**Alicia Maria do Nascimento
Amorim**

Universidade Federal do Piauí -
UFPI
aliciaamorim14@gmail.com

**Anna Karla Barros da
Trindade**

Universidade Federal do Piauí -
UFPI/CEAD
akbtrindade@hotmail.com

**Francisco de Paula Santos de
Araujo Junior**

Universidade Estadual do Piauí -
UESPI
pjhatata@hotmail.com

Um estudo sobre série de Fourier e aplicações a problemas do tipo Laplace

A study about Fourier series and applications problems of the Laplace type

Resumo

O presente trabalho tem por objetivo analisar a série de Fourier e o problema de Dirichlet para a equação de Laplace - a qual é, também, chamada de equação do potencial e descreve problemas independentes da variável tempo - em um retângulo do $\mathbb{R}^2$, demonstrando a condição de existência e unicidade. Esta equação quando submetida às condições de fronteira de uma certa região Ω , é chamada de problema de contorno. Os principais problemas de contorno na literatura são: o problema de Dirichlet e o problema de Neumann. Apresenta-se ao longo deste artigo, principalmente, conceitos e propriedades associados as séries de Fourier e mostra-se que o problema de Dirichlet para a equação linear de Laplace, sob hipóteses apropriadas, tem uma única solução clássica, em um domínio retangular.

Palavras-chave: Séries de Fourier. Problema de Dirichlet. Equação de Laplace. Solução clássica. Domínio Retangular.

Abstract

The present work aims to analyze the Fourier series and the problem of Dirichlet for the Laplace equation - Which is also called the equation of the potential and describes independent problems of the variable time - in a rectangle of $\mathbb{R}^2$, demonstrating the condition of existence and uniqueness. It is equation when submitted to the frontier conditions of a certain region Ω , is called a contour problem. The main contour problems of the literature are: the problem of Dirichlet and the problem of Neumann. In this work one presents, mainly, concepts and properties associate with the Fourier series, and one show that the Dirichlet problem for the linear Laplace equation, under appropriated hypotheses, has a unique classical solution, inside of the a rectangular domain.

Keywords: Fourier Series. Dirichlet Problem. Laplace Equation. Classic Solution. Rectangular Domain.

1 Introdução

Durante o século XVIII (por volta de 1750), após as primeiras tentativas de resolver o problema de vibração de uma corda, $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \text{ conhecida como equação da onda}\right)$ a idéia de decompor funções quaisquer em funções trigonométricas simples causou grande movimentação no cenário matemático. Isto se deu pela expressão

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx) \cos(nct) \quad (1)$$

dada por Daniel Bernoulli (1700-1782) em 1723 como solução da mesma quando a corda de comprimento π vibra por um deslocamento de sua posição de repouso.

As primeiras tentativas de resolver o problema foram realizadas por Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) em 1747 e Leonhard Euler (1707-1783) em 1748. Segundo Figueiredo (2012), ambos chegaram a conclusão de que a solução seria da forma

$$u(x, t) = F(x + ct) + G(x - ct).$$

Em 1759 Joseph Louis Lagrange (1736-1813) mostrou que a solução da equação das ondas para a posição inicial $f(x)$ da corda, de comprimento 1, e a velocidade inicial $g(x)$ é, como previa Euler, uma soma de duas funções, dada por

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} [\operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(n\pi x) \cos(n\pi ct)] f(y) dy \\ &+ 2 \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} [\operatorname{sen}(n\pi y) \operatorname{sen}(n\pi x) \operatorname{sen}(n\pi ct)] g(y) dy. \end{aligned}$$

No entanto, ele não especificou os coeficientes das séries. Isto foi feito em 1811 por Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) em sua *Théorie mathématique de la chaleur* (Teoria Matemática de Condução do Calor), assim, inicialmente, tais coeficientes ficaram conhecidos como coeficientes de Fourier, porém, por Euler já conhecer o formato dos mesmos, estes coeficientes são chamados atualmente de coeficientes de Fourier-Euler.

Fourier (nascido em 21 de março de 1768, em Auxerre, França, morto em 16 de maio de 1830, Paris), provavelmente foi o mais influente matemático de Paris em 1820, de acordo com Boyer e Merzbach (2012). Era politicamente ativo e como consequência foi preso pelo fato de concordar com os ideais da Revolução Francesa. Começou seu trabalho na *Théorie analytique de la chaleur* em Grenoble em 1807 e completou-a em Paris em 1822, a contribuição deste a matemática foi ter afirmado que qualquer função (contínua ou descontínua) de uma variável $y = f(x)$ poderia ser representada por uma série da forma:

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right).$$

Conhecida atualmente como série de Fourier, onde foram expressos nesta obra os coeficientes:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 0, \\ b_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Ainda por Boyer e Merzbach (2012), a falta de rigor neste trabalho foi o motivo das críticas feitas por Lagrange, Laplace e Legendre e o esclarecimento das ideias difundidas nele foi até certo ponto a razão pela qual o século XIX foi denominado a idade do rigor. Embora a afirmação de Fourier possua certas negligências, o fato de ter observado que algumas funções descontínuas são a soma de séries infinitas foi um grande avanço, pois o mesmo explicitou claramente a forma da série que deveria representar estas funções segundo Carslaw (1921).

Após Dirichlet reconhecer que nem toda função pode ser representada por sua série de Fourier, de 1829 a 1837 ele produziu os primeiros critérios para que fosse válida tal representação, assim como Riemann. E por estes estarem ligados à integração de funções deu-se início à teoria da Integral de Riemann de acordo com Figueiredo (2012).

Deste modo, apesar do objetivo inicial de Fourier ter sido resolver a equação do calor, após o método ser estudado e aperfeiçoado com os critérios criados, ele foi sendo utilizado para resolver muitos problemas matemáticos e físicos e além de ter uma utilização maior que a série de Taylor (que só representa funções contínuas e deriváveis) ele tem aplicação direta nas áreas da engenharia elétrica, acústica, óptica, processamento de sinais e processamento de imagens.

Apresenta-se, portanto, ao longo deste trabalho, principalmente, conceitos e propriedades associados as séries de Fourier e mostra-se que o problema de Dirichlet para a equação linear de Laplace, sob hipóteses apropriadas, tem uma única solução clássica em um domínio retangular, tendo como referências principais Figueiredo (2012) e Iório (1991).

2 Funções periódicas

A série em estudo neste capítulo é composta por funções senos e cossenos, periódicas. Por este motivo nesta seção serão apresentadas definições e resultados sobre tal, como o que define o período fundamental das funções supracitadas.

Definição 1 Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é periódica de período τ se $f(x + \tau) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Sendo o gráfico idêntico em cada intervalo de comprimento igual ao período fundamental τ de f , como visto no gráfico da função periódica abaixo.

Observações sobre Funções Periódicas:

- (1) Em geral, se τ é um período fundamental para f , então $k\tau$ também é um período para a função f para todo $k \in \mathbb{Z}$;
- (2) O menor período positivo de f é chamado de período fundamental.

Proposição 2 Sejam $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ conjuntos de funções onde

$$\varphi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \text{ e } \psi_n(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

Tem-se que φ_n e ψ_n são periódicas de período $\tau = (2L/n)$. Consequentemente, para $n = 1, 2L$ é período fundamental destas funções.

Demonstração: Para demonstrar esta proposição considera-se as identidades trigonométricas abaixo para $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\sin^2 a + \cos^2 a = 1, \quad (2)$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b, \quad (3)$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b. \quad (4)$$

Será demonstrado apenas que o período fundamental de ψ_n é $(2L/n)$, pois mostrar este resultado para φ_n é análogo, utilizando-se (2) e (4).

Como se quer encontrar o período fundamental de ψ , deve-se ter

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi(x+\tau)}{L} \text{ para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Note que $\operatorname{sen} (n\pi(x+\tau)/L) = \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} + \frac{n\pi\tau}{L} \right)$. Logo, por (3)

$$\operatorname{sen} \frac{n\pi(x+\tau)}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{n\pi\tau}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (5)$$

Fazendo, sem perda de generalidade, $x = (L/2n)$ e substituindo em (5),

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2n} \right) \cos \left(\frac{n\pi\tau}{L} \right) + \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi\tau}{L} \right) \cos \left(\frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2n} \right) &= \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi}{L} \cdot \frac{L}{2n} \right) \\ \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \cos \frac{n\pi\tau}{L} + \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{L} \cos \frac{\pi}{2} &= \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cos \frac{n\pi\tau}{L} = 1 \Rightarrow \cos^2 \frac{n\pi\tau}{L} &= 1. \end{aligned} \quad (6)$$

Utilizando (2) e (6),

$$\operatorname{sen}^2 \frac{n\pi\tau}{L} + \cos^2 \frac{n\pi\tau}{L} = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2 \frac{n\pi\tau}{L} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} \frac{n\pi\tau}{L} = 0. \quad (7)$$

Como τ é o período fundamental, então, τ deve ser o menor valor possível tal que (6) e (7) ocorram, assim

$$\frac{n\pi\tau}{L} = 2\pi \Rightarrow \tau = \frac{2L}{n}.$$

Portanto, o período fundamental de $\operatorname{sen} (n\pi x/L)$ é $\tau = (2L/n)$. Fazendo $n = 1$, obtém-se que $2L$ é período fundamental dos conjuntos de funções supracitados. ■

Proposição 3 *Seja $\{g_j(x)\}$, $j = 1, 2, 3, \dots, n$, um conjunto de funções periódicas de período τ e β_j números reais. Então, também é periódica de período τ a combinação linear*

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x).$$

Demonstração: Provando pelo Princípio de Indução Matemática,

(i) Para $n = 1$, $S_1 = \beta_1 g_1(x)$ é periódica pela hipótese relativa a g .

(ii) Suponha que para $n \in \mathbb{N}$ é periódica de período τ a função

$$S_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x).$$

Deve-se mostrar que S_{n+1} é também periódica de período τ . O que de fato ocorre pois, por hipótese são periódicas as funções $S_n(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x)$ e g_j , daí

$$S_{n+1}(x) = \sum_{j=1}^n \beta_j g_j(x) + \beta_{n+1} g_{n+1}(x) = S_n(x + \tau) + \beta_{n+1} g_{n+1}(x + \tau) = S_{n+1}(x + \tau).$$

Portanto, por (i) e (ii) a proposição é válida para todo $n \in \mathbb{N}$. ■

Em particular, se $\{g_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é um conjunto infinito de funções periódicas de período τ . Então, também é periódica de período τ a série $\sum_{i=1}^{\infty} \beta_i g_i(x)$, se esta convergir.

2.1 Funções ortogonais

Definição 4 (Produto Interno) Dadas as funções f_1 e f_2 contínuas no intervalo $[a, b]$. O produto interno de f_1 e f_2 em $[a, b]$ é o número

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx.$$

Definição 5 (Funções Ortogonais) Considere as funções f_1 e f_2 contínuas no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dizemos que f_1 e f_2 são ortogonais em $[a, b]$ se o produto interno destas funções for igual a zero, ou seja

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x) f_2(x) dx = 0.$$

Definição 6 (Conjunto de Funções Ortogonais) Um conjunto de funções reais $\{\psi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ é ortogonal em um intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ se para $m \neq n$.

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_a^b \psi_n(x) \psi_m(x) dx = 0.$$

Serão demonstradas agora as relações de ortogonalidade. Elas serão utilizadas para expressar os coeficientes de Fourier de uma função¹ $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

Proposição 7 (Relações de Ortogonalidade) Seja $[-L, L] \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Tem-se as seguintes relações de ortogonalidade:

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0, \text{ se } n, m \geq 1; \quad (8)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0 & \text{se } n \neq m, \text{ com } m, n \geq 1; \end{cases} \quad (9)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = \begin{cases} L & \text{se } n = m \geq 1, \\ 0 & \text{se } n \neq m, \text{ com } m, n \geq 1. \end{cases} \quad (10)$$

Serão demonstradas apenas as duas primeiras identidades acima, pois a demonstração de (10) é análoga a de (9).

¹ Periódica de período $2L$, contínua e com derivada primeira de quadrado integrável.

Prova de (8): Como

$$\begin{aligned}\cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} &= \frac{1}{2} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x(n+m)}{L} - \operatorname{sen} \frac{\pi x(n-m)}{L} \right]. \text{ Então,} \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\operatorname{sen} \frac{\pi x(n+m)}{L} - \operatorname{sen} \frac{\pi x(n-m)}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{-L}{\pi(n+m)} \cos \frac{\pi x(n+m)}{L} \Big|_{-L}^L \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{\pi(n-m)} \cos \frac{\pi x(n-m)}{L} \Big|_{-L}^L \right]\end{aligned}$$

Para $m, n \geq 1$,

$$\begin{aligned}\text{(i)} \quad \cos \frac{\pi x(n+m)}{L} \Big|_{-L}^L &= \cos \frac{\pi L(n+m)}{L} - \cos \frac{\pi(-L)(n+m)}{L} \\ &= \cos \pi(m+n) - \cos(-\pi)(m+n) \\ &= \cos \pi(m+n) - \cos \pi(m+n) = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{(ii)} \quad \cos \frac{\pi x(n-m)}{L} \Big|_{-L}^L &= \cos \frac{\pi L(n-m)}{L} - \cos \frac{\pi(-L)(n-m)}{L} \\ &= \cos \pi(m-n) - \cos(-\pi)(m-n); \\ &= \cos \pi(m-n) - \cos \pi(m-n) = 0.\end{aligned}$$

Então, de (i) e (ii) obtém-se (8). ■

Prova de (9): Considera-se dois casos, $m = n, \geq 1$ e $m \neq n$, com $m, n \geq 1$.

(i) Para $m = n \geq 1$,

$$\cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} = \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right)^2.$$

Como

$$\left(\cos \frac{n\pi x}{L} \right)^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right]. \text{ Então,}$$

$$\begin{aligned}\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[1 + \cos \frac{2n\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x \Big|_{-L}^L + \frac{L}{2n\pi} \operatorname{sen} \frac{2n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[L - (-L) + \frac{L}{2n\pi} \left(\operatorname{sen} \frac{(-L)(2n\pi)}{L} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sen} \frac{(-L)(2n\pi)}{L} \right) \right]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \left[2L + \frac{L}{(2n\pi)} (\text{sen } 2n\pi + \text{sen } 2n\pi) \right].$$

Logo,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = L.$$

(ii) Para $m \neq n$, $m, n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right] \\ \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(n+m)\pi x}{L} + \cos \frac{(n-m)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n+m)} \text{sen } \frac{(n+m)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right. \\ &\quad \left. + \frac{L}{\pi(n-m)} \text{sen } \frac{(n-m)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right] \end{aligned}$$

Logo,

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx = 0.$$

Portanto, de (i) e (ii) obtém-se (9). ■

Exemplo 2.1 Os conjuntos de funções $\{\varphi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$, com

$$\varphi_n(x) = \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{ e } \phi_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L},$$

são ortogonais em $[-L, L]$. Pois, para $m \neq n$ e $m, n \geq 1$

$$\begin{aligned} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} &= \frac{1}{2} \left[\cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \right]. \text{ Então,} \\ \int_{-L}^L \text{sen } \frac{n\pi x}{L} \text{sen } \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{1}{2} \int_{-L}^L \left[\cos \frac{(n-m)\pi x}{L} - \cos \frac{(n+m)\pi x}{L} \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{L}{\pi(n-m)} \text{sen } \frac{(n-m)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right. \\ &\quad \left. - \frac{L}{\pi(n+m)} \text{sen } \frac{(n+m)\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right]. \end{aligned}$$

Como $\text{sen}(k\pi) = 0$, para todo $k \in \mathbb{Z}$,

$$\int_{-L}^L \text{sen } \frac{m\pi x}{L} \text{sen } \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

A ortogonalidade de $\{\phi_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ segue como caso particular de (9). □

Definição 8 (Função Harmônica) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto aberto e u é uma função definida em Ω duas vezes derivável, $u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$. A equação de Laplace, onde Δ é chamado de operador Laplaciano de u , é definida por

$$\Delta u := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 0. \quad (11)$$

Se $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for contínua e satisfaz a equação de Laplace (11). Então u é harmônica.

Teorema 9 (Princípio do Máximo/Mínimo) Seja Ω limitada e $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua e harmônica em Ω , então os valores máximo e mínimo de u são atingidos em $\partial\Omega$.

Demonstração: Vide Medeiros, p. 141. ■

Definição 10 Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função com domínio $X \subseteq \mathbb{R}$, então f é dita de classe $C^n(X)$ se sua n -ésima derivada for uma função contínua.

Exemplo 2.2 Os conjuntos de funções $\{\sin(n\pi x/a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\cos(n\pi x/a)\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{\sinh(n\pi x/a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ e $\{\cosh(n\pi x/a)\}_{n \in \mathbb{N}}$ são de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ pois suas derivadas são contínuas para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. □

3 Série de Fourier

Ao longo desta seção serão destacadas as definições, proposições e teoremas principais relacionados a esta série. Vê-se que quando uma determinada função f satisfaz algum dos Teoremas da convergência uniforme a série de Fourier de f converge para esta através de sucessivas aproximações pela soma de senos e cossenos.

Definição 11 (Série de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periódica de período $2L$ ², integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado, em particular $[-L, L]$. A série de Fourier da função f é a série trigonométrica dada por

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (12)$$

onde os números reais a_n , para $n \geq 0$, e b_n , para $n \geq 1$, são chamados de coeficientes Fourier, também chamados de coeficientes de Fourier-Euler.

A relação entre f e sua série de Fourier nem sempre é de igualdade. Por isto faz-se

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right). \quad (13)$$

Serão dadas condições a f para que esta igualdade ocorra. Ela será necessária, como visto a seguir, para descrever os coeficientes a_n e b_n de (12).

² Usa-se este período pois o mesmo é período fundamental das funções (cos)seno como visto na Proposição 2.

Definição 12 (Integração da Série de Fourier) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função igual a sua série de Fourier em que (12), por suposição, converge uniformemente. A integral de f em $[-L, L]$ é dada por

$$\int_{-L}^L f(x) dx = \int_{-L}^L \frac{1}{2} a_0 dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_{-L}^L a_n \cos \frac{n\pi x}{L} dx + \int_{-L}^L b_n \sin \frac{n\pi x}{L} dx \right). \quad (14)$$

A integração é válida mesmo se a série em (13) não convergir para f . Só não vale a igualdade.

Proposição 13 (Coeficientes de Fourier) Seja f uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável no intervalo limitado $[-L, L]$, expressa por

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right), \quad (15)$$

onde por suposição, a série dada em (15) converge uniformemente. Então, as constantes a_n , para $n \geq 0$, e b_n para $n \geq 1$, são definidos como os coeficientes de Fourier e correspondem as expressões

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx, \quad (16)$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 1, \quad (17)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 1. \quad (18)$$

Prova de (16): Integrando ambos os lados de (15) em $[-L, L]$, obtém-se (14). Daí,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) dx &= \frac{a_0}{2} x \Big|_{-L}^L + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n \left(\sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right) - b_n \left(\cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L \right) \right] \\ &= \frac{a_0 L}{2} + \frac{a_0 L}{2} + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n (\sin n\pi - \sin(-n\pi)) \right. \\ &\quad \left. - b_n (\cos n\pi - \cos(-n\pi)) \right] \\ &= a_0 L + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left[a_n (\cos n\pi - \cos n\pi) \right]. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-L}^L f(x) dx = a_0 L \Rightarrow a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Prova de (17): Multiplicando (15) por $\cos(m\pi x/L)$,

$$f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \cos \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima no intervalo $[-L, L]$,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \left[\frac{L}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= \frac{a_0}{2m\pi} (\sin m\pi + \sin m\pi) = 0. \end{aligned}$$

E ainda,

(i) Pela relação de ortogonalidade (8),

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = 0.$$

(ii) Pela relação de ortogonalidade (9), para $n = m$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi x}{L} \cos \frac{n\pi x}{L} dx = L.$$

Então, por (i) e (ii) obtém-se

$$a_n L = \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx.$$

■

Prova de (18): Multiplicando (15) por $\sin (m\pi x/L)$,

$$f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} = \frac{a_0}{2} \sin \frac{m\pi x}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} \right).$$

Integrando ambos os lados da igualdade acima no intervalo $[-L, L]$,

$$\begin{aligned} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right. \\ &\quad \left. + b_n \int_{-L}^L \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx \right). \end{aligned}$$

Como,

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} \int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} dx &= \frac{a_0}{2} \left[-\frac{L}{m\pi} \cos \frac{m\pi x}{L} \right]_{-L}^L \\ &= -\frac{a_0}{2m\pi} (\cos m\pi - \cos m\pi) = 0. \end{aligned}$$

E ainda,

(i) Pela relação de ortogonalidade (8)

$$\int_{-L}^L \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi x}{L} dx = 0.$$

(ii) Pela relação de ortogonalidade (10), para $n = m$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi x}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} dx = L.$$

Então, por (i) e (ii) obtém-se

$$b_n L = \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \Rightarrow b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

■

Note que para $n = 0$ em (17), $a_0 = (1/L) \int_{-L}^L f(x) dx$. Por este motivo multiplica-se a_0 por $\frac{1}{2}$ em (15), pois assim obtém-se uma única fórmula para todos os a_n .

Proposição 14 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, derivável com derivada L^1 . Então*

$$a_n = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \quad (19)$$

e

$$b_n = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx. \quad (20)$$

Prova de (19): Por (17),

$$\begin{aligned} La_n &= \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{L}{n\pi} f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{L}{n\pi} (f(L) \sin n\pi - f(-L) \sin(-n\pi)) - \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx \\ \Rightarrow a_n &= -\frac{L}{Ln\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx. \end{aligned}$$

Em particular, tomando os valores absolutos,

$$|a_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

■

Prova de (20): Por (18),

$$\begin{aligned} Lb_n &= \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = -\frac{L}{n\pi} f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_{-L}^L + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= -\frac{L}{n\pi} (f(L) \cos n\pi - f(-L) \cos(-n\pi)) + \frac{L}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ \Rightarrow b_n &= \frac{L}{Ln\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \end{aligned}$$

Em particular, tomando os valores absolutos,

$$|b_n| \leq \frac{1}{n\pi} \int_{-L}^L |f'(x)| dx.$$

■

Teorema 15 (Séries de Fourier de Funções Pares e Ímpares) *Seja f uma função L^1 , periódica de período $2L$. A série de Fourier da função f e os seus coeficientes são definidos respectivamente por*

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right),$$

(i) *Se f for par,*

$$b_n = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 0, \quad (21)$$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}; \quad (22)$$

(ii) *Se f for ímpar,*

$$a_n = 0,$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx, \text{ para } n \geq 1, \quad (23)$$

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (24)$$

Prova (i): Como $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ e $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx$.

Pelas propriedades de funções pares e ímpares,

$$f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \text{ é par e } f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \text{ é ímpar.}$$

Assim,

$$b_n = 0 \text{ e } a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$$

Consequentemente,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

■

Prova de (ii): Como $a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx$ e $b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$.

Então, pelas propriedades de funções pares e ímpares,

$$f(x) \cos \frac{n\pi x}{L} \text{ é ímpar e } f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} \text{ é par.}$$

Assim,

$$a_n = 0 \text{ e } b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

Consequentemente,

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{L}.$$

■

3.1 Convergência uniforme da série de Fourier

Teorema 16 *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e que a derivada primeira seja L^2 . Então sua série de Fourier converge uniformemente para f .*

Demonstração: Para demonstrar tal resultado será utilizado o Teste M de Weierstrauss . i.e., será verificada a convergência da série de Fourier de f através da convergência de uma série numérica.

Inicialmente note que

$$\begin{aligned} \left| a_n \cos \frac{n\pi x}{L} \right| &= |a_n| \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |a_n|, \text{ pois } \left| \cos \frac{n\pi x}{L} \right| \leq 1, \\ \left| b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| &= |b_n| \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq |b_n|, \text{ pois } \left| \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq 1. \end{aligned}$$

Pela desigualdade triangular

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|).$$

Então, para mostrar a convergência da série de Fourier basta mostrar a convergência da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|). \quad (25)$$

Pela proposição (14),

$$a_n = -\frac{L}{n\pi} b'_n \text{ e } b_n = \frac{L}{n\pi} a'_n,$$

onde

$$a'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \cos \frac{n\pi x}{L} dx \text{ e } b'_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f'(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx.$$

Daí, a reduzida de ordem n da série (25) é

$$\frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|)$$

Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\frac{L}{\pi} \sum_{j=1}^n \frac{1}{j} (|a'_j| + |b'_j|) \leq \frac{L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|a'_j| + |b'_j|)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (26)$$

Utilizando a desigualdade de Cauchy-Schwarz³ em $\mathbb{R}^2$ no terceiro somatório de (26),

$$\sum_{j=1}^n (|a_j| + |b_j|) \leq \frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Pela desigualdade de Bessel

$$\frac{\sqrt{2}L}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{j=1}^n (|a'_j|^2 + |b'_j|^2) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{\pi} \left(\sum_{j=1}^n \frac{1}{j^2} \right)^{\frac{1}{2}}}_{(i)} \cdot \underbrace{\int_{-L}^L |f'|^2 dx}_{(ii)}.$$

Como (i) e (ii) convergem, por ser uma 2-série e por f' ser de quadrado integrável, respectivamente, a série de Fourier converge absolutamente para f como se queria provar. ■

Lema 3.1 *Seja $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ definida por*

$$\phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(1 + \frac{x}{L}) & \text{se } -L \leq x < 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ \frac{1}{2}(1 - \frac{x}{L}) & \text{se } 0 < x \leq L. \end{cases}$$

Então, a série de Fourier de ϕ converge uniformemente para ϕ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$ com $n \in \mathbb{Z}$.

Demonstração: Note que ϕ é ímpar. Assim, a série de Fourier é dada por (24). Onde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{L} \int_0^L \frac{1}{2} \left(1 - \frac{x}{L} \right) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{L} \left[\int_0^L \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx - \int_0^L \frac{1}{L} x \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} dx \right] \\ &= -\frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - 1] + \frac{1}{n\pi L} \left[x \cos \frac{n\pi x}{L} \Big|_0^L \right] - \frac{1}{n\pi L} \int_0^L \cos \frac{n\pi x}{L} dx \\ &= \frac{1}{n\pi} \cos n\pi - \frac{1}{n\pi} [\cos n\pi - 1] = \frac{1}{n\pi}. \end{aligned}$$

Deste modo a série de Fourier de ϕ é

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}. \quad (27)$$

³ $(|a| + |b|)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$

Prova se agora que dado $\delta > 0$ arbitrário a série (27) converge uniformemente para $0 < \delta \leq |x| \leq L$. Para isto utiliza-se o Critério de Cauchy para convergência uniforme de uma série de funções. i. e., basta provar que para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$ dado, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ($n_0 = n_0(\epsilon)$) tal que quaisquer que sejam os naturais n e m para todo $x \in [0, L]$,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^{n+m} \frac{1}{j} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| < \epsilon.$$

Para todo $x \in [-L, L]$, com $x \neq \pm 2Ln$ e $x \neq 0$,

$$\operatorname{sen} \frac{\pi x}{L} + \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{L} + \dots + \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} = \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos x \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{1}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \frac{x}{2}}.$$

Então, para todo $x \in [\delta, L]$, $0 < \delta < L$, $\operatorname{sen}(x/2) \geq \operatorname{sen}(\delta/2)$. Consequentemente,

$$\frac{1}{\operatorname{sen} \frac{x}{2}} \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}$$

Daí segue que

$$\left| \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| \leq \frac{\cos \frac{x}{2} - \cos x \left(\frac{n\pi}{L} + \frac{1}{2} \right)}{2 \operatorname{sen} \frac{\delta}{2}} \Rightarrow \left| \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| \leq \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}$$

Tomando $B = \frac{1}{\operatorname{sen} \frac{\delta}{2}}$,

$$\left| \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| \leq B. \quad (28)$$

Como $\sum_{j=n}^{n+m} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} = \sum_{j=1}^{n+m} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} - \sum_{j=1}^n \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L}$.

Por (28) $\left| \sum_{j=n}^{n+m} \operatorname{sen} (j\pi x/L) \right| \leq 2B$. Utilizando o Lema de Abel para $a_j = 1/j$ e $b_j = \operatorname{sen} (j\pi x/L)$, $j \geq n$,

$$\left| \sum_{j=n}^{n+m} \frac{1}{j} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| \leq \frac{2B}{n}.$$

Por $\lim_{n \rightarrow \infty} 2B/n = 0$, para todo $\epsilon > 0$, $\epsilon \in \mathbb{R}$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0 \Rightarrow 2B/n < \epsilon$. Então,

$$n > n_0 \Rightarrow \left| \sum_{j=n}^{n+m} \frac{1}{j} \operatorname{sen} \frac{j\pi x}{L} \right| < \epsilon.$$

Portanto a série converge uniformemente para ϕ em qualquer intervalo que não contenha pontos da forma $2Ln$, $n \in \mathbb{Z}$ ■

Teorema 17 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira pertença a L^2 . Então, sua série de Fourier converge uniformemente em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade.*

Demonstração: Vide FIGUEIREDO, p. 69 ■

4 Problema de Dirichlet para a equação de Laplace

Os objetivos principais nesta seção serão mostrar a existência e unicidade de soluções para o problema de Dirichlet associado à equação de Laplace, dentro de um retângulo do $\mathbb{R}^2$. Será mostrado ainda que o problema de Dirichlet para a equação de Laplace tem uma única solução, dentro de um retângulo de $\mathbb{R}^2$, no sentido clássico.

4.1 Existência de soluções

Seja Ω um retângulo com lados a, b ($a \geq b$) com um vértice na origem do plano $\mathbb{R}^2$.

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < a, 0 < y < b\}.$$

Dada $f : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. De um modo geral, o problema de Dirichlet n retângulo consiste em encontrar uma função $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua satisfazendo as seguintes condições:

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{em } \Omega, \\ u = f & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (29)$$

onde $\bar{\Omega}$ e $\partial\Omega$ são o fecho e a fronteira de Ω , respectivamente.

Especificamente, neste trabalho, Ω é constituído de quatro segmentos cujas condições de fronteira são:

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & u(0, y) = g(y), \\ u(x, b) = f_1(x), & u(a, y) = g_1(y). \end{cases} \quad (30)$$

Estas condições devem compor uma função contínua ao longo da fronteira de Ω , por (29), portanto não podem ser arbitrárias. Assim deve-se ter

$$f(0) = g(0), \quad f(a) = g_1(0), \quad f_1(a) = g_1(b), \quad f_1(0) = g(b).$$

Caso isto não ocorra pode-se encontrar uma função harmônica u em Ω , a qual satisfaz as hipóteses de fronteira em um certo sentido, oque impediria que u fosse contínua em $\bar{\Omega}$.

Este problema pode ser resolvido da seguinte forma: decompõe-se o mesmo em quatro problemas de dirichlet, onde cada um deles é obtido tomando três das funções em (30) iguais a zero, e resolve cada um destes isoladamente.

A solução do problema é a soma das quatro soluções, ou seja, $u = u_1 + u_2 + u_3 + u_4$. Como cada solução é obtida com condições de fronteira nulas exceto em um dos lados do retângulo, então elas são idênticas, assim, basta resolver o problema de Dirichlet para o retângulo com as condições de contorno

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = u(0, y) = u(a, y) = 0, \quad \text{sendo } f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R} \text{ contínua.} \quad (31)$$

Para que se tenha a continuidade da função u ao longo de todo o contorno do retângulo deve-se fazer $f(0) = f(a) = 0$, pois, por (31), isto faria as condições de fronteira nulas nos vértices, ou seja,

$$u(0, 0) = u(0, b) = u(a, 0) = u(a, b) = 0,$$

não sendo necessário definir a solução de (29) para dados de fronteira descontínuos.

Portanto, o problema de Dirichlet para a equação de Laplace em um domínio retângular consiste em encontrar uma função $u = u(x, y)$ que satisfaz (29) e (31).

O principal resultado deste arquivo é estabelecido no seguinte teorema.

Teorema 18 (Existência de solução do problema) *Seja $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[0, a]$, diferenciável em $(0, a)$ a menos de um número finito de pontos, f' seccionalmente contínua em $[0, a]$ e $f(0) = f(a) = 0$. Então a série*

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)}\right), \text{ onde } B_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx,$$

converge uniformemente em $[0, a] \times [0, b]$, $u \in C^0([0, a] \times [0, b]) \cap C^\infty([0, a] \times [0, b])$ e u é solução do problema (29) submetida às condições de contorno (31).

O plano da demonstração do Teorema 18 tem as seguintes etapas:

1º Método de separação de variáveis: Consiste em tomar a função u na forma

$$u(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y) \quad (32)$$

afim de obter duas Equações Diferenciais Ordinárias. Encontrando as soluções das EDO's, reuni-se as mesmas obtendo uma solução para as Equação Diferencial Parcial em (29).

Para resolver o problema (29), deriva-se u duas vezes com relação a x , duas vezes com relação a y e substituir estas derivadas parciais em (11) obtendo assim duas equações diferenciais ordinárias que dependem de uma constante real λ .

2º Determina-se as soluções destas EDO's que satisfazem às condições de contorno (31) encontrando assim o valor de λ , que vai estar dependendo de um número natural n . Após encontrá-las vê-se que para cada $n \in \mathbb{N}$, as sucessões de funções $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ são soluções das equações diferenciais ordinárias que dependem respectivamente de x e y . Substituindo estas soluções em (32) encontra-se uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de soluções do problema em questão.

3º Pelo Princípio da Superposição, soma-se as soluções u_n de modo a obter uma solução do problema de Dirichlet (29) satisfazendo às condições (31).

Demonstração do Teorema 18:

1º Para $u(x, y) = \varphi(x) \cdot \psi(y)$, com φ depende somente de x e ψ depende apenas de y ,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x) \cdot \psi(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x) \cdot \psi(y), \quad (33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi(x) \cdot \psi'(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi(x) \cdot \psi''(y). \quad (34)$$

Para satisfazer o problema de Dirichlet substitui-se (33) e (34) na equação de Laplace (11). Assim,

$$\psi(y) \cdot \varphi''(x) = -\varphi(x) \cdot \psi''(y).$$

Dividindo por φ e ψ , nos pontos onde estas funções não são nulas,

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = -\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \lambda,$$

sendo λ um parâmetro independente de x e y . Daí são obtidas duas equações diferenciais ordinárias:

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \lambda \Rightarrow \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) = 0, \quad (35)$$

$$-\frac{\psi''(y)}{\psi(y)} = \lambda \Rightarrow \psi''(y) + \lambda\psi(y) = 0. \quad (36)$$

2º As hipóteses de fronteira $u(0, y) = u(a, y) = 0$ exigem que

$$\varphi(0) \cdot \psi(y) = \varphi(a) \cdot \psi(y) = 0.$$

Como $\psi(y) \equiv 0$ não ocorre por não nos interessar a solução trivial, $u(x, y) = 0$. Então,

$$\varphi(0) = \varphi(a) = 0. \quad (37)$$

Assim, deve-se encontrar a solução de (35) que satisfaça o problema de valor de contorno (37). Como (35) é uma EDO linear de segunda ordem com coeficientes constantes então sua equação característica e a solução desta equação é respectivamente

$$m^2 - \lambda = 0 \Rightarrow m = \pm \sqrt{\lambda}.$$

Tem-se as seguintes possibilidades para a solução procurada.

(i) Para $\lambda = 0$ a solução geral de (35) é: $\varphi(x) = \alpha e^0 + \beta x e^0$.
Resolvendo o PVC

$$\begin{cases} \varphi(0) = \alpha + 0 \cdot \beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \\ \varphi(a) = \alpha + a \cdot \beta = 0 \Rightarrow \beta = 0, \end{cases}$$

conclui-se que $\varphi(x) = 0$.

(ii) Para $\lambda > 0$ a solução geral de (35) é: $\varphi(x) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}x} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}x}$.
Resolvendo o PVC

$$\begin{cases} \varphi(0) = \alpha + \beta = 0 \\ \varphi(a) = \alpha e^{a\sqrt{\lambda}} + \beta e^{-a\sqrt{\lambda}} = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

conclui-se que $\varphi(x) = 0$.

(iii) Para $\lambda < 0$ a solução geral de (35) é: $\varphi(x) = e^0(\alpha \cos \sqrt{-\lambda}x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}x)$.
Resolvendo o PVC

$$\begin{cases} \varphi(0) = \alpha \cos 0 + \beta \operatorname{sen} 0 = 0 \Rightarrow \alpha = 0, \\ \varphi(a) = 0 + \beta \operatorname{sen} \sqrt{-\lambda}a = 0 \Rightarrow \beta = 0 \text{ ou } \sqrt{-\lambda}a = n\pi \end{cases}$$

conclui-se que $\varphi(x) = 0$ ou, fazendo $\beta = 1$, $\varphi(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/a)$.

A possibilidade $\varphi(x) = 0$ é descartada, pois o interesse é obter solução não nula. Então $\lambda = \frac{-n^2\pi^2}{a^2}$ são os autovalores⁴ do problema dado em (35) e (37) cujas autofunções⁵ correspondentes são

$$\varphi_n(x) = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right), \quad 0 \leq x \leq a, \quad (38)$$

soluções da equação diferencial ordinária (35), pois φ está dependendo de x e n pelo fato de o último não ser uma constante. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ obtém-se (36) na forma

$$\psi''(y) - \frac{n^2\pi^2}{a^2}\psi(y) = 0. \quad (39)$$

Resolvendo (39) obtém-se respectivamente a equação característica e a solução desta equação

$$m^2 - \frac{n^2\pi^2}{a^2} = 0 \Rightarrow m = \pm \frac{n\pi}{a}.$$

Então as soluções de (39) são:

$$\psi_n(y) = \alpha_n e^{(n\pi y)/a} + \beta_n e^{-(n\pi y)/a}, \quad 0 \leq y \leq b.$$

Como $u(x, b) = 0 \Rightarrow \psi_n(b) = 0$,

$$\psi_n(b) = \alpha_n e^{(n\pi b)/a} + \beta_n e^{-(n\pi b)/a} = 0 \Rightarrow \alpha_n = -\frac{\beta_n e^{-(n\pi b)/a}}{e^{(n\pi b)/a}} = -\beta_n e^{-2(n\pi b)/a}.$$

Daí,

$$\begin{aligned} \psi_n(y) &= -\beta_n e^{-2(n\pi b)/a} \cdot e^{(n\pi y)/a} + \beta_n e^{-(n\pi y)/a} \\ &= -\beta_n e^{-(n\pi b)/a} [e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)}]. \end{aligned}$$

Fazendo $\gamma_n = -2\beta_n$ e sendo

$$\sinh \left(\frac{n\pi}{a}(y-b) \right) = \left(\frac{e^{(n\pi/a)(y-b)} - e^{-(n\pi/a)(y-b)}}{2} \right).$$

Obtém-se

$$\psi_n(y) = \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \sinh \left(\frac{n\pi}{a}(y-b) \right). \quad (40)$$

Portanto, de (38) e (40) tem-se as funções

$$u_n(x, y) = \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \sinh \left(\frac{n\pi}{a}(y-b) \right). \quad (41)$$

3º Como a equação diferencial parcial em (29) é linear e homogênea, então pelo Princípio da Superposição a soma de um número finito de candidatas à solução é, também, uma possível solução do problema de Dirichlet (29). Ou seja,

$$S_n(x, y) = \sum_{j=1}^n u_j(x, y). \quad (42)$$

⁴ Números para os quais o problema de contorno apresenta solução não trivial.

⁵ Funções que dependem destes valores de λ .

De (41) e (42) a função

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{n\pi}{a} (y-b) \right). \quad (43)$$

é candidata à solução de (29).

Por (43) e pela condição de contorno $u(x, 0) = f(x)$ dada em (31),

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right). \quad (44)$$

Em (44) vê-se que f depende apenas de x , pois $\gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right)$ variam apenas com n . Então, f é equivalente a uma série de Fourier de senos. Logo, por (23),

$$\begin{aligned} \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} \operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right) &= \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx. \quad \text{Daí,} \\ \gamma_n e^{-(n\pi b)/a} &= \frac{2}{a \operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right)} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx. \end{aligned}$$

Seja

$$B_n := \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) dx. \quad (45)$$

A solução do Problema de Dirichlet no retângulo com os dados de fronteira (31) é:

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \left(\frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi(y-b)}{a} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right)} \right), \quad (46)$$

desde que $f : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}$ seja contínua em $[0, a]$, diferenciável em $(0, a)$ a menos de um número finito de pontos com f' seccionalmente contínua em $[0, a]$ e que $f(0) = f(a) = 0$.

4.1.1 Convergência uniforme da série (46)

Para chegar ao fim da demonstração do Teorema 18 basta então mostrar a convergência uniforme da série (46), e que u satisfaz

$$u(0, y) = u(a, y) = u(x, b) = 0 \quad (47)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (48)$$

Demonstração: Mostra-se agora a convergência uniforme da série

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \left(\frac{n\pi x}{a} \right) \left(\frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi(y-b)}{a} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right)} \right).$$

Essencialmente será utilizado o Teste M de Weirstrass pois, pelo fato de a função seno hiperbólico ser crescente e ímpar

$$0 \leq \frac{\operatorname{senh} \left(\frac{n\pi(y-b)}{a} \right)}{\operatorname{senh} \left(\frac{-n\pi b}{a} \right)} \leq 1 \quad \text{para todo } y \in [0, b],$$

e por $|\sin(n\pi x)/a| \leq 1$, para todo $x \in [0, a]$, então

$$\sum_{j=1}^n \left| B_j \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh\left(\frac{j\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-j\pi b}{a}\right)} \right) \right| \leq \sum_{j=1}^n |B_j|.$$

Sendo a série $\sum_{j=1}^n |B_j|$ uniformemente convergente pela hipótese dada a f e a demonstração desta convergência uniforme análoga a demonstração do Teorema 16. Então, a série em (46) converge uniformemente para u em Ω . Sendo assim,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \right), \quad (49)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \pi^2}{a^2} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \right). \quad (50)$$

Somando (49) com (50) obtém-se (48). i.e., a função de duas variáveis u é harmônica nesta região e ainda satisfaz (47), pois

$$\begin{aligned} u(a, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(n\pi) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \right) = 0 \quad \text{por } \sin(n\pi) = 0; \\ u(x, b) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\sinh(0)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \right) = 0 \quad \text{por } \sinh(0) = 0; \\ u(0, y) &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(0) \left(\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(y-b)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{-n\pi b}{a}\right)} \right) = 0 \quad \text{por } \sin(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, provou-se que (46) é de fato solução do problema (29) submetido às condições de fronteira (31), quando f satisfaz as hipóteses dadas em (18). ■

A seguir mostra-se que, quando existe, a solução u é única para todo $(x, y) \in \Omega$.

4.2 Unicidade de soluções

Teorema 19 (Unicidade) *Sejam Ω uma região limitada do $\mathbb{R}^2$ e $u, v : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$, funções de duas variáveis, contínuas e harmônicas em Ω . Se u e v são duas soluções do problema de Dirichlet (29) em Ω para uma mesma função f . Então $u(x, y) = v(x, y)$ para todo $(x, y) \in \Omega$.*

Demonstração: Considere a função $\psi = u - v$. Por u e v serem soluções do problema de Dirichlet, então ψ é contínua em $\bar{\Omega}$ e $\psi = 0$ sobre $\partial\Omega$.

Pela hipótese, u e v satisfazem o Princípio do Máximo e Mínimo (9). Assim,

$$\psi(x, y) \leq 0 \quad \text{para } (x, y) \in \bar{\Omega} \quad \text{e} \quad \psi(x, y) \geq 0 \quad \text{para } (x, y) \in \bar{\Omega}.$$

Consequentemente, $\psi = 0$ para todo $(x, y) \in \Omega$. Logo, $u = v$ em todos os pares $(x, y) \in \Omega$. ■

5 Considerações finais

Neste trabalho apresentou-se um pouco do contexto histórico sobre a série de Fourier, destacando o seu surgimento, a motivação Física para o desenvolvimento da teoria, sua importância no cenário matemático tanto daquela época quanto nos dias atuais.

A teoria de Fourier foi responsável por várias discussões no século XIX e contribuiu para consolidação da integral de Riemann e outras consequências importantes na área de Análise Matemática.

Além disto, foram apresentadas, detalhadamente, algumas propriedades sobre a série de Fourier, necessárias à sua aplicabilidade na resolução do Problema de Dirichlet clássico para a equação de Laplace linear, o qual foi o principal objetivo deste artigo, dando condições de concluir que sob certas condições a equação estudada possui solução única em um domínio retangular.

6 Referências bibliográficas

ANDREOTTI, Fábio. **Laplace, Pierre Simon (1749 - 1827)**. [Campinas: FEM/UNICAMP, ca. 2018]. Disponível em: <http://www.fem.unicamp.br/~em313/paginas/person/laplace.htm>. Acesso em: 23 maio 2018.

BOYER, Carl B.; MERZBACH, Uta C. **História da matemática**. Tradução Helena Castro. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2012. p. 315-340.

CARSLAW, Horatio Scot. **Introduction to the theory of Fourier's series and integrals**. 2nd ed. London: Mcmillan, 1921. p. 196-280.

CARVALHO, Ana Márcia F. T. **O problema de Dirichlet: métodos de resolução**. 1994. 79 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Ciência da Computação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1994.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. 5. ed. São Paulo: Editora da Unicamp, 2011.

FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise de Fourier e equações diferenciais parciais**. 4. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.

FIGUEIREDO, Djairo G. **Análise I**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2012. v. 4.

IÓRIO, Valéria de Magalhães. **EDP: um curso de graduação**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1991. p. 104-174.

JOHANN Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859). [São Paulo: IF/USP, 2009]. Disponível em: <http://ecalculo.if.usp.br/historia/dirichlet.htm>. Acesso em: 23 maio 2018.

LIMA, Elon L. **Curso de análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004. v. 1, p. 361-399. (Projeto Euclides).

MEDEIROS, Luís Adauto; ANDRADE, Nirzi G. **Iniciação às equações diferenciais parciais**. Rio de Janeiro: LTC, 1978.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. Tradução Alfredo A. de Farias. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2001. v. 1.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. **Equações diferenciais**. Tradução Alfredo A. de Farias. 3. ed. São Paulo: Pearson, 2001. v. 2, p. 199-219.