**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Rafael de Lima Sterza

UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
rafael.sterza@unesp.br

Beatriz Liara Carreira

UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
liara.carreira@unesp.br

Analice Costacurta Brandi

UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho"
analice.brandi@unesp.br

Solução numérica da equação de Poisson no problema da cavidade com tampa móvel

Numerical solution of Poisson equation in the lid-driven cavity problem

Resumo

Simulação numérica é uma abordagem amplamente utilizada em dinâmica dos fluidos visto que viabiliza a análise do comportamento de diferentes tipos de escoamentos de fluidos que não possuem solução analítica. Nesse sentido, o escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma cavidade quadrada é um problema frequentemente empregado para a avaliação de algoritmos para resolver as equações de Navier-Stokes incompressíveis, e neste trabalho é apresentada uma simulação desse problema, em que a equação de Poisson para o cálculo da corrente foi resolvida por duas diferentes abordagens, sendo uma delas a aproximação de segunda ordem, proveniente da discretização do método de diferenças finitas, e outra pelo método de diferenças finitas compactas de quarta ordem. Os resultados obtidos são satisfatórios, quando comparados aos encontrados na literatura.

Palavras-chave: Mecânica dos Fluidos e Aplicações. Problema da Cavidade. Equações de Navier-Stokes. Método de Diferenças Finitas.

Abstract

Numerical simulation is a widely used approach to seen fluid applications that enables an analysis of the behavior of different types of fluid flows that have no analytical solution. In this sense, the flow made by the movement of the lid of a square cavity is a problem often used to evaluate solver algorithms as incompressible Navier-Stokes equations, and in this paper an analysis of this problem is published, in which Poisson equation to calculate the current was solved by two different approaches, one of them being the third order, proving the discretization of the finite difference method, and another compact finite difference method in the fourth order. The results obtained are satisfactory when compared to those found in the literature.

Keywords: Fluid Mechanics and Applications. Cavity problem. Navier-Stokes equations. Finite Difference Method.

1 Introdução

Escoamentos de fluidos podem ser encontrados em diferentes ramos das Ciências e Engenharias, envolvendo a indústria, a agricultura, as ciências ambientais, entre outras áreas (FORTUNA, 2012). A área que investiga os fluidos e suas propriedades, designada de mecânica dos fluidos, desenvolveu-se inicialmente de forma experimental com o estudo do movimento de fluidos em canais e tubos. O início da investigação de caráter matemático pode ser atribuído a Euler por meio do desenvolvimento de relações entre o movimento dos fluidos e as forças envolvidas nesse movimento. A hidrodinâmica introduzida pelas equações de Euler ganhou impulso no século XIX por meio dos trabalhos de Claude Navier, Simeon Poisson e George Stokes, culminando com o desenvolvimento das equações de Navier-Stokes (FORTUNA, 2012), que são equações diferenciais parciais não lineares para as quais soluções analíticas são conhecidas apenas para alguns casos específicos, de modo que métodos alternativos de solução devem ser empregados para resolução de problemas de interesse (VASATA *et al*, 2011).

Neste trabalho foi estudada e implementada uma formulação baseada nas equações de Navier-Stokes, visando a solução numérica do problema de escoamento em uma cavidade quadrada cuja tampa móvel tem velocidade constante. É utilizada uma solução explícita para o cálculo da vorticidade e a solução da equação de Poisson por diferenças finitas de segunda ordem e diferenças finitas compactas de quarta ordem, em que os resultados obtidos ficaram consideravelmente próximos dos esperados, exceto nas regiões próximas da fronteira. Para as simulações numéricas utilizou-se o MatLab, que é um ambiente de computação numérica amplamente conhecido por sua robustez e versatilidade.

2 Problema da cavidade com tampa móvel

O interior da cavidade, como ilustrado na Figura 1, é totalmente preenchido com fluido. Inicialmente, a tampa da cavidade e o fluido estão em repouso, e as paredes são sólidas e impermeáveis. No instante t_0 a tampa da cavidade é instantaneamente acelerada para a velocidade $U > 0$. Devido às tensões viscosas, o movimento da tampa “puxa” o fluido que está adjacente a ela, originando o escoamento.

Figura 1: Escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma caixa (cavidade).

Em que o interior do domínio de simulação na Figura 1 é denotado por Ω , sendo a fronteira da tampa móvel denotada por $\partial\Omega_2$ e o restante da fronteira da caixa por $\partial\Omega_1$.

As equações que modelam o escoamento forçado pelo movimento da tampa de uma caixa descritas em termos da função de corrente-vorticidade são

$$\frac{D\omega}{Dt} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad \text{em } \Omega \times [0, t], \quad (1)$$

$$\nabla^2 \psi = -\omega \quad \text{em } \Omega \times [0, t], \quad (2)$$

onde $\psi(x, y, t)$ é uma função real, conhecida como função corrente, definida de maneira que satisfaça a conservação de massa e $\omega(x, y, t)$ é a vorticidade. Tem-se que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (3)$$

$$\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad (4)$$

sendo que u e v denotam as componentes do vetor velocidade $\mathbf{u}(x, y, t) = (u(x, y, t), v(x, y, t))$ e a notação $\frac{D}{Dt}$ representa a derivada material. As condições iniciais e de contorno são

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, y, 0) &= \mathbf{0} \quad \text{em } \Omega, & \mathbf{u}(x, y, t) &= \mathbf{0} \quad \text{em } \partial\Omega_1 \times [0, t], \\ u(x, y, t) &= 1 \quad \text{e} \quad v(x, y, t) = 0 \quad \text{em } \partial\Omega_2 \times [0, t]. \end{aligned} \quad (5)$$

O domínio de simulação é indicado por Ω , a tampa é a fronteira de Ω representada por $\partial\Omega_2$ e a caixa é a fronteira $\partial\Omega_1$. A partir dessas condições para u deve-se desenvolver condições adequadas para ω e ψ . O escoamento em uma cavidade se caracteriza pela presença de uma grande zona de recirculação central e outras, menores, nos cantos inferiores. O tamanho dessas regiões, bem como a localização da zona de recirculação central, variam com o número de Reynolds do escoamento (FORTUNA, 2012).

É importante mencionar que a dedução das equações do problema foi baseada nas equações de Navier-Stokes que descrevem o escoamento de fluidos, são equações fundamentais da mecânica dos fluidos, que se originam da aplicação a meios contínuos, do princípio de conservação da massa, das leis de Newton a respeito da quantidade de movimento de um corpo, e do princípio de conservação da energia (PONTES; MANGIAVACCHI; ANJOS, 2017). Além disso, considerou-se um escoamento é bidimensional, incompressível e laminar e que o fluido no interior da cavidade é newtoniano e com propriedades constantes (BRUNETTI, 2008; KUNDU; COHEN, 2010).

As equações apresentadas estão em sua forma adimensional, pois em um problema de mecânica dos fluidos é comum o tratamento adimensional para as equações que o modela, com o objetivo de mostrar os efeitos físicos, desenvolver o modelo independente do sistema de unidades, delimitar os valores de variáveis e parâmetros e, principalmente, propiciar condições para se obter situações geometricamente similares. As equações adimensionais também são relevantes para análises analíticas e para determinar a relevância relativa de vários termos nas equações (FERZIGER; PERIC, 1997).

3 Formulação matemática

A Equação (1) pode ser escrita como

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \quad \text{em } \Omega \times [0, t], \quad (6)$$

a partir da definição de derivada material, permanecendo inalteradas as Equações (2)-(4).

Corrente-vorticidade

Consideremos as equações do momento em y e em x , respectivamente,

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right], \quad (7)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + v \frac{\partial u}{\partial y} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]. \quad (8)$$

Multiplicando a Equação (7) por $\frac{\partial}{\partial x}$ e a Equação (8) por $\frac{\partial}{\partial y}$ e, em seguida, subtraindo as equações resultantes e, além disso, atribuindo: $\omega = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$, obtém-se

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial^2 uv}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 uv}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 vv}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 uu}{\partial x \partial y} = \frac{1}{Re} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]. \quad (9)$$

Atribuindo, também, as seguintes informações, $T_1 = \frac{\partial^2 uv}{\partial x^2}$, $T_2 = \frac{\partial^2 uv}{\partial y^2}$, $T_3 = \frac{\partial^2 vv}{\partial x \partial y}$ e $T_4 = \frac{\partial^2 uu}{\partial x \partial y}$, derivando termo a termo pela regra do produto e utilizando a equação da continuidade, obtém-se

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 = u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y}. \quad (10)$$

Substituindo a Equação (10) na Equação (9), obtém-se a Equação (6) que é uma equação convecção-difusão para a vorticidade do fluido (FORTUNA, 2012). A vantagem de utilizar a formulação Corrente-vorticidade é que a pressão é eliminada das equações (AZEVEDO, 2010; PONTES; MANGIAVACCHI; ANJOS, 2017).

A equação da continuidade pode ser satisfeita pelo campo de velocidades se definir uma função linha de corrente ψ , tal que

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{e} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Substituindo-se as definições de u e v na definição de vorticidade, obtém-se a Equação (2), que é uma equação de Poisson para a função linha de corrente. A partir do instante t_0 e com condições auxiliares apropriadas, as equações (6) e (2) podem ser utilizadas para a determinação do campo de velocidades do fluido (FORTUNA, 2012).

4 Formulação numérica

Este trabalho baseia-se na utilização de dois métodos numéricos para a resolução da equação de Poisson, para o cálculo da função linha de corrente. A primeira abordagem é a clássica, a equação de Poisson é resolvida por um método de segunda ordem, essa formulação não será detalhada neste trabalho, no entanto, pode ser consultada em Fortuna (2012). Por outro lado, a segunda abordagem utiliza-se o método de diferenças finitas compactas de quarta ordem. Além da equação de Poisson para o cálculo da função linha de corrente, precisa-se calcular a vorticidade, sendo que foi utilizado uma aproximação de segunda ordem para os pontos no interior do domínio e de terceira ordem nos pontos da fronteira.

Diante ao exposto, nesta seção são apresentados os métodos numéricos para a resolução do problema, junto com a discretização da equação governante e das condições de contorno.

Vorticidade: Método de diferenças finitas

Para a solução do problema foi utilizada uma malha co-localizada com $N \times N$ pontos. A Equação (6) pode ser discretizada de maneira explícita utilizando diferenças finitas, para isso, utilizou-se aproximações explícitas de segunda ordem, obtendo

$$\omega_{i,j}^{t+1} = \delta_t (A\omega_{i,j}^t + B\omega_{i-1,j}^t + C\omega_{i+1,j}^t + D\omega_{i,j-1}^t + E\omega_{i,j+1}^t), \quad (11)$$

em que $A = 1/\delta_t + u_{i,j}(1/\delta_x + 1/\delta_y) - 2/Re(1/\delta_x^2 + 1/\delta_y^2)$, $B = 1/(Re\delta_x^2)$, $C = 1/(Re\delta_x^2) - u_{i+1,j}/\delta_x$, $D = 1/(Re\delta_y^2)$ e $E = 1/(Re\delta_y^2) - u_{i,j+1}/\delta_y$.

Uma vez que a vorticidade foi calculada no interior do domínio, calcula-se a corrente, através da Equação (2). Trata-se de uma equação de Poisson bidimensional, sendo que sua resolução foi realizada por dois métodos diferentes neste trabalho, pelo método de diferenças finitas de segunda ordem (clássico) e pelo método de diferenças finitas compactas, que será apresentado abaixo. Por fim, as velocidades são calculadas utilizando a Equação (3), aproximando as derivadas por diferenças centrais, isto é,

$$u_{i,j} = \frac{\psi_{i,j+1} - \psi_{i,j-1}}{2\delta_y}, \quad (12)$$

e

$$v_{i,j} = -\frac{\psi_{i+1,j} - \psi_{i-1,j}}{2\delta_x}. \quad (13)$$

Condições iniciais e de contorno

Como no instante inicial t_0 o fluido está em repouso, tanto u quanto v são nulos. Os valores para u e v nas bordas da cavidade são dadas pelas Equações (5). A função ψ na parede é calculada através da Equação (4) aplicada nas paredes e substituindo os valores de u e v nas respectivas paredes. Sendo assim, é obtido que a variação de ψ é nula nas bordas, logo ψ é constante nas bordas e, por convenção, ψ é tomada como sendo nula.

As condições de contorno demandam atenção especial, principalmente quando utilizada a formulação corrente-vorticidade. Tanto na entrada, quanto nas paredes, ω é calculado segundo a Equação (2). No início, utiliza-se uma aproximação para $\psi_{0,j}$ e para $\psi_{1,0}$ de terceira ordem. Analogamente, aproximações são utilizadas no fim da cavidade, sendo importante levar em consideração que nas paredes, as expressões obtidas para a entrada podem ser simplificadas pelo fato de ser constante na direção x .

As paredes da cavidade foram consideradas impermeáveis, de modo que $v_{i,1} = v_{i,M} = 0$, $i = 2, \dots, N-1$, e utilizando as condições de contorno, tem-se que $u_{i,1} = 0$, $u_{i,M} = 1$, $i = 2, \dots, N-1$. Na saída, as velocidades foram consideradas constantes na direção x , chegando a $v_{N,j} = v_{N-1,j}$ e $u_{N,j} = u_{N-1,j}$ para $j = 2, \dots, M-1$.

Vale a pena ressaltar que, de acordo com a ordenação dos pontos na malha, em uma parede a aproximação deverá ser avançada, e na outra atrasada, a fim de que a equação para calcular ω nas bordas utilize apenas valores de ψ que estão dentro do domínio e que sejam conhecidos.

Método de diferenças finitas compactas

A Equação (2) também foi resolvida pelo método de diferenças finitas compactas de quarta ordem e, para isso, considerou uma malha retangular com espaçamento h e k nas direções x e y , respectivamente, então tem-se que

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} - \frac{h^4}{360} \frac{\partial^6 \psi}{\partial x^6} \Big|_{i,j} + O(h^4), \quad (14)$$

e

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{k^2} - \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \Big|_{i,j} - \frac{k^4}{360} \frac{\partial^6 \psi}{\partial y^6} \Big|_{i,j} + O(k^4). \quad (15)$$

Considerando o fato que ψ é a solução de (2), tem-se que

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}, \quad (16)$$

da mesma forma

$$\frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \Big|_{i,j} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}. \quad (17)$$

Ao substituir (16) e (17) em (14) e (15), respectivamente, e utilizando uma aproximação por diferenças finitas centradas na segunda derivada de ω , obtém-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i-1,j} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i+1,j}}{h^2} + \frac{1}{12} (\omega_{i-1,j} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i+1,j}) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{h^4}{144} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^4} \Big|_{i,j} + \\ + O(h^4), \end{aligned} \quad (18)$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{\psi_{i,j-1} - 2\psi_{i,j} + \psi_{i,j+1}}{k^2} + \frac{1}{12} (\omega_{i,j-1} - 2\omega_{i,j} + \omega_{i,j+1}) + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} - \frac{k^4}{144} \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} \Big|_{i,j} + \\ + O(k^4). \end{aligned} \quad (19)$$

Perceba que é necessário uma aproximação para o termo $\frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j}$, que pode ser dado por

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \psi}{\partial x^2 \partial y^2} \Big|_{i,j} = \frac{4\psi_{i,j}}{h^2 k^2} - 2 \left(\frac{\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}}{h^2 k^2} \right) + \\ + \frac{\psi_{i-1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i+1,j+1}}{h^2 k^2}. \end{aligned} \quad (20)$$

Substituindo (20) em (18) e (19), somando as equações resultantes, considerando $h = k$ e, finalmente, substituindo-a em (2), obtém-se o método de diferenças finitas compactas de quarta ordem (OKORO; OWOLOKO, 2010)

$$\frac{1}{6} (\psi_{i+1,j+1} + \psi_{i+1,j-1} + \psi_{i-1,j+1} + \psi_{i-1,j-1}) + \frac{2}{3} (\psi_{i-1,j} + \psi_{i+1,j} + \psi_{i,j-1} + \psi_{i,j+1}) - \frac{10}{3} \psi_{i,j} =$$

$$= -\frac{h^2}{12}(\omega_{i-1,j} + \omega_{i+1,j} + \omega_{i,j-1} + \omega_{i,j+1} + 8\omega_{i,j}). \quad (21)$$

Diante disso, com as vorticidades calculadas através da Equação (11), é possível obter a função corrente utilizando a Equação (21) e, finalmente, calcular as velocidades considerando as equações (12) e (13).

5 Resultados numéricos

Para verificação dos resultados decorrentes dos esquemas numéricos desenvolvidos e dos respectivos códigos implementados em MatLab para a resolução do problema discutido, neste trabalho eles foram comparados com resultados já validados ou amplamente reconhecidos na literatura técnica pertinente, optando-se então por utilizar o trabalho de Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982) para tal aferição.

Neste trabalho foi utilizada uma malha 128×128 e realizada a comparação entre os valores das velocidades u e v ao longo da linha vertical e horizontal através do centro geométrico da cavidade.

As Figuras 1 e 2 ilustram essa comparação, para u e v respectivamente, utilizando o número de Reynolds, $Re = 100$. Pode-se observar em tais figuras que os resultados obtidos neste trabalho se aproximam do encontrado em Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982), e o método de segunda ordem se aproxima um pouco mais dos resultados desse autor.

Figura 2: Comparação da velocidade u através do centro geométrico para $Re = 100$.

Pode-se notar nas Figuras 1 e 2, que os resultados obtidos neste trabalho se aproximam do encontrado na literatura e o método de segunda ordem se aproxima um pouco mais dos resultados de Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982). É possível comprovar essas ilustrações através das Tabelas apresentadas abaixo, sendo que a Tabela 1 apresenta os resultados para a velocidade u e a Tabela 2 para a velocidade v .

Tabela 1: Resultados para u-velocidade utilizando $Re = 100$.

Ponto	Ghia (1982)	Ordem 2	Ordem 4
129	1	1	1
126	0.84123	0.84155	0.84172
125	0.78871	0.78915	0.78938
124	0.73722	0.73774	0.73801
123	0.68717	0.68770	0.68800
65	-0.20581	-0.20789	-0.20800
10	-0.04775	-0.04097	-0.04103
9	-0.04192	-0.03691	-0.03697
8	-0.03717	-0.03276	-0.03281
1	0	0	0

Tabela 2: Resultados para v-velocidade utilizando $Re = 100$.

Ponto	Ghia (1982)	Ordem 2	Ordem 4
129	0	0	0
125	-0.05906	-0.05820	-0.05829
124	-0.07391	-0.07277	-0.07288
123	-0.08864	-0.08718	-0.08731
122	-0.10313	-0.10134	-0.10149
104	-0.24533	-0.23573	-0.23600
31	0.17527	0.16186	0.16204
30	0.17507	0.16147	0.16166
10	0.10091	0.09184	0.09194
1	0	0	0

Sendo assim, aumenta-se o número de Reynolds para $Re = 400$, as Figuras 3(a) e 4 apresentam os valores das velocidades u e v , utilizando esse parâmetro.

Também, apresenta-se os resultados dispostos em tabelas para a conferência do resultado.

Tabela 3: Resultados para u-velocidade utilizando $Re = 400$.

Ponto	Ghia	Ordem 2	Ordem 4
129	1	1	1
126	0.75837	0.75344	0.75455
125	0.68439	0.67817	0.67949
124	0.61756	0.61009	0.61152
123	0.55892	0.55022	0.55168
65	-0.11477	-0.13489	-0.13406
10	-0.10338	-0.07529	-0.07650
9	-0.09266	-0.07529	-0.06822
8	-0.08186	-0.05900	-0.05999
1	0	0	0

(a) Velocidade u ao longo de linhas verticais.

(b) Velocidade v ao longo de linhas horizontais.

Figura 3: Comparação da velocidade u através do centro geométrico para $Re = 400$.

Tabela 4: Resultados para v-velocidade utilizando $Re = 400$.

Ponto	Ghia	Ordem 2	Ordem 4
129	0	0	0
125	-0.12146	-0.11947	-0.12083
124	-0.15663	-0.15392	-0.15557
123	-0.19254	-0.18908	-0.19099
122	-0.22847	-0.22424	-0.22636
104	-0.38598	-0.37462	-0.37505
31	0.30174	0.27907	0.28035
30	0.30203	0.27728	0.27860
10	0.19713	0.16469	0.16575
1	0	0	0

Aumentando o número de Reynolds para $Re = 400$, nada pode-se concluir, visualmente, pela Figuras 3(a) e 4. No entanto, observando as Tabelas 3 e 4, nota-se que o método compacto de quarta ordem apresentou resultados mais próximos do encontrado na literatura, tanto para a velocidade u como para v .

Dessa forma, aumentando esse número para $Re = 1000$, as Figuras 5 e 6 apresentam os resultados das velocidades para as simulações numéricas.

(a) Velocidade u ao longo de linhas verticais.

(b) Velocidade v ao longo de linhas horizontais.

Figura 4: Comparação da velocidade u através do centro geométrico para $Re = 1000$.

Após a modificação no número de Reynolds, nota-se que os dois métodos utilizados ficaram coerentes com os resultados simulados por Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982), no entanto, nenhum deles se destacam, e isso foi possível concluir verificando as Tabelas 5 e 6.

Tabela 5: Resultados para u-velocidade utilizando $Re = 1000$.

Grid	Ghia	Ordem 2	Ordem 4
129	1	1	1
126	0.65928	0.64277	0.64575
125	0.57492	0.55472	0.55778
124	0.51117	0.48794	0.49076
123	0.46604	0.44039	0.44281
65	-0.06080	-0.07260	-0.07188
10	-0.22220	-0.16889	-0.17373
9	-0.20196	-0.15143	-0.15602
8	-0.18109	-0.13409	-0.13836
1	0	0	0

Tabela 6: Resultados para v-velocidade utilizando $Re = 1000$.

Grid	Ghia	Ordem 2	Ordem 4
129	0	0	0
125	-0.21388	-0.21577	-0.22040
124	-0.27669	-0.27688	-0.28212
123	-0.33714	-0.33512	-0.34065
122	-0.39188	-0.38743	-0.39291
104	-0.31966	-0.30167	-0.30195
31	0.32235	0.32046	0.32120
30	0.33075	0.32649	0.32734
10	0.29012	0.24173	0.24389
1	0	0	0

É importante mencionar que as Tabelas 1 – 6 são originadas do trabalho de Sterza, Carreira e Brandi (2019).

Além disso, foi realizado o estudo das linhas de corrente para $Re = 1000$, como pode ser visto na Figura 5, que evidencia uma grande zona de recirculação central e outras, menores, nos cantos inferiores; como era esperado de ocorrerse.

(a) Por Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982).

(b) Diferenças Finitas de Segunda Ordem.

(c) Diferenças Finitas Compactas de Quarta Ordem.

Figura 5: Linhas de corrente utilizando $Re = 1000$.

As linhas de corrente são tangentes à direção do escoamento e representam a trajetória das partículas do mesmo. Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982) e Fortuna (2012) apresentaram resultados visualmente semelhantes aos obtidos nas Figuras 5(b) e 5(c).

6 Conclusão

Analisando os resultados deste trabalho tem-se que a diferença entre as soluções numéricas são pequenas, ou seja, o resultado obtido neste trabalho aproximou-se dos resultados obtidos por Ghia, U., Ghia, K. N. e Shin (1982), resultando na verificação do código implementado, uma vez que a referência se trata de uma sugestão clássica da literatura. Além disso, concluiu-se que as discretizações utilizadas na simulação do problema, e também as aproximações utilizadas para os

valores na fronteira, foram adequadas. Levando em consideração que outro método de resolução foi utilizado na referência e, mesmo com a falta de informações, uma vez que o valor para o passo temporal não foi especificado precisamente, os resultados obtidos apresentaram-se próximos o suficiente para a verificação do algoritmo numérico.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

7 Referências Bibliográficas

AZEVEDO, L. F. **MEC2344: mecânica dos fluidos I**. Rio de Janeiro: [s. n.], 2010. Notas de aula.

BRUNETTI, F. **Mecânica dos fluidos**. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008

FERZIGER, J. H.; PERIC, M. **Computational methods for fluid dynamics**. Berlin Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1997.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos: conceitos básicos e aplicações**. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.

GHIA, U.; GHIA, K. N.; SHIN, C. T. High-Re solutions for incompressible flows using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. **Journal of Computational Physics**, v. 48, p. 387-411, 1982.

KUNDU, P. K.; COHEN, I. M. **Fluid mechanics**. 4th ed. Amsterdam: Academic Press, 2010.

OKORO, F. M.; OWOLOKO, A. E. Compact finite difference scheme for Poisson equation using direct solver, **Journal of Mathematics and Technology**, v. 3, p. 130-138, 2010.

PONTES, J. R. M.; MANGIAVACCHI, N.; ANJOS, G. R. **Introdução aos escoamentos compressíveis**. Rio de Janeiro: IMPA, 2017.

STERZA, R. L.; CARREIRA, B. L.; BRANDI, A. C. Solução numérica da equação de Poisson no problema da cavidade com tampa móvel. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos** [...]. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019, p. 334-340. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 30 out. 2019.

VASATA, D. *et al.* Solução computacional do problema da cavidade cúbica através das equações de Navier-Stokes tridimensionais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 33, n. 2, p. 1-10, 2011.