**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 17, fev. 2020
Edição Ermac

Gabriel de Oliveira Almeida

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
gabriel.almeida@unesp.br

Rafael de Lima Sterza

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
rlsterza@gmail.com

Analice Costacurta Brandi

Faculdade de Ciências e Tecnologia
UNESP – Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita Filho”
analice.brandi@unesp.br

Solução numérica de problemas de valor de fronteira por diferenças finitas e Shooting linear

Numerical solutions of boundary value problems by finite difference and linear Shooting

Resumo

As equações diferenciais ordinárias aparecem com frequência em modelos que descrevem fenômenos em diversas áreas como, engenharia, biologia, economia, biomedicina, entre outros. Apesar das classes dessas equações serem amplamente estudadas, seus resultados dependem fortemente dos métodos numéricos uma vez que podem sanar as dificuldades presentes na resolução analítica, já que estas nem sempre admitem soluções. Nesse contexto, o propósito deste trabalho é estudar e implementar os métodos numéricos na linguagem Matlab, denominado método de diferenças finitas e método Shooting, para encontrar soluções numéricas de problemas de valor de fronteira de equações diferenciais ordinárias lineares, a fim de comparar os resultados numéricos com a solução analítica para verificar a eficiência do método utilizado.

Palavras-chave: Métodos Numéricos e Aplicações. Equações Diferenciais Ordinárias. Problema de Valor de Fronteira.

Abstract

The ordinary differential equations appear frequently in models which describe phenomena in several areas like engineering, biology, economy, biomedicine, among others.

Although the classes of these equations are widely studied, their results depend on strongly numerical methods since they can solve the difficulties present in the analytical resolution, since they do not always admit solutions. Thus, the purpose of this paper is study and implement the numerical methods on Matlab language, denominate finite difference method and Shooting method, in order to find numerical solutions to boundary value problems of linear ordinary differential equations in order to compare the numerical results with the analytical solution to verify the efficiency of the method used.

Keywords: Numerical Methods and Applications. Ordinary Differential Equation. Boundary Value Problem.

1 Introdução

A teoria de equações diferenciais ordinárias (EDOs) é objeto de intensa atividade de pesquisa, pois além da utilidade de tais equações na modelagem de diversos fenômenos que ocorrem nas mais diversas áreas do conhecimento, seu estudo é motivado pelo interesse intrinsecamente matemático que possuem. As equações diferenciais ordinárias são importantes representações teóricas de processos de evolução em que a taxa de variação do estado do processo em cada instante de tempo depende do processo nesse instante (ARENALES; DAREZZO, 2013).

Há métodos que resolvem analiticamente uma equação diferencial ordinária, todavia nem sempre é possível obter uma solução analítica. Neste caso, os métodos numéricos são ferramentas eficazes para se encontrar uma solução aproximada, podendo ser aplicado aos Problemas de Valor de Fronteira (PVF), no qual têm-se uma equação diferencial e o valor da função no início e fim do domínio. O cálculo computacional é possível somente através da discretização, que reduz o problema contínuo em discreto. Além disso, há diversos tipos de métodos numéricos para encontrar a solução de uma equação diferencial, tal como o método de diferenças finitas (KREYSZIG, 2006). Neste contexto, o objetivo deste trabalho é tratar do estudo, da implementação e comparação de métodos numéricos para a solução de equações diferenciais ordinárias, em específico, para problemas de valor de fronteira.

2 Formulação matemática

Um problema de valor de fronteira envolve uma equação diferencial de segunda ordem e condições da fronteira, isto é, a partir do primeiro valor da função que é conhecido, a solução é propagada para último ponto do domínio, que seu valor também é explícito ao problema. Desse modo, o PVF é dado por quatro constantes a, b, α e β com $a < b$,

$$\begin{cases} y''(x) = f(x, y(x), y'(x)), \\ y(a) = \alpha, \\ y(b) = \beta. \end{cases} \quad (1)$$

Supondo que f é contínua no domínio D , tal que

$$D = \{(x, y, y') \mid a \leq x \leq b, \quad -\infty < y < \infty, \quad -\infty < y' < \infty\}.$$

Tem-se que $\frac{\partial f}{\partial y}$ e $\frac{\partial f}{\partial y'}$ também são contínuas em D se,

- $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') > 0$, para todo $(x, y, y') \in D$.
- Existe uma constante M , tal que,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y'}(x, y, y') \right| \leq M, \quad \text{para todo } (x, y, y') \in D.$$

Desse modo, é possível afirmar que o problema de valor de fronteira possui uma única solução (BURDEN; FAIRES, 2011), com $f(x, y, y') = y''(x)$, onde a equação diferencial é linear, assumindo a seguinte forma

$$y''(x) = p(x)y' + q(x)y + r(x).$$

3 Formulação numérica

O problema em estudo é formulado por uma equação diferencial e por condições auxiliares específicas. Considerando o fato de que nem sempre existe solução analítica, já que essa é completamente restrita a problemas lineares, que podem ser impossíveis de resolver, faz-se necessária a resolução do problema de modo numérico. Os métodos numéricos são capazes de resolver problemas de alto nível de complexidade, porém sempre sujeito a erros, independente do método utilizado, já que o modelo matemático é uma adaptação do mundo real e é necessário impor restrições. Outro fator é que erros de truncamento surgem dos meios numéricos e também são compostos por erros computacionais, uma vez que computadores utilizam apenas números finitos para representar o conjunto dos reais, no entanto, tais erros podem ser amenizados com o estudo da convergência, consistência e estabilidade do método numérico, os quais, se respeitadas garantem a conformidade dos resultados numéricos à solução analítica.

A primeira etapa para resolução de qualquer método numérico envolvendo equações diferenciais é discretizar a região onde se procura a solução, desse modo, define-se uma malha, que representa um conjunto finito de pontos pertencentes ao domínio, uniformemente espaçados por h , os quais, são conhecidos como nós da malha (CUNHA, 2000). Diante disso, a partir de $x_0 + nh$, para $n = 0, 1, \dots, N$ pode-se definir qualquer ponto na malha computacional, sabendo que x_0 define o ponto inicial e x_N o ponto final.

4 Método de diferenças finitas

O desenvolvimento do método de diferenças finitas é com base na expansão da série de Taylor. Supondo uma função f indefinidamente derivável e contínua no intervalo $[a, b]$, esta pode ser representada da seguinte forma

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + h^2 \frac{f''(x_0)}{2!} + \dots + h^{(n-1)} \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} + h^N \frac{f^{(N)}(\xi)}{N!}, \quad (2)$$

sendo que $h = x - x_0$ e $\xi \in [a, b]$. O último quociente da equação é conhecido como resto R_n , no qual corresponde aos termos restantes da série. A partir da Equação (2), pode ser estudados diferentes tipos de aproximações para as derivadas, tais como diferenças progressivas e regressivas.

Para determinar a primeira derivada de uma função f , no ponto $x_n = nh$, deve-se expandir $f(x_n + h)$ em série de Taylor em torno do ponto x_n , tem-se que

$$f(x_n + h) = f(x_n) + hf'(x_n) + h^2 \frac{f''(x_n)}{2!} + O(h^3).$$

Desse modo, ao isolar a primeira derivada, obtém-se

$$f'(x_n) = \frac{f(x_n + h) - f(x_n)}{h} - \frac{h^2}{2!} f''(\xi_n), \quad (3)$$

onde $\xi_n \in [x_n, x_n + h]$.

A primeira derivada é dada pelo primeiro quociente e o termo restante ocorre devido a utilização de um número finito de termos na série de Taylor, e é conhecido como erro de truncamento local (ETL). O termo dominante no ETL, isto é, aquele que possui a menor potência, corresponde a ordem do método que indica a variação do erro conforme o valor do espaçamento da malha, desse modo, o método de diferença progressiva, dado pela Equação (3) é de primeira ordem (expressa por $O(h)$),

ou seja, varia linearmente conforme o refinamento de h (FORTUNA, 2012). O método é conhecido como progressivo, pois utiliza um ponto adiante na malha para o cálculo da primeira derivada.

De modo análogo, é possível determinar a aproximação regressiva, no qual utiliza um ponto atrás na malha para o cálculo da primeira derivada, também de primeira ordem, dada por

$$f'(x) = \frac{f(x_n) - f(x_n - h)}{h} + \frac{h}{2} f''(\xi_n). \quad (4)$$

Para derivadas de alta ordem deve-se manipular as expansões de Taylor, assim como para a derivada de f de segunda ordem, basta apenas somar as Equações (3) e (4), de maneira a eliminar a primeira derivada, mantendo a segunda expressão total, logo

$$f(x_n + h) + f(x_n - h) = 2f(x_n) + h^2 f''(x_n) + \frac{h^4}{4!} \left(f^{(4)}(\xi_1) + f^{(4)}(\xi_2) \right).$$

Utilizando o Teorema do Valor Intermediário para o erro de truncamento e realizando algumas manipulações algébricas, tem-se

$$f''(x_n) = \frac{f(x_n + h) - 2f(x_n) + f(x_n - h))}{2h^2} - \frac{h^2}{12} f^{(4)}(\zeta), \quad (5)$$

sendo essa aproximação de segunda ordem $O(h^2)$ e é a mais utilizada para determinar a segunda derivada de uma função (FORTUNA, 2012).

A partir do PVF (1), torna-se necessário substituir suas derivadas pelo método de diferenças finitas e diferentes fórmulas podem ser obtidas, sendo que o primeiro utiliza-se a Equação (3) e o segundo a Equação (4) para substituir a derivada de primeira ordem, já a derivada de segunda ordem utiliza-se a Equação (5) para ambos os métodos.

4.1 Fórmula progressiva

Considerando o PVF (1), realiza-se as substituições das derivadas pelas aproximações dada pelo método de diferenças finitas, tem-se que

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{y_{n+1} - y_n}{h} p(x_n) + y_n q(x_n) = r(x_n).$$

Basta multiplicar por h^2 para eliminar as frações, obtém-se

$$(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + h(y_{n+1} - y_n) p(x_n) + h^2 y_n q(x_n) = h^2 r(x_n).$$

E, ainda, equivale a seguinte equação

$$y_{n-1} + \left(-2 - hp(x_n) + h^2 q(x_n) \right) y_n + (1 + hp(x_n)) y_{n+1} = h^2 r(x_n).$$

Têm-se

$$\begin{aligned} a_n &= -2 - hp(x_n) + h^2 q(x_n), \\ b_n &= 1, \\ c_n &= 1 + hp(x_n). \end{aligned}$$

4.2 Fórmula regressiva

De maneira análoga a fórmula progressiva, considerando o PVF (1) e substituindo as derivadas pelas aproximações dadas pelo método de diferenças finitas, tem-se que

$$\frac{y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1}}{h^2} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h} p(x_n) + y_n q(x_n) = r(x_n).$$

Basta multiplicar por h^2 para eliminar as frações, obtém-se

$$(y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}) + h(y_n - y_{n-1})p(x_n) + h^2 y_n q(x_n) = h^2 r(x_n).$$

E, ainda, equivale a seguinte equação

$$(1 - hp(x_n))y_{n-1} + (-2 + hp(x_n) + h^2 q(x_n))y_n + y_{n+1} = h^2 r(x_n).$$

Têm-se

$$\begin{aligned} a_n &= -2 + hp(x_n) + h^2 q(x_n), \\ b_n &= 1 - hp(x_n), \\ c_n &= 1. \end{aligned}$$

4.3 Sistema de equações lineares

É notável que ambos métodos possuem formas equivalentes $b_n y_{n-1} + a_n y_n + c_n y_{n+1} = h^2 r(x_n)$, porém os cálculos das variáveis a_n , b_n e c_n são diferentes, desse modo, torna-se possível montar um sistema de equações lineares de modo genérico, que pode ser escrito na forma matricial, junto as condições de fronteira, dado por

$$AY = R.$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_2 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & b_{N-1} & a_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & 0 & \dots & b_N & a_N \end{pmatrix}}_A \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{N-1} \\ y_N \end{pmatrix}}_Y = \underbrace{\begin{pmatrix} h^2 r(x_1) - \alpha b_1 \\ h^2 r(x_2) \\ \vdots \\ h^2 r(x_{N-1}) \\ h^2 r(x_N) - \beta c_N \end{pmatrix}}_R. \quad (6)$$

Nota-se que a matriz A é tridiagonal, desse modo, deve-se utilizar um método para sistemas lineares que melhor aproveite a esparsidade da matriz, tais como os métodos iterativos, em que não realizam o preenchimento da matriz durante os cálculos, provendo maior aproveitamento computacional (CUNHA, 2000). Nesse trabalho, foi considerado o método de Gauss-Seidel descrito na Seção 4.3.1.

Deve-se cogitar a unicidade da solução numérica ao aplicar o método iterativo e, para isso, a matriz A deve ser inversível, e exigir que seja diagonalmente dominante, de forma que

$$\begin{aligned} |a_1| &> |c_1|, \\ |a_n| &> |b_n| + |c_n|, \\ |a_N| &> |b_N|. \end{aligned}$$

Vale lembrar que $\det(A) \ll 1$, haverá instabilidade numérica para solução do sistema linear, desse modo, quanto maior a dominância da diagonal, tenderá a maior estabilidade. (CUMINATO; MENEGUETTE JUNIOR, 2013).

4.3.1 Método de Gauss-Seidel

Para aproveitar da estrutura de dados gerado na resolução do PVF, uma matriz esparsa, implementa-se um método que tenha menor impacto computacional e maior precisão no resultado. Desse modo, considere um sistema linear S_n de n equações e n incógnitas, dado por

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Podendo ser escrito sob a forma matricial

$$Ax = b, \quad (7)$$

em que A é uma matriz quadrada de ordem n , x e b são vetores colunas de $n \times 1$ conhecidos como, respectivamente, vetor solução e vetor de termo independente.

Sabe-se que o método de Gauss-Seidel é método iterativo que consiste em obter a solução a partir de uma sequência de correções no vetor solução (FRANCO, 2006), podendo convergir para solução do sistema, caso exista, após número infinito de passos. Por isso, há a necessidade de impor uma condição de parada que pode ser dado ao atingir uma quantidade de iterações pré estabelecida ou se assim que respeitada uma dada precisão ξ , o processo iterativo deve ser finalizado, isto é

$$\frac{|x^{(k)} - x^{(k-1)}|_\infty}{|x^{(k)}|_\infty} < \xi,$$

em que k refere-se a cada passo da solução do sistema. Outro fator presente nos métodos iterativos é a independência em relação ao chute inicial, uma vez que, se solução do sistema existir, a má escolha do chute inicial pode afetar apenas na quantidade de iterações até respeitar a precisão do método, por isso são conhecidos como métodos que se autocorrigem (FRANCO, 2006).

No método de Gauss-Seidel, $x_i^{(k+1)}$ são utilizados imediatamente nos cálculos seguintes assim que seus valores forem obtidos. Pode-se escrever o sistema de equações S_n em

$$\begin{aligned}x_1^{(k+1)} &= \frac{y_1 - (a_{12}x_2^{(k)} + \dots + a_{1n}x_n^{(k)})}{a_{11}}, \\x_2^{(k+1)} &= \frac{y_2 - (a_{21}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{2n}x_n^{(k)})}{a_{22}}, \\&\vdots \\x_n^{(k+1)} &= \frac{y_n - (a_{n1}x_1^{(k+1)} + \dots + a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)})}{a_{nn}}.\end{aligned}$$

Por fim, fórmula geral do processo iterativo é dada por

$$\begin{aligned}x_i^{(1)} &= \text{valor inicial}, \\x_i^{(k+1)} &= \left(y_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}x_j^{(k)} \right) / a_{ii}.\end{aligned}$$

5 Método Shooting

O método Shooting para equações lineares é baseado em tornar o problema de valor de fronteira em dois problemas de valores iniciais, dados por

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = \alpha, \\ y'(a) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x), & a \leq x \leq b, \\ y(a) = 0, \\ y'(a) = 1. \end{cases} \quad (9)$$

Seja a solução única de (8) e (9) concebida por $y_1(x)$ e $y_2(x)$, respectivamente, então

$$y(x) = y_1(x) + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_2(x), \quad (10)$$

é solução única do PVF. Desse modo, deve-se encontrar as soluções $y_1(x)$ e $y_2(x)$ utilizando métodos numéricos para problemas de valor inicial (PVI), tal como, o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Após a obtenção dos valores numéricos para (8) e (9) é possível defrontar-se com a solução numérica reescrevendo a Equação (10) para percorrer toda a malha computacional, ou seja, a solução do PVF é dada por

$$y_n = y_{1,n} + \frac{\beta - y_1(b)}{y_2(b)} y_{2,n}, \quad n = 0, \dots, N.$$

O método de Runge-Kutta de 4ª ordem foi aplicado para encontrar a aproximação $y_1(x)$ e $y_2(x)$, mas qualquer outro método que seja capaz de resolver um problema de valor inicial pode ser utilizado.

6 Resultados numéricos

Considerando um problema de valor de fronteira

$$y''(x) = -\frac{4}{x}y' - \frac{2}{x^2}y + \frac{2}{x^2}\ln(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y(2) = \ln(2), \quad (11)$$

cujas soluções analíticas são dadas por

$$y(x) = -\frac{1}{x^2}(2 - 4x + \frac{3}{2}x^2 - x^2 \ln(x)).$$

Trata-se de um problema com equação diferencial linear que para os métodos de diferenças finitas, têm-se $p(x) = \frac{4}{x}$, $q(x) = \frac{2}{x^2}$ e $r(x) = \frac{2}{x^2}\ln(x)$. E para o método Shooting $p(x) = -\frac{4}{x}$, $q(x) = -\frac{2}{x^2}$ e $r(x) = \frac{2}{x^2}\ln(x)$, em que sua solução numérica é encontrada através de dois problemas de valor inicial, dados por

$$y_1''(x) = -\frac{4}{x}y_1'(x) - \frac{2}{x^2}y_1 + \frac{2}{x^2}\ln(x), \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_1(1) = \frac{1}{2}, \quad y_1'(1) = 0,$$

e

$$y_2''(x) = -\frac{4}{x}y_2'(x) - \frac{2}{x^2}y_2, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y_2(1) = 0, \quad y_2'(1) = 1.$$

A Figura 1(a) representa as soluções numéricas e analíticas, onde é notável o afastamento da solução numérica da fórmula regressiva perante a solução analítica. A Figura 1(b) representa o erro absoluto dos métodos numéricos, calculado por $Erro_n = |y(x_n) - y_n|$, em que $y(x_n)$ equivale a solução analítica e y_n é a solução numérica, também nota-se que o eixo das ordenadas do gráfico está em escala logarítmica e para o problema foi resolvido utilizando espaçamento fixo $h = 0.1$.

(a) Soluções numéricas e analíticas.

(b) Erro absoluto na escala logarítmica.

Figura 1: Solução numérica do PVF.

Nota-se que o método Shooting obteve melhor aproximação à solução analítica, já que foi utilizado o método de Runge-Kutta de 4ª ordem ($O(h^4)$) e os métodos de diferenças finitas são de

primeira ordem ($O(h)$). Para aumentar a precisão das diferenças finitas e obter resultados próximos ao de Shooting, pode-se utilizar a fórmula de Taylor de 5ª ordem e encontrar aproximações de $y''(x_n)$ e $y'(x)$, já que, após as manipulações algébricas, forma-se um método com erro de truncamento de 4ª ordem, porém não haverá pontos conhecidos o suficiente para sua resolução. Além disso, o sistema de equações não apresenta forma tridiagonal como no sistema linear (6), dificultando a resolução do problema (BURDEN; FAIRES, 2011).

Considerando o problema de valor de fronteira com equação diferencial linear, dado por

$$y''(x) = -\frac{2}{x}y'(x) + \frac{2}{x^2}y + \frac{\sin(\ln(x))}{x^2}, \quad 1 \leq x \leq 2, \quad y(1) = 1, \quad y(2) = 2,$$

cujas soluções exatas são dadas por

$$y(x) = c_1x + \frac{c_2}{x^2} - \frac{3}{10}\sin(\ln(x)) - \frac{1}{10}\ln(x),$$

em que

$$c_2 = \frac{1}{70}(8 - 12\sin(\ln(2)) - 4\cos(\ln(2))) \approx -0.03920701320,$$

$$c_1 = \frac{11}{10} - c_2 \approx 1.1392070132.$$

Para esse problema foi considerada quatro malhas: grossa ($h = 0.2$), intermediária grossa ($h = 0.1$), intermediária fina ($h = 0.05$) e fina ($h = 0.025$), para que possa analisar o comportamento da solução numérica diante do refinamento do espaçamento, já que tal processo é sempre suscetível a inconsistências computacionais e numéricas. A Tabela 1 representa o maior erro absoluto, dado por $Erro_{max} = \max_{1 \leq n \leq (N-1)} Erro_n$.

Tabela 1: Maior erro presente na solução numérica para diferentes espaçamentos h .

h	<i>Regressiva</i>	<i>Progressiva</i>	<i>Shooting</i>
0.2	$2.8622e - 02$	$1.9159e - 02$	$2.7355e - 06$
0.1	$1.2102e - 02$	$9.6531e - 03$	$1.3436e - 07$
0.05	$3.8716e - 03$	$3.3862e - 03$	$7.7517e - 09$
0.025	$1.0914e - 03$	$1.0031e - 03$	$4.6393e - 10$

Pode-se observar que as soluções numéricas melhoraram, uma vez que o maior erro absoluto decaiu em todos os casos estudados, demonstrando também a competitividade entre os dois métodos de diferenças finitas. É perceptível a eficiência do método Shooting, já que para a malha grossa, obteve melhores resultados que outros métodos utilizando a malha fina. Isso mostra que o método Shooting consegue obter resultados melhores com menor esforço computacional, pois para espaçamentos maiores, apresenta menos pontos na malha para efetuar os cálculos e completar a solução numérica, ou seja, apresenta menos operações computacionais para aproximar a solução do PVF. Além disso, o método é menos suscetível à instabilidades numéricas e computacionais implicando na velocidade mais veloz de execução do método numérico somado ao fato que não necessita da resolução de um sistema linear, em que é comprovado pela Tabela 2 no qual é exposta o tempo de execução de cada método numérico para PVF.

Tabela 2: Tempo de execução em segundos para diferentes espaçamentos h .

$h \setminus$ Tempo	Regressivo	Progressivo	Shooting
0.2	0.017014s	0.018107s	0.002999s
0.1	0.019679s	0.017150s	0.002218s
0.05	0.150274s	0.019376s	0.003206s
0.025	0.210310s	0.015853s	0.002302s

7 Conclusão

O presente trabalho teve como objetivo estudar e comparar métodos para problemas de valores de fronteira. Os métodos de diferenças finitas foi utilizado para aproximar as derivadas presentes nas equações diferenciais e também para desenvolver métodos conhecidos como fórmula progressiva e fórmula regressiva. Ambos apresentaram soluções coerentes com a solução analítica, apesar dos resultados similares, a fórmula progressiva apresenta melhor aproximação para os problemas apresentados.

Para obtenção de uma solução ainda mais próxima, o método Shooting demonstrou-se eficaz, já que resolve o PVF considerando dois problemas de valores iniciais, e desse modo, pode utilizar métodos mais eficientes de problema de valor inicial disponíveis na literatura, resultando em erros que podem ser considerados desprezíveis, ainda mais com o refinamento da malha computacional.

8 Agradecimentos

Agradecemos o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro no desenvolvimento deste trabalho.

9 Referências Bibliográficas

ALMEIDA, G. O.; STERZA, R. L.; BRANDI, A. C. Solução numérica de problemas de valor de fronteira por diferenças finitas e Shooting. *In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL*, 6., Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos [...]**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2019. p. 341-347. Disponível em: www.fc.unesp.br/#/departamentos/matematica/eventos2341/ermac-2019/caderno-de-trabalhos-e-resumos. Acesso em: 14 dez. 2019.

ARENALES, S.; DAREZZO, A. **Cálculo numérico: aprendizagem com apoio de software**. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

BURDEN, R. L.; FAIRES, J. D. **Numerical analysis**. 9th ed. Boston: Brooks/Cole, 2011.

CUMINATO, J. A.; MENEGUETTE JUNIOR, M. **Discretização de equações diferenciais parciais: técnicas de diferenças finitas**. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

CUNHA, M. C. C. **Métodos numéricos**. 2. ed., rev. ampl. Campinas: Ed da UNICAMP, 2000.

FORTUNA, A. O. **Técnicas computacionais para dinâmica dos fluidos:** conceitos básicos e aplicações. 2. ed. São Paulo: EDUSP, 2012.

FRANCO, N. B. **Cálculo numérico.** São Paulo: Pearson, 2006.

KREYSZIG, E. **Advanced engineering mathematics.** 9th ed. New York: John Wiley & Sons, 2006.