**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Marcelo Eduardo Benencase

Faculdade de Engenharia
UNESP: Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho
marcelo.benencase@unesp.br

Rubens de Figueiredo Camargo

Faculdade de Ciências
UNESP: Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho
rubens.camargo@unesp.br

Alexys Bruno-Alfonso

Faculdade de Ciências
UNESP: Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita Filho
alexys.bruno-alfonso@unesp.br

Integral definida fracionária de Grünwald-Letnikov

Grünwald-Letnikov fractional definite integral

Resumo

É apresentada uma aplicação da derivada fracionária de Grünwald-Letnikov. A derivada de ordem negativa é um operador de integração cuja variação num intervalo é a integral definida fracionária. Prova-se que, para o caso de $\alpha = 1$, recupera-se a integral de Riemann. É mostrada a dependência da integral definida da função gaussiana e sua derivada, nos intervalos $[-1, 0]$ e $[0, 1]$, com a ordem de integração.

Palavras-chave: Matemática Aplicada. Integral Definida. Cálculo Fracionário.

Abstract

An application of the Grünwald-Letnikov fractional derivative is presented. A derivative of negative order is an integration operator whose variation gives the fractional definite integral. It is proven that, for the case $\alpha = 1$, one recovers the Riemann integral. The dependence of the definite integral on the integration order is investigated for the gaussian function and its derivative, over the intervals $[-1, 0]$ and $[0, 1]$.

Keywords: Applied Mathematics. Definite Integral. Fractional Calculus.

1 Introdução

Através do estudo das equações diferenciais, ordinárias ou parciais, é possível modelar matematicamente muitos fenômenos físicos, químicos ou biológicos. Os operadores diferenciais e integrais do cálculo clássico de Newton e Leibniz aparecem em equações diferenciais, integrais ou integro-diferenciais. O cálculo fracionário generaliza esses operadores de modo que seja possível derivar ou integrar em ordens não inteiras, de acordo com Camargo e Oliveira (2015).

Em Silva, Ribeiro, Camargo, Mancera e Santos (2019), a dinâmica de linfócitos, células de defesa do corpo humano, e tumores é feita mediante modelagem fracionária. Na área de sistemas de controle desenvolveu-se o controlador PID (Proportional Integral e Derivativo) de ordem não inteira, demonstrou-se ser mais eficiente que o modelo convencional (AL-ALWAN; GUO; N'DOYE; LALEG-KIRATI, 2017).

Este trabalho é uma extensão do resumo submetido ao VI Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional (BENENCASE; CAMARGO; BRUNO-ALFONSO, 2019). Dentre os operadores do cálculo fracionário, o presente trabalho trata das derivadas e integrais de Grünwald-Letnikov. O objetivo é apresentar resultados numéricos para a integral definida fracionária de funções elementares, verificar a recuperação dos valores clássicos quando a ordem de integração é 1, e analisar como a simetria ou anti-simetria da função se manifesta nos valores das integrais em intervalos simetricamente dispostos em relação à origem. Apresenta-se a convergência da integração fracionária para as funções propostas.

O texto está organizado da seguinte forma: na Seção 2 introduzimos o conceito da Integral de Riemann, reescrevendo-a em uma forma equivalente. Na Seção 3 são dados alguns dos principais operadores diferenciais do Cálculo Fracionário, incluindo a derivada de Grünwald-Letnikov. A integral definida de Grünwald-Letnikov é apresentada na Seção 4. O método numérico usado para calcular as derivadas e integrais fracionárias é explicado na Seção 5. Na Seção 6 mostramos e discutimos resultados de cálculos numéricos. Na Seção 7 apresentamos as conclusões.

2 Integral de Riemann

Definição: A integral de Riemann da função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ no intervalo $[a, b]$ é expressa por

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{i=1}^n f(a + ih), \quad (1)$$

onde $h = (b - a)/n$.

Podemos reescrever a Equação (1) de forma alternativa. Primeiramente, substituímos $a = b - nh$, na integral de Riemann:

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{i=1}^n f(b - (n - i)h). \quad (2)$$

Trocando a variável do somatório $m = n - i$, a soma se torna

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{m=n-1}^0 f(b - mh). \quad (3)$$

Como se trata de uma soma, pode-se alterar os índices do somatório; logo

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{m=0}^{n-1} f(b - mh). \quad (4)$$

3 Derivadas fracionárias

Uma característica marcante do cálculo fracionário é que há várias formas não-equivalentes de definir a derivada fracionária. Dentre elas, as derivadas de Riemann-Liouville, Caputo e Grünwald-Letnikov são apresentadas a seguir.

3.1 Derivada fracionária de Riemann-Liouville

A integral de ordem n , com n inteiro, da função f definida no intervalo $[0, +\infty)$, pode ser expressa na forma (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015)

$$I^n f(x) = \phi_n(x) * f(x) = \int_0^{+\infty} \phi_n(x-t) f(t) dt = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t) dt, \quad (5)$$

em que $*$ representa a convolução e

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0, \end{cases} \quad (6)$$

é a função de Gel'fand-Shilov.

As Equações (5) e (6) são utilizadas como base para uma definição da integral fracionária de ordem α , sendo α um número real. Isto envolve a função gama. Basta substituir n por α e $(n-1)!$ por $\Gamma(\alpha)$ e obter

$$I^\alpha f(x) = \phi_\alpha(x) * f(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(t) dt, \quad (7)$$

em que

$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} & \text{se } x \geq 0 \\ 0 & \text{se } x < 0. \end{cases} \quad (8)$$

A derivada de Riemann-Liouville de ordem α é definida pela derivada de ordem $n = [\alpha] + 1$ da integral de ordem $n - \alpha$, sendo $[\alpha]$ a parte inteira de α . Para uma função definida em $[0, +\infty)$, temos

$${}_{RL}D^\alpha f(x) = \left(\frac{d}{dx}\right)^n I^{n-\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dx}\right)^n \int_0^x \frac{y(t) dt}{(x-t)^{\alpha-n+1}}. \quad (9)$$

3.2 Derivada fracionária de Caputo

A derivada fracionária de Caputo deve seu nome ao Michele Caputo (1969). Para uma função definida no intervalo $[0, +\infty)$, a derivada de Caputo de ordem α , com α real, é definida pela integral de ordem $n - \alpha$ da derivada de ordem $n = [\alpha] + 1$ (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). Explicitamente,

$${}_CD^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^x \frac{f^{(n)}(t) dt}{(x-t)^{\alpha+1-n}}. \quad (10)$$

3.3 Derivada fracionária de Grünwald-Letnikov

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov foi proposta por Anton Karl Grünwald, em 1867, e Aleksey Vasilievich Letnikov, em 1868. O operador é uma generalização da derivada de ordem n dada como limite de diferenças finitas, que tem a forma

$$D^n f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} h^{-n} \sum_{n=0}^k (-1)^n \binom{k}{n} f(x - nh). \quad (11)$$

Aqui o limite $h \rightarrow 0^+$ considera os valores da função em pontos à esquerda de x , enquanto $h \rightarrow 0^-$ considera pontos à direita de x .

Neste trabalho consideramos a derivada de Grünwald-Letnikov, com ordem α real, mediante o limite que leva em conta os valores em pontos à esquerda, ou seja (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2017),

$${}_{GL}D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} h^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)_n}{n!} f(x - nh), \quad (12)$$

em que $(-\alpha)_n$ é o símbolo de Pochhammer, expresso por

$$(x)_n = \frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)}. \quad (13)$$

4 Integral definida fracionária de Grünwald-Letnikov

A partir desta seção, consideramos apenas a derivada de Grünwald-Letnikov, definida pela Equação (12). Omitiremos o índice GL.

A derivada fracionária de Grünwald-Letnikov possui a propriedade aditiva (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2017)

$$D^{-\alpha} D^\alpha f(x) = D^{-\alpha+\alpha} f(x) = f(x). \quad (14)$$

Portanto, a derivada de ordem $-\alpha$ é, na verdade, uma integral de ordem α da função $f(x)$. A integral definida de Grünwald-Letnikov é dada pela variação dessa anti-derivada no intervalo de integração, conforme Ortigueira e Machado (2017), ou seja,

$$I_{[a,b]}^\alpha f = D^{-\alpha} f(b) - D^{-\alpha} f(a). \quad (15)$$

É interessante analisar o caso em que $\alpha = 1$, em que

$$I_{[a,b]}^1 f = D^{-1} f(b) - D^{-1} f(a). \quad (16)$$

Como demonstrado a seguir, essa integral é a integral de Riemann apresentada na Equação (4).

Demonstração:

Das Equações (12) e (16), temos

$$I_{[a,b]}^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{n!} f(b - nh) - \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1)_n}{n!} f(a - nh), \quad (17)$$

em que o símbolo de Pochhammer $(1)_n$ vale $\Gamma(1+n)/\Gamma(1) = n!$. Logo, temos

$$I_{[a,b]}^1 = \lim_{h \rightarrow 0^+} h \sum_{m=0}^{\infty} [f(b-mh) - f(a-mh)]. \quad (18)$$

Esse limite pode ser calculado sob a condição $h = (b-a)/n$, desde que $n \rightarrow \infty$. Então, fazendo a substituição $a = b - nh$, obtemos

$$\begin{aligned} I_{[a,b]}^1 &= \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{m=0}^{\infty} [f(b-mh) - f(b-(m+n)h)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h \left(\sum_{m=0}^{\infty} f(b-mh) - \sum_{m=n}^{\infty} f(b-mh) \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} h \sum_{m=0}^{n-1} f(b-mh) \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (19)$$

5 Método numérico

Para o cálculo numérico da derivada de Grünwald-Letnikov na Equação (12), truncamos o limite em h e a série em n até os valores ε e N , respectivamente, ou seja,

$$D^\alpha f(x) \approx \varepsilon^{-\alpha} \sum_{n=0}^N \frac{(-\alpha)_n}{n!} f(x-nh), \quad (20)$$

em que $c_n^{(\alpha)} = (-\alpha)_n/n!$. A qualidade da aproximação depende de que ε seja suficientemente pequeno e N seja suficientemente grande.

Utilizando da recursividade do símbolo de Pochhammer (BELKHATIR; LALEG-KIRATI, 2018), podemos escrever

$$c_0^{(\alpha)} = 1, \quad c_n^{(\alpha)} = \left(1 - \frac{1+\alpha}{n}\right) c_{n-1}^{(\alpha)}. \quad (21)$$

Implementamos a derivada fracionária de Grünwald-Letnikov na linguagem C++, usando as Equações (20) e (21). Para derivar $f(x)$, o código tem a forma

```
double GLDerivative_(double x, double h, int N, double alpha){
    double sum = f(x);
    double c0 = 1.0;

    for(int n(1) ; n < N; n++){
        c0 *= ((-alpha + n - 1)/(n));
        sum += c0 * f(x - n*h);
    }

    return sum * pow(h, -alpha);
}
```

Cálculos complementares e gráficos foram realizados no software Mathematica.

6 Exemplos numéricos da integral de Grünwald-Letnikov

Para contribuir à compreensão da integral definida de Grünwald-Letnikov, apresentamos resultados numéricos para a função gaussiana $f(x) = e^{-x^2}$ e sua derivada $f'(x) = -2xe^{-x^2}$. Isto permite analisar como a simetria da função afeta o valor da integral. Como veremos, as funções escolhidas são tais que a série na Equação (15) converge rapidamente.

6.1 Função gaussiana

Primeiramente, consideramos a função gaussiana

$$f(x) = e^{-x^2}. \quad (22)$$

Se trata de uma função par, isto é, $f(-x) = f(x)$. Portanto, é interessante comparar as integrais nos intervalos da forma $[0, 1]$ e $[-1, 0]$.

A Figura 1 mostra o valor aproximado da integral definida fracionária em função do índice de truncamento, N . O limite está truncado em $h = \epsilon = 10^{-4}$. O painel (a) corresponde ao caso $\alpha = 1.0$. Percebe-se que a aproximação converge à integral de Riemann,

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx 0.746824, \quad (23)$$

tomando valores bem próximos deste para $N \geq 40\,000$. No painel (b) a ordem de integração é $\alpha = 0.5$. São comparados os resultados para $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$ ou $\epsilon = 10^{-4}$. Verifica-se que há convergência em N e ϵ ao valor $I_{[0,1]}^{0.5} f \approx 0.0907668$.

Figura 1: Aproximação da integral definida de ordem α em função do índice de truncamento da série. (a) Resultados para a função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$, com $\alpha = 1$ e $h = \epsilon = 10^{-4}$. A linha tracejada corresponde ao valor da integral de Riemann. (b) Como no painel anterior, mas $\alpha = 0.5$ e $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$ ou $\epsilon = 10^{-4}$.

Calculamos a integral definida da função gaussiana nos intervalos $[0, 1]$ e $[-1, 0]$. Usamos $\epsilon = 10^{-4}$ e $N = 40\,000$. A Figura 2(a) mostra a dependência do valor da integral definida fracionária com a ordem de integração para a função $f(x) = e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. A Figura 2(b) ilustra a interpretação geométrica da integral definida de ordem 1. O valor aproximado de 0.746824 corresponde à área abaixo da curva $y = e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. A Figura 3(a) fornece o valor da integral da gaussiana no intervalo $[-1, 0]$, em função de α . Se observa que, embora a função gaussiana seja par, as integrais fracionárias nos intervalos $[0, 1]$ e $[-1, 0]$ coincidem apenas para $\alpha = 1$. A interpretação geométrica para o intervalo $[-1, 0]$ é a área da região sombreada na Figura 3(b).

Figura 2: (a) Integral definida fracionária para a função gaussiana no intervalo $[0, 1]$. (b) Interpretação geométrica da integral definida do caso clássico.

Figura 3: (a) Integral definida fracionária para a função gaussiana no intervalo $[-1, 0]$. (b) Interpretação geométrica da integral definida do caso clássico.

6.2 Derivada da gaussiana

Nesta seção consideramos a derivada da função gaussiana investigada na seção anterior. Isto é,

$$f'(x) = -2x e^{-x^2}. \quad (24)$$

Se trata de um função ímpar, pois satisfaz $f'(-x) = -f'(x)$.

A Figura 4 mostra o valor aproximado da integral definida fracionária em função do índice de truncamento, N . O limite está truncado em $h = \epsilon = 10^{-4}$. O painel (a) corresponde ao caso $\alpha = 1.0$. Percebe-se que a aproximação converge à integral de Riemann,

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \frac{1}{e} - 1 \approx -0.632121, \quad (25)$$

tomando valores bem próximos deste para $N \geq 40\,000$. No painel (b) a ordem de integração é $\alpha = 0.5$. São comparados os resultados para $\epsilon = 2 \times 10^{-4}$ ou $\epsilon = 10^{-4}$. Verifica-se que há convergência em N e ϵ ao valor $I_{[0,1]}^{0.5} f \approx -1.06385$.

Calculamos a integral definida fracionária da derivada da função gaussiana, nos intervalos $[0, 1]$ e $[-1, 0]$. Usamos $\epsilon = 10^{-4}$ e $N = 40\,000$. A Figura 5(a) mostra a dependência do valor da integral definida fracionária com a ordem de integração para a função $f(x) = -2x e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. A Figura 5(b) ilustra a interpretação geométrica da integral definida de ordem 1. O valor aproximado de -0.632121 corresponde ao oposto da área acima da curva $y = 2x e^{-x^2}$ no intervalo $[0, 1]$. A Figura 6(a) fornece o valor da integral da derivada da gaussiana no intervalo $[-1, 0]$, em função de

Figura 4: Como na Fig. 1, mas para a derivada da gaussiana.

α . Se observa que, embora essa função seja ímpar, as integrais fracionárias nos intervalos $[0, 1]$ e $[-1, 0]$ são opostas apenas para $\alpha = 1$. A interpretação geométrica para o intervalo $[-1, 0]$ é a área da região sombreada na Figura 6(b).

Figura 5: Como na Fig. 2, mas para a derivada da gaussiana.

Figura 6: (a) Como na Fig. 3, mas para a derivada da gaussiana.

7 Conclusões

Foi demonstrada a equivalência da integral de Riemann com a integral definida de Grünwald-Letnikov de ordem 1. Também foram apresentados resultados numéricos da integral definida fracionária para a função gaussiana e sua derivada. Observamos que, com exceção do caso $\alpha = 1$,

a integral definida fracionária de ordem α de função par não toma o mesmo valor em intervalos dispostos simetricamente em relação à origem. Para a função ímpar, as integrais em intervalos assim dispostos não tomam valores opostos. Isto está relacionado com o caráter não local da derivada de Grünwald-Letnikov.

Os resultados apresentados podem contribuir para uma interpretação geométrica da integral definida fracionária e são relevantes para a análise vetorial fracionária, no sentido proposto por Tarasov (2008).

8 Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) - Processo 2019/13691-8.

9 Referências

- AL-ALWAN, A.; GUO, X.; N'DOYE, I.; LALEG-KIRATI, T-M. Laser beam pointing and stabilization by fractional-order PID control: tuning rule and experiments. *In* IEEE CONFERENCE ON CONTROL TECHNOLOGY AND APPLICATIONS (CCTA), 2017, Kohala Coast. [Proceedings...]. [S.l.]: IEEE, 2017, p. 1685-1691.
- BELKHATIR Z.; LALEG-KIRATI T-M, Estimation of multiple point sources for linear fractional order systems using modulating functions. **IEEE Control Systems Letters**, v. 2, n. 1, p. 7-12, 2018.
- BENENCASE, M. E.; CAMARGO, R. F.; BRUNO-ALFONSO, A. Integral definida fracionária de Grünwald-Letnikov. *In*: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 6., 2019, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 460-461. Disponível em: <https://www.fc.unesp.br/#!/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos/>. Acesso em: 15 set. 2019.
- CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.
- CAPUTO, M. **Elasticità e dissipazione**. Bologna: Zanichelli, 1969.
- ORTIGUEIRA, M.; MACHADO, J. Fractional definite integral. **Fractal and Fractional**, v. 1, n.1, p. 2, 2017.
- SILVA, J. G.; RIBEIRO, A. C. O.; CAMARGO, R. F.; MANCERA, P. F. A.; SANTOS F. L. P. Stability analysis and numerical simulations via fractional calculus for tumor dormancy models. **Communications Nonlinear Science and Numerical Simulations**. v. 72, p. 528-543. 2019.
- TARASOV, V. E. Fractional vector calculus and fractional Maxwell's equations. **Annals of Physics**, v. 323, n. 11, p. 2756-2778, 2008.