= 0, \\ u(5, y) &= 0, \end{aligned}$$

considerando $0 \leq x, y \leq 5$. A temperatura estacionária satisfaz a seguinte equação de Poisson

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{q}{K}, \quad (16)$$

em que K é a condutividade térmica, equivalente a $1,04 \text{ cal}/(\text{cm} \cdot \text{grau} \cdot \text{s})$, conforme Burden e Faires (2008).

O problema foi resolvido pelo método de diferenças finitas exponencial, assim como no trabalho de Carreira, Sterza e Brandi (2019), porém considerando malhas mais refinadas: a malha grossa, 11×11 , tem um espaçamento equivalente a 0.5 e a malha cujo espaçamento é 0.25 é considerada uma malha intermediária grossa. Também foram testadas uma malha intermediária 41×41 , uma malha intermediária fina 81×81 com $h = 0.0625$, e uma malha fina 161×161 com $h = 0.03125$. Os códigos foram implementados no software Octave, e simulados num cluster com sistema CentOS Linux e processador Intel Xeon E5-2620, com 32GB de memória RAM.

Em primeira análise, realizou-se uma comparação entre os métodos de resolução de sistemas lineares: GMRES, Gradiente Conjugado implementado como método baseado no subespaço de Krylov (FOM) e Gradiente Conjugado implementado na forma usual. Os resultados estão apresentados nas Tabelas 2, 3 e 4, em que podem ser observados o tempo computacional gasto nas simulações numéricas e a quantidade de iterações necessárias para convergência. Nas tabelas também estão presentes dados das simulações utilizando o esquema de diferenças finitas compactas de quarta ordem, com o objetivo de realizar uma comparação entre os diferentes esquemas: o exponencial, recentemente estudado e o compacto, que é um método clássico frequentemente utilizado, e cuja fórmula de discretização é dada por (ROSSER, 1975, p.353)

$$4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1} + u_{i-1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1}) - 20u_{i,j} = 6h^2 f_d, \quad (17)$$

sendo que

$$f_d = \frac{f_{i,j-1} + f_{i-1,j} + 8f_{i,j} + f_{i+1,j} + f_{i,j+1}}{12}. \quad (18)$$

Percebe-se que a quantidade de iterações é invariável, isto é, independe do esquema de diferenças finitas utilizado. Há uma pequena variação no tempo computacional, demonstrando competitividade do método mais recente em relação à técnica mais clássica, conforme Carreira, Sterza e Brandi (2019).

Além disso, as simulações demandaram tempo computacional relativamente pequeno em todos os casos, exceto nos testes com a malha mais fina, quando o tempo é consideravelmente maior. Essa diferença é ainda mais expressiva para o método GMRES, cujas simulações levaram mais tempo para convergir. Justamente por isso, pode-se concluir que o método dos Gradientes Conjugados exerceu melhor desempenho na solução deste problema. Além disso, os resultados não permitem afirmar que houve interferência da forma de implementação sobre o desempenho computacional do método dos Gradientes Conjugados.

Tabela 2: Quantidade de iterações e tempo computacional (em segundos) gasto nas simulações numéricas com o método dos Gradientes Conjugados.

Malha	Exponencial		Compacto	
	Iterações	Tempo	Iterações	Tempo
Grossa	27	0.0280	27	0.0258
Intermediária grossa	54	0.1071	54	0.0908
Intermediária	107	0.5110	107	0.4567
Intermediária fina	210	4.4990	210	4.2437
Fina	415	73.7504	415	85.4787

Tabela 3: Quantidade de iterações e tempo computacional (em segundos) gasto nas simulações numéricas com o método do Gradiente Conjugado implementado com base no subespaço de Krylov (FOM).

Malha	Exponencial		Compacto	
	Iterações	Tempo	Iterações	Tempo
Grossa	27	0.0273	27	0.0238
Intermediária grossa	54	0.1031	54	0.0876
Intermediária	107	1.0089	107	0.9467
Intermediária fina	210	6.2119	210	5.9505
Fina	415	88.0885	415	75.0227

Tabela 4: Quantidade de iterações e tempo computacional (em segundos) gasto nas simulações numéricas com o método GMRES.

Malha	Exponencial		Compacto	
	Iterações	Tempo	Iterações	Tempo
Grossa	26	0.1467	26	0.1467
Intermediária grossa	53	1.0392	53	1.0507
Intermediária	106	8.3615	106	8.5045
Intermediária fina	206	63.6777	206	65.3954
Fina	408	530.9758	408	522.2515

Devido à semelhança no desempenho do método dos Gradientes Conjugados nas suas duas formas de implementação, também evidenciado por Carreira, Sterza e Brandi (2019), neste trabalho uma investigação mais minuciosa deste fato é realizada. Neste sentido, a Figura 2 apresenta a diferença entre as soluções obtidas de acordo com os níveis de refinamento de malha adotados. Percebe-se que independente do refinamento da malha, as soluções permanecem muito próximas, na ordem de 10^{-15} a 10^{-11} .

Figura 2: Erro entre as soluções do método dos Gradientes Conjugados clássico e o método FOM.

Além disso, também são apresentadas algumas simulações numéricas com variações da taxa de distribuição de calor q e da constante de condutividade térmica K . A princípio o problema considera $q = 1.5$ e $K = 1.04$, e a distribuição da temperatura na placa de prata adotando estes parâmetros pode ser vista na Figura 3.

Fixando $q = 1.5$ e variando a constante de condutividade térmica para valores de $K = 1.00$, 1.02 , 1.10 e 1.40 , conforme a Figura 4, percebe-se que à medida em que K aumenta, as temperaturas mais altas deixam de concentrar-se próximas ao centro da placa. Pode-se notar ainda que variações sutis neste parâmetro provocam alterações facilmente perceptíveis graficamente. Além disso, não foram identificadas vantagens ou desvantagens na convergência do método exponencial a partir da variação do parâmetro K .

Figura 3: Distribuição da temperatura na placa de prata considerando $q = 1.5$ e $K = 1.04$.

Figura 4: Distribuição da temperatura na placa considerando $q = 1.5$ e: (a) $K = 1.00$, (b) $K = 1.02$, (c) $K = 1.10$ e (d) $K = 1.40$.

Dessa vez, fixando $K = 1.04$ e variando a taxa de distribuição de calor para valores de $q = 1.10$, 1.30 , 1.70 e 2.00 , conforme a Figura 5, percebe-se que a variação de q provoca um aumento na região com maiores temperaturas no interior da placa, e que essa região tende a crescer conforme q também cresce. Pode-se notar que valores mais altos dessa taxa são capazes de elevar a temperatura máxima no interior da placa. Além disso, da mesma forma como ocorreu para a constante de condutividade térmica K , a convergência do método exponencial não foi afetada com as variações da taxa de distribuição de calor consideradas acima.

Figura 5: Distribuição da temperatura na placa considerando $K = 1.04$ e: (a) $q = 1.10$, (b) $q = 1.30$, (c) $q = 1.70$ e (d) $q = 2.00$.

6 Conclusões

Neste trabalho além de ser apresentada uma análise do comportamento da temperatura na placa de prata com variações das constantes q e K , apresentou-se uma comparação entre dois diferentes esquemas numéricos para solução da equação diferencial parcial elíptica. Percebeu-se um desempenho satisfatório do método de diferenças finitas exponencial de alta ordem, em relação ao método compacto, sendo em alguns casos sensivelmente melhor, observando o tempo computacional

das simulações numéricas. Há, portanto, concordância com o que foi apresentado por Pandey (2013), cuja conclusão explica que pode-se obter um melhor desempenho do método exponencial sobre o compacto através da investigação de diferentes métodos para resolução dos sistemas lineares. Nesse sentido, também comparou-se métodos não-estacionários para solução do sistema linear resultante da discretização. Notou-se comportamentos semelhantes, apesar do método dos Gradientes Conjugados ter se sobressaído com relação ao tempo computacional. As duas formas de implementação deste método consideradas neste trabalho desempenharam de forma bastante similar, verificado pelo tempo e quantidade de iterações necessárias para convergência, bem como pela proximidade das soluções produzidas.

7 Agradecimentos

Os autores agradecem à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e à FAPESP, processo nº 2016/08343-2, pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

8 Referências Bibliográficas

- ASCHER, U. M.; GREIF, C. **A first course in numerical methods**. Philadelphia: SIAM, 2011.
- BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Análise numérica**. São Paulo: Cengage Learning, 2008.
- CARREIRA, B. L.; STERZA, R. L.; BRANDI, A. C. Esquema de diferenças finitas exponencial na solução de um problema de distribuição de calor numa placa metálica. *In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 132-138. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 21 ago. 2019.
- FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.
- JING, Y. F.; HUANG, T. Z. Restarted weighted full orthogonalization method for shifted linear systems. **Computers and Mathematics with Applications**, New York, v. 57, n. 9, p. 1583-1591, May 2009.
- PANDEY, P. K. A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations. **Journal of Mathematical and Computational Science**, New Delhi, v. 3, n. 5, p. 1325-1334, 2013.
- ROSSER, J. B. Nine-point difference solutions for Poisson's equation. **Computers & Mathematics with Applications**, Great Britain, v. 1, n. 3-4, p. 351-360, 1975.