Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 13, dez. 2018
Iniciação Científica

Glaucia Maria Bressan
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
glauciabressan@utfpr.edu.br

Bruna Bruniera
Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
brunabruniera@hotmail.com

Aplicação dos modelos de transporte e de designação de tarefas em uma micro-cervejaria

Application of transport and assignment of tasks models in a micro-brewery

Resumo

Considerando os inúmeros avanços tecnológicos que vêm ocorrendo ao longo das décadas, as empresas têm buscado ações para melhorar seu desempenho, como otimizar seus processos de produção. Desta forma, o objetivo deste trabalho é estudar os modelos de Transporte e de Designação de Tarefas, formulados como problemas de Programação Linear, e suas aplicações em processos produtivos. Para resolver estes problemas, existem na literatura, respectivamente, dois algoritmos que podem ser implementados computacionalmente: o Método Simplex e o Algoritmo Húngaro. Portanto, é proposta uma aplicação da modelagem clássica de transporte e designação de tarefas para resolução de problemas em uma micro-cervejaria localizada no município de Araraquara, SP, a fim de minimizar o custo de transporte dos produtos para seus locais de distribuição e o tempo de produção das quatro cervejas melhor avaliadas, designando o melhor fermentador para sua produção.

Palavras-chave: Programação Linear. Problema do Transporte. Designação de Tarefas. Algoritmo Húngaro. Método Simplex.

Abstract

Considering the technological advances that has been occurring over the decades, companies have been trying to implement actions in order to improve their performance, as to optimize their production processes. Therefore, the goal of this work is to study the Transport and the Assignment of Tasks models, formulates as Linear Programming problems, as well as applications in productive processes. In order to solve these problems, there are in the literature, respectively, two algorithms that can be implemented computationally: Simplex Method and Hungarian algorithm. Thus, an application of transport and assignment task classic modeling is proposed for problem solving in a micro-brewery located in the city of Araraquara, in SP state, in order to minimize the transport cost of the products to the centers of distribution and the production time of the four beers best evaluated, assigning the best fermenter for its production.

Keywords: Linear Programming. Transport Problem. Assignment of Tasks. Hungarian Algorithm. Simplex Method.

1 Introdução

Com os avanços computacionais e tecnológicos, bem como com o crescimento industrial do Brasil, as indústrias têm se tornado cada vez mais competitivas. Desta forma, a automatização e a eficiência dos processos produtivos se fazem necessárias para a sobrevivência da indústria no mercado, o que estimula o estudo de processos de otimização da produção e de serviços. A minimização de custos e de desperdícios de matéria-prima tem sido uma preocupação importante. Nesse contexto, a Pesquisa Operacional pode ser definida como uma ciência que desenvolve métodos quantitativos, fazendo uso de modelos matemáticos, estatísticos e de algoritmos, para a resolução de problemas de otimização de processos e auxílio à tomada de decisões (GOLDBARG; LUNA, 2005). Desta forma, essa ciência busca encontrar uma solução - chamada solução ótima - por meio da modelagem matemática para o auxílio na tomada de decisões e suas técnicas têm sido utilizadas ao longo do tempo em vários setores como engenharia, saúde, indústria e serviços públicos.

Um dos ramos da Pesquisa Operacional é conhecido na literatura como Programação Matemática e refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis reais ou inteiras dentro de um conjunto viável (GOLDBARG; LUNA, 2005). A Programação Matemática, por sua vez, compreende algumas subáreas, como a Programação Linear, a qual utiliza funções lineares em sua formulação (ARENALES et al, 2015). A Programação Matemática, portanto, trata de problemas de decisão e faz uso de modelos matemáticos que procuram representar o problema real. Variáveis (incógnitas) são definidas e relações matemáticas entre essas variáveis são estabelecidas de forma a descrever o comportamento do sistema. O modelo matemático é resolvido por meio da aplicação de um algoritmo e, em seguida, deve ser feita a validação do modelo, isto é, a verificação de que as soluções obtidas são compatíveis com a realidade, para diversas situações alternativas (ARENALES et al, 2015).

Um problema clássico de Programação Linear é chamado de Problema de Transporte, que consiste na distribuição de bens e serviços de várias fontes de suprimento (como fábricas) para várias localizações de demanda (como armazéns) (MOREIRA, 2010). Como existem rotas e custos diferentes entre cada fonte e cada destino, há um problema de decisão, ou seja, é preciso determinar quanto deve ser enviado de cada fonte para cada destino, de modo a satisfazer as demandas e minimizar o custo total de transporte. Geralmente, a quantidade disponível em cada fonte e a demanda de cada destino são fixas ou determinadas. Os problemas de Designação de Tarefas, por sua vez, podem ser entendidos como um caso especial do Problema de Transporte. Este tipo de problema envolve a atribuição de tarefas para pessoas, ou de produtos para máquinas, de modo que cada elemento corresponda a uma atribuição.

A literatura aborda diferentes trabalhos para auxílio em tomadas de decisões com o uso de técnicas de Pesquisa Operacional. Dentre estes, existem diversos autores que estudam a formulação de modelos para os problemas de transporte e designação de tarefas como um problema de Programação Linear. Um exemplo destes estudos pode ser encontrado em Stark, Cantão, L. A. P. e Cantão, R. F. (2013), onde os autores abordam o Problema de Transporte por meio do estudo do roteamento de veículos na coleta seletiva na cidade de Sorocaba, SP. O objetivo principal é melhorar o processo de coleta seletiva e os ganhos econômico-ambientais. O problema é modelado como um Problema de Programação Linear Inteira Mista e foi resolvido com apoio do *solver* CPLEX. Houve indícios de redução na distância percorrida em relação ao praticado habitualmente, entre 10% e 30%.

No trabalho de Nogueira, Valle e Machado (2010), o Problema do Transporte é aplicado para proporcionar melhoria no roteamento de veículos e, conseqüentemente, redução dos custos de suprimento de leite em cooperativas. Para isso, os autores utilizaram dados do setor logístico de uma cooperativa de leite para poder formular um modelo eficaz no custo das rotas que dependendo da região pode reduzir em até 40% do preço final do leite. Os resultados apresentados pelos autores foram bastante promissores, visto que o menor ganho foi de 24% e o maior de 59% em dois dias de operação, quando comparado com as práticas comuns adotadas pela empresa.

Um modelo de designação de tarefas foi desenvolvido em Pinheiro et al. (2015), com o principal objetivo de designar pessoas às equipes de apoio para organização de um evento acadêmico, levando em consideração as habilidades e as preferências dos candidatos a comporem as equipes. O modelo matemático proposto mostrou ser eficiente, obtendo uma solução satisfatória tanto nas capacidades dos candidatos, quanto na demanda necessária ao evento.

Em Teixeira (2011), é desenvolvido um modelo matemático que descreve o problema de alocação de vagões gôndolas de carga geral através do emprego de Programação Linear. O principal objetivo é definir quais clientes devem ser atendidos, buscando maximizar o resultado sob o aspecto financeiro e garantindo o ponto ótimo no atendimento.

Observando-se o referencial bibliográfico, é possível verificar que os Problemas de Transporte e Designação de Tarefas formulados como um Problema de Programação Linear são amplamente aplicados a problemas reais para obtenção de soluções ótimas e para auxiliar a tomada de decisões.

Neste contexto, o objetivo deste trabalho é estudar os modelos de Transporte e de Designação de tarefas como clássicos da Programação Linear e aplicar estas técnicas de modelagem a problemas de otimização de processos em uma micro-cervejaria localizada no município de Araquara, SP, visando minimizar os custos de transporte dos produtos e minimizar o tempo de preparação das quatro cervejas melhor avaliadas por meio da designação de fermentadores para sua produção. Para obter as soluções destes problemas, serão aplicados dois algoritmos: o Método Simplex (ARENALES et al, 2015) e o Algoritmo Húngaro (MOREIRA, 2010). A principal contribuição deste trabalho é propor uma ferramenta que auxiliará na tomada de decisão de uma indústria, no sentido de otimizar o transporte de produtos para seus destinos e a designação de tarefas executadas por máquinas específicas.

2 Formulação matemática de um Problema de Programação Linear

Para a formulação de um Problema de Programação Linear (PPL), de forma geral, são necessários quatro elementos: a variável de decisão; a função objetivo, a qual deve ser maximizada ou minimizada; um conjunto de restrições que devem ser satisfeitas e as condições de não-negatividade, inerentes a todo PPL. Todas as equações do modelo são constituídas por funções lineares, relacionando as variáveis de decisão com os coeficientes conhecidos.

Para que o problema possa ser modelado como um PPL, algumas características devem ocorrer (LACHTERMACHER, 2018):

- Proporcionalidade: o valor da função objetivo é diretamente proporcional ao nível de atividade de cada variável de decisão.
- Aditividade: considera as variáveis de decisão do modelo como entidades totalmente independentes, não permitindo que haja interdependência entre as mesmas, isto é, não permitindo a

existência de termos cruzados, tanto na função-objetivo como nas restrições.

- **Divisibilidade:** assume que todas as unidades de atividade possam ser divididas em qualquer nível fracional, isto é, qualquer variável de decisão pode assumir valor fracionário.

- **Certeza:** assume que todos os parâmetros do modelo são constantes conhecidas. Em problemas reais, a certeza quase nunca é satisfeita, provocando a necessidade de análise de sensibilidade dos resultados.

Desta forma, o PPL pode ser escrito como a seguir (GOLDBARG; LUNA, 2005).

$$\min \text{ ou } \max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \quad (1)$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \quad [sinal] \quad b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \quad [sinal] \quad b_2$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \quad [sinal] \quad b_2$$

(...)

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \quad [sinal] \quad b_m \quad (2)$$

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n \geq 0 \quad (3)$$

Em que:

- $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ são as variáveis de decisão;
- $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$ são os coeficientes (números reais) da função objetivo;
- $b_1, b_2, \dots, b_m$ são as constantes (números reais) de cada uma das restrições;
- a_{ij} são os coeficientes (números reais) das restrições;
- o símbolo [sinal] indica que a restrição pode ser uma equação ou uma inequação;

Depois da declaração da função objetivo (1), um conjunto de restrições (2) deve ser considerado. Dessa forma, indica-se que a função objetivo está sujeita a algumas restrições ou limitações que devem ser satisfeitas. Por fim, as condições de não-negatividade (3).

As Seções 3 e 4 descrevem, respectivamente, a formulação matemática do Problema do Transporte e do Problema de Designação de Tarefas, modelados como problemas de Programação Linear.

3 O Problema do Transporte

O Problema do Transporte pode ser modelado como um PPL e pode ser interpretado como a tarefa de transportar o que foi produzido por fontes ou centros de produção de uma fábrica ou indústria, para seus armazéns ou para seus locais de distribuição. Esse problema tem como objetivo encontrar a melhor solução, com o menor o custo, para percorrer os caminhos e realizar o transporte de produtos. Desse modo, o problema deve apresentar como resposta a quantidade que deve ser enviada e para onde deve prosseguir, de maneira que satisfaça as demandas com o menor custo possível. As quantidades produzidas ou ofertadas em cada centro e as quantidades demandadas em cada mercado consumidor são conhecidas. O transporte deve ser efetuado de modo que respeite as limitações de oferta e atenda à demanda (ARENALES et al, 2015).

Por se tratar de um PPL, considera-se a hipótese de que o custo unitário de transporte de cada fábrica para cada destino é constante, independente da quantidade a ser transportada. A

formulação geral do Problema do Transporte pode ser escrita matematicamente conforme a seguir, sendo que a variável de decisão X_{ij} representa a quantidade de itens transportados da fábrica i para a fábrica j . O objetivo é minimizar o custo total do transporte de acordo com a função objetivo (4) (LACHTERMACHER, 2018).

$$\min Z = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n C_{ij} X_{ij}. \quad (4)$$

Em que:

- C_{ij} é o custo unitário do transporte da fábrica i para o destino j (constantes);
- m é o número de fábricas;
- n é o número de destinos.

As restrições representam o seguinte cenário: as fábricas não podem produzir mais do que sua capacidade e os centros não desejam receber volumes acima de suas demandas. Há duas maneiras para as restrições serem implementadas. Na primeira, o montante ofertado (somatório das capacidades das fábricas) deve ser igual ao demandado. No caso em que a oferta for maior que a demanda, deve-se introduzir um destino fantasma, chamado de *dummy*, que tenha os custos de transporte unitário de todas as fábricas para este destino iguais a zero. E além disso, a demanda do centro consumidor deve ser igual à diferença entre o ofertado e o total demandado. No caso da demanda ser maior que a oferta, deve-se introduzir uma fonte de oferta fantasma, também chamado de *dummy*, que tenha os custos de transporte unitários para todos os destinos iguais a zero e uma capacidade igual à diferença entre o total demandado e o total ofertado.

Se uma fonte ou uma demanda fantasma for inserida, é garantido que o total das restrições do problema serão dadas por igualdades. Estas restrições matemáticas são escritas conforme as equações a seguir:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = f_i \text{ (para } i=1,2,\dots,m) \text{ restrições da capacidade das fábricas;}$$

O somatório das quantidades enviadas de cada fábrica e para cada n destinos deverá ser igual o total ofertado pela fábrica f_i .

$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = d_j \text{ (para } j=1,2,\dots,n) \text{ restrições dos centros consumidores}$$

Neste caso, os somatórios das quantidades recebidas por cada centro consumidor das m fábricas deve ser igual ao total demandado por cada destino d_j . Somando-se todos os lados de todas as restrições, tem-se:

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n X_{ij} = \sum_{i=1}^m f_i$$

e

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^m X_{ij} = \sum_{j=1}^n d_j$$

Como os lados esquerdos das duas equações acima representam o somatório do custo de todos os itens transportados das fábricas para os destinos, logo pode-se concluir que os lados direitos também deverão ser iguais, ou seja:

$$\sum_{i=1}^m f_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Esta igualdade é a condição suficiente e necessária para que qualquer problema de transporte tenha solução ótima, caso o modelo utilize variáveis fantasmas.

A segunda forma de se implementar as restrições varia com o total da capacidade das fábricas e o total demandado. Quando a oferta é maior que a demanda, nem todas as fábricas produzirão em plena capacidade, porém, os centros consumidores receberão a quantidade desejada. Matematicamente, representa-se como:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} \leq f_i, \text{ com } i = 1, 2, \dots, m \text{ restrições das fábricas;}$$
$$\sum_{i=1}^m X_{ij} = d_j, \text{ com } j = 1, 2, \dots, n \text{ restrições dos centros consumidores;}$$

Quando a demanda é maior que a oferta, nem todos os centros receberão as quantidades que desejam, porém as fábricas produzirão sua plena capacidade. Matematicamente, tem-se:

$$\sum_{j=1}^n X_{ij} = f_i; (i = 1, 2, \dots, m) \text{ restrições das fábricas;}$$
$$\sum_{i=1}^m X_{ij} \leq d_j; (j = 1, 2, \dots, n) \text{ restrições dos centros consumidores;}$$

Se ocorrer um desequilíbrio entre oferta e demanda, as seguintes ações e interpretações podem ocorrer: se a capacidade for maior que a demanda, a ação é buscar novos consumidores e a interpretação é a capacidade ociosa das fábricas. Se a demanda é maior que a capacidade, a ação é criar uma nova fábrica e a interpretação é que a demanda não é atendida.

3.1 O Método Simplex

O Método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947, utiliza uma sequência de cálculos para chegar à solução de um Problema de Programação Linear (MOREIRA, 2010) e pode ser aplicado para obter a solução do Problema do Transporte. O algoritmo utiliza de ferramentas da Álgebra Linear para determinar, por meio de um método iterativo, a solução ótima de um PPL. De forma geral, o algoritmo parte de uma solução inicial, localizada em um dos vértices da região de soluções e, a partir dessa, identifica novas soluções viáveis, percorrendo os vértices. Logo, o algoritmo permite encontrar novos e melhores vértices da envoltória convexa do problema e determinar se o vértice escolhido é uma solução ótima (GOLDBARG; LUNA, 2005).

De acordo com Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010), um PPL pode ser escrito na forma matricial, como:

$$\text{Minimizar} \quad cx$$

$$\begin{aligned} \text{subjeito a} \quad & \mathbf{Ax} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \end{aligned}$$

em que A é uma matriz $m \times n$ com posto m ; c é um vetor de custos de ordem $1 \times n$; x é um vetor $n \times 1$ que representa as variáveis de decisão e b é o vetor das constantes, de ordem $m \times 1$.

Possivelmente, após o rearranjo das colunas de A , seja $A = [B, N]$ onde B (matriz básica) é uma matriz inversível de ordem $m \times m$ e N (matriz não básica) é de ordem $m \times (n - m)$. Similarmente, o chamado *vetor de solução básica* x é também particionado como x_B (variáveis básicas) e x_N (variáveis não básicas). O Método Simplex para problemas de minimização é descrito conforme o Algoritmo 1, baseado em Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010).

A fundamentação teórica do Método Simplex, um dos mais utilizados métodos para resolução de problemas de otimização linear, e exemplos numéricos de aplicação do algoritmo podem ser vistos em Arenales et al. (2015), Bazaraa, Jarvis e Sherali (2010), Goldbarg e Luna (2005) e Lachtermacher (2018).

4 Problema de designação de tarefas

O Problema de Designação tem como objetivo a alocação de recursos a objetos (MOREIRA, 2010). Envolve a atribuição de tarefas a pessoas ou máquinas, de pessoas a projetos, e assim por diante. Assume-se a hipótese de que cada elemento a ser designado corresponde a um único objeto. Desta forma, cada atribuição tem uma variável de decisão associada. Para sua formulação, algumas hipóteses devem ser então satisfeitas (HILLIER; LIEBERMAN, 2013):

1. O número de designados e o número de tarefas é o mesmo. Esse número é representado por n .
2. Deve-se atribuir a cada designado exatamente uma tarefa.
3. Cada tarefa deve ser realizada exatamente por um designado.
4. Há um custo c_{ij} associado ao designado $i = 1, 2, \dots, n$ executando a tarefa $j = 1, 2, \dots, n$.
5. O objetivo é determinar como todas as n designações devem ser feitas para minimizar o custo total.

Dessa forma, o Problema de Designação pode ser formulado matematicamente conforme a seguir (HILLIER; LIEBERMAN, 2013).

Variáveis de decisão binárias (para $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, n$):

$x_{ij} = 1$, se o designado i realiza a tarefa j

$x_{ij} = 0$, caso o contrário

Sendo Z o custo total, a formulação matemática para o problema de designação de tarefas pode ser escrito na forma geral como:

$$\begin{aligned} \min Z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} &= 1 \text{ para } i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Algoritmo 1: Simplex

/* INICIALIZAÇÃO

*/

- 1 Escolha uma solução básica inicial com base B .

/* ALGORITMO PRINCIPAL

*/

1. Resolva o sistema $Bx_B = x$ (com solução única $x_B = B^{-1} b = \bar{b}$).

Seja $x_B = \bar{b}$, $x_N = 0$ e $z = c_B x_B$.

2. Resolva o sistema $wB = c_B$ (com solução única $w = c_B B^{-1}$).

o vetor w é o vetor dos *multiplicadores simplex*, pois seus componentes são os multiplicadores das linhas de A que são adicionadas à função objetivo, transformando-a na forma canônica.

Calcule $z_j - c_j = wa_j - c_j$ para todas as variáveis não básicas. Seja

$$z_k - c_k = \max_{j \in J} \{z_j - c_j\}$$

onde J é o conjunto atual de índices associados às variáveis não básicas. Se $z_k - c_k \leq 0$, então a solução básica factível atual é a solução ótima. Caso contrário, vá para o Passo 3 com x_k como variável de entrada.

3. Resolva o sistema $B y_k = a_k$ (com solução única $y_k = B^{-1} a_k$). Se $y_k \leq 0$, então a solução ótima é ilimitada ao longo do raio

$$\left\{ \begin{bmatrix} \bar{b} \\ 0 \end{bmatrix} + x_k \begin{bmatrix} -y_k \\ e_k \end{bmatrix} : x_k \geq 0 \right\}$$

onde e_k é um vetor $(n - m)$ de zeros, exceto para a posição k , que recebe o valor 1. Se $y_k \not\leq 0$, vá para o Passo 4.

4. Seja x_k a variável a entrar na base. O índice r das variáveis em bloco, x_{B_r} , a qual deixa a base é determinada pelo seguinte teste:

$$\frac{\bar{b}_r}{y_{rk}} = \min_{1 \leq i \leq m} \left\{ \frac{\bar{b}_i}{y_{ik}} : y_{ik} > 0 \right\}.$$

Atualize a base B onde a_k substitui a_{B_r} , atualize o conjunto de índices J , e repita o Passo 1.

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \text{ para } j = 1, 2, \dots, n$$

$$x_{ij} \geq 0 \text{ para todo } i \text{ e } j$$

e

$$x_{ij} \geq 0 \text{ binário para todo } i \text{ e } j$$

O primeiro conjunto de restrições especifica que cada designado deve realizar exatamente

uma tarefa, enquanto o segundo conjunto de restrições pede que cada tarefa seja realizada por um designado.

4.1 O Algoritmo Húngaro

O Algoritmo Húngaro, criado pelos Húngaros D. König e E. Evervály, é um procedimento de cinco passos que trabalha com o princípio da redução da matriz, isto é, por meio de operações, pretende-se reduzi-la a uma matriz de custo de oportunidade. O objetivo é obter uma matriz reduzida em que cada linha ou cada coluna tenha somente um zero, as células em que estejam esses zeros mostrarão as alocações ótimas (MOREIRA, 2010).

Teorema 4.1 (*Alocação ótima*) Se um número real é somado ou subtraído de todas as entradas de uma linha ou coluna de uma matriz-custo, então uma alocação ótima para a matriz-custo resultante é também uma alocação ótima para a matriz-custo original.

A demonstração deste teorema é feita de acordo com Brito e Silva Junior (2015).

Demonstração: Considere a matriz custo $C_{n \times n}$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} & c_{i2} & \dots & c_{ij} & \dots & c_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Suponha que $c_{11_k}, c_{22_k}, \dots, c_{ii_k}, \dots, c_{nn_k}$ sejam as entradas da alocação ótima da matriz-custo original, onde os índices $1_k, 2_k, \dots, i_k, \dots, n_k$ sejam diferentes dois a dois. Sendo assim, o custo mínimo da matriz em questão é obtido pela soma S_0 , que consiste nas somas das entradas acima citadas, ou seja:

$$S_0 = c_{11_k} + c_{22_k} + \dots + c_{ii_k} + \dots + c_{nn_k}.$$

Como S_0 é a alocação ótima, então existe ao menos uma alocação S obtida pela soma de quaisquer outras entradas, tal que $S \geq S_0$, para qualquer S dado.

Seja β um valor real qualquer, que será adicionado a todas as entradas da linha i da matriz custo C . Obtêm-se uma nova matriz C' , diferente da matriz original. Assim,

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2j} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{i1} + \beta & c_{i2} + \beta & \dots & c_{ij} + \beta & \dots & c_{in} + \beta \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nj} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n}$$

Somando as entradas da matriz C' correspondente às entradas de S_0 da matriz original, obtemos a soma S'_0 . Sendo assim, encontra-se com a soma a seguir:

$$S'_0 = c_{11_k} + c_{22_k} + \dots + (c_{ii_k} + \beta) + \dots + c_{nn_k} = S_0 + \beta.$$

Observe que o valor real β foi adicionado a todas as entradas da linha i da matriz C , gerando a matriz C' . Nestas condições qualquer alocação possível para C' conterá um elemento da linha i , ou seja, tem-se uma soma S' com as entradas correspondentes a S , porém acrescidas de β , logo:

$$S' = S + \beta \geq S_0 + \beta = S'_0.$$

Como $S' = S_0 + \beta$ é uma alocação ótima para a matriz C' , quaisquer outras alocações existentes serão maiores ou iguais a S'_0 , pois uma vez que foi acrescido o valor real β a todos os elementos da linha i da matriz C , qualquer outra alocação existente terá a forma de $S' = S + \beta$, não mudando o resultado antes obtido quando S foi comparado a S_0 . De maneira análoga, pode-se provar que o fato não muda quando somado qualquer valor à coluna j . ■

Por meio do Teorema anterior, pode-se dar início ao estudo do algoritmo Húngaro. Algumas observações devem ser feitas (MOREIRA, 2010):

1. O número de linhas é igual ao número de colunas na matriz de custos C , ou seja, o número de objetos a serem alocados é igual aos recursos a alocar;
2. Não há restrições de alocação, ou seja, cada recurso pode ser alocado a qualquer um dos objetos;
3. A matriz é de custos ou alguma outra grandeza que deve ser minimizada.

Se o problema satisfaz as condições acima, pode-se aplicar os passos do algoritmo Húngaro (MOREIRA, 2010), descritos no Algoritmo 2. Na Seção 5.2, os passos do algoritmo são exemplificados por meio do estudo de caso.

Considera-se três casos especiais para o problema de designação (MOREIRA, 2010):

- a) Quando o número de fontes de recursos for diferente do número de destinos: devem ser criadas, conforme o caso, linhas ou colunas fictícias, preenchidas com zeros, tornando a matriz quadrada. Desta forma, o algoritmo Húngaro pode ser aplicado conforme descrito.
- b) Quando o problema exige maximização: identifica-se o maior elemento da matriz de dados. Em seguida, subtrai-se desse, todos os outros elementos. Esse procedimento transforma a matriz em uma matriz de custos de oportunidade, e o algoritmo Húngaro pode ser aplicado. A alocação de custos de oportunidade mínimos corresponderá à alocação ótima na maximização.
- c) Quando existem recursos e destinos para alocação que são incompatíveis: atribuiu-se um custo extremamente alto à combinação recurso/destino incompatível, de forma que se assegure que a alocação não será feita.

Algoritmo 2: Húngaro

/* ALGORITMO PRINCIPAL

*/

1. Transformar a matriz dada em uma matriz de custos de oportunidade, por meio dos seguintes procedimentos:
 - subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada linha, de todos os outros tempos da mesma linha, gerando pelo menos um zero em cada linha;
 - subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada coluna, de todos os outros tempos da mesma coluna, gerando pelo menos um zero em cada coluna.
2. Verificar se a matriz resultante já está pronta para oferecer a alocação ótima. Para isso, traçar o menor número possível de retas cobrindo todos os zeros da matriz. Caso o número de retas seja igual ao número de linhas ou colunas da matriz (a matriz é quadrada), então a solução ótima foi encontrada; vá para o 4º passo. Caso o número de retas traçadas seja menor que o número de colunas ou linhas da matriz, vá para o 3º passo.
3. Quando o número mínimo de retas traçadas for menor que o número de linhas ou colunas da matriz, identificar o menor número não coberto pelas retas traçadas. Em seguida:
 - subtrair esse número de todos os outros não cobertos pelas retas traçadas, gerando pelo menos mais um zero na matriz;
 - somar esse número a todos os números que estejam nas interseções das retas traçadas.Retornar, então, ao 2º passo, ou seja, traçar de novo o menor número possível de retas para cobrir todos os zeros.
4. Se o número de retas traçadas para cobrir todos os zeros for igual ao número de linhas ou colunas da matriz, então a solução ótima foi encontrada.
 - verificar as linhas ou colunas que têm um único zero e fazer a alocação nessa célula;
 - eliminar a linha ou coluna em que foi feita a alocação e procurar por outros zeros isolados em linhas ou colunas. Repetir o procedimento até que todos os recursos estejam alocados.

5 Estudo de caso: aplicação dos problemas do transporte e de designação de tarefas em uma micro-cervejaria

Um estudo de caso foi desenvolvido em uma micro-cervejaria localizada no município de Araquara, SP. Este estudo tem como objetivos: minimizar o custo total de transporte de produtos provenientes das fontes de produção para os destinos, satisfazendo as demandas (problema do transporte) e minimizar o tempo de produção das 4 cervejas melhor avaliadas, designando fermentadores para cada tipo de cerveja (problema de designação).

5.1 Aplicação do problema do transporte

Primeiramente, para a modelagem matemática do Problema do Transporte, a fábrica produz um total de 6000 l/mês, os quais são distribuídos para cinco destinos diferentes, sendo que 25% da produção de cerveja são destinados para um restaurante localizado na própria cervejaria. Outros 25% da produção são destinados para locais da cidade de Araraquara, 30% para a cidade de São Paulo, 18% para a cidade de Ribeirão Preto e os outros 2% restantes, para outros destinos.

A fábrica possui um total de oito tanques, que consistem nas fontes de produção, sendo que, destes, quatro tanques têm capacidade de 1000 litros e os outros quatro têm capacidade de 500 litros. Desse modo, o problema em estudo apresenta oito fontes de produção e cinco destinos. Todas as oito fontes podem produzir o mesmo tipo de cerveja, ou seja, todas os destinos podem receber a cerveja de qualquer uma das fontes.

Os custos de transporte dos produtos das fontes para cada destino são obtidos com base nas distâncias percorridas para realizar o transporte. A formulação matemática do Problema do Transporte é descrita a seguir. As variáveis de decisão do problema são denotadas por x_{ij} e representam a quantidade (em litros) de produto transportada da fonte de produção com índice i ($i = 1, \dots, 8$) para o destino j ($j = 1, \dots, 5$). A função objetivo é expressa como:

$$\text{Min } 1x_{11} + 5x_{12} + 500x_{13} + 200x_{14} + 700x_{15} + 1x_{21} + 5x_{22} + 500x_{23} + 200x_{24} + 700x_{25} + 1x_{31} + 5x_{32} + 500x_{33} + 200x_{34} + 700x_{35} + 1x_{41} + 5x_{42} + 500x_{43} + 200x_{44} + 700x_{45} + 1x_{51} + 5x_{52} + 500x_{53} + 200x_{54} + 700x_{55} + 1x_{61} + 5x_{62} + 500x_{63} + 200x_{64} + 700x_{65} + 1x_{71} + 5x_{72} + 500x_{73} + 200x_{74} + 700x_{75} + 1x_{81} + 5x_{82} + 500x_{83} + 200x_{84} + 700x_{85}$$

As restrições têm origem nos fatos de que cada fonte de produção tem produção limitada (capacidade de produção) e cada destino tem demanda conhecida. Desta forma, são formulados dois conjuntos de restrições: um relativo à capacidade de produção das fontes e outro relativo à demanda dos destinos.

Restrições relativas à produção das fontes:

$$\begin{array}{ll} \text{Fonte 1: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} \leq 1000 & \text{Fonte 5: } x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} \leq 500 \\ \text{Fonte 2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} \leq 1000 & \text{Fonte 6: } x_{61} + x_{62} + x_{63} + x_{64} + x_{65} \leq 500 \\ \text{Fonte 3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} \leq 1000 & \text{Fonte 7: } x_{71} + x_{72} + x_{73} + x_{74} + x_{75} \leq 500 \\ \text{Fonte 4: } x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} \leq 1000 & \text{Fonte 8: } x_{81} + x_{82} + x_{83} + x_{84} + x_{85} \leq 500 \end{array}$$

Restrições relativas às demandas dos destinos:

$$\begin{array}{l} \text{Destino 1: } x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{41} + x_{15} + x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1500 \\ \text{Destino 2: } x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} + x_{26} + x_{27} + x_{28} = 1500 \\ \text{Destino 3: } x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} + x_{36} + x_{37} + x_{38} = 1800 \\ \text{Destino 4: } x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} + x_{45} + x_{46} + x_{47} + x_{48} = 1080 \\ \text{Destino 5: } x_{51} + x_{52} + x_{53} + x_{54} + x_{55} + x_{56} + x_{57} + x_{58} = 120 \end{array}$$

Formulado o problema como um problema de programação linear, o método Simplex é aplicado para a obtenção da solução ótima, com apoio computacional do *software* LINDO (*Linear Interactive and Discrete Optimizer*)

A solução ótima obtida, após 18 iterações, é: o custo mínimo para o transporte da produção

mensal é de R\$ 1.209.000,00. A solução ótima apresenta os seguintes valores para as variáveis de decisão: $x_{11} = 1000$, $x_{23} = 1000$, $x_{34} = 880$, $x_{35} = 120$, $x_{42} = 800$, $x_{44} = 200$, $x_{52} = 500$, $x_{62} = 200$, $x_{63} = 300$, $x_{71} = 500$, $x_{83} = 500$.

Desta forma, conclui-se que se as demandas aumentarem e a capacidade de produção permanecer constante, a demanda não será satisfeita. Por outro lado, se as demandas diminuïrem e a capacidade de produção permanecer constante, o valor da função objetivo é reduzido.

5.2 Aplicação do problema de designação

Para a modelagem matemática do Problema de Designação, foram selecionados os quatros tipos de cerveja que receberam melhor avaliação em um site de cervejas, sendo estas: Opera Seven'Inn (C1), Estrempia Die Walbkiire (C2), Pumpkin Ale (C3) e Extrena Oak & Passion (C4). Cada cerveja é fabricada por um fermentador e possui um determinado tempo de produção, em dias, de acordo com os ingredientes selecionados, como pode ser visto na Tabela 1, em que C1, ..., C4 são os tipos de cerveja e F1, ..., F4 são os fermentadores.

Tabela 1: Tempo de produção (dias) de cada cerveja em cada fermentador

	F1	F2	F3	F4
C1	7	9	9	11
C2	7	9	8	10
C3	13	14	15	16
C4	14	16	16	17

O *algoritmo Húngaro*, descrito na Seção 4.1, foi aplicado para obtenção da solução ótima. A partir do princípio da redução da matriz, os seguintes procedimentos são executados, de acordo com o Algoritmo 2:

Passo 1: Subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada linha, de todas os outros tempo da mesma linha, gerando pelo menos um zero em cada linha, conforme Tabela 2. Por exemplo, na linha 1 da Tabela 1, o menor tempo é 7. Logo, subtrai-se esse valor de todos os demais elementos da linha 1 e assim para as demais linhas.

Tabela 2: Passo 1 do algoritmo Húngaro

	F1	F2	F3	F4
C1	0	2	2	4
C2	0	2	1	3
C3	0	1	2	3
C4	0	2	2	3

Tabela 3: Passo 2 do algoritmo Húngaro

	F1	F2	F3	F4
C1	0	1	1	1
C2	0	1	0	0
C3	0	0	1	0
C4	0	1	1	0

A partir da Tabela 2, ainda no passo 1, subtrair o menor tempo de desenvolvimento em cada coluna, de todos os outros tempos da mesma coluna, gerando pelo menos um zero em cada coluna, conforme Tabela 3. Por exemplo, na coluna 2 da Tabela 2, o menor elemento é 1. Logo, subtrai-se esse valor de todos os demais elementos da coluna 2.

Passo 2: Traçar o menor número possível de retas cobrindo todos os zeros da matriz obtida na Tabela 3. Caso o número de retas seja igual ao número de linhas ou colunas da matriz, a solução ótima foi encontrada. Neste caso, executar Passo 4. Por exemplo, a partir da Tabela 3, verifica-se que o número de retas traçadas para cobrir todos os zeros é igual a 4, ou seja, igual à ordem da matriz, conforme exibe a Figura 1. Desta forma, a alocação ótima foi encontrada e o passo 4 do Algoritmo 2 será executado a seguir.

	F1	F2	F3	F4
C1	0	1	1	1
C2	0	1	0	0
C3	0	0	1	0
C4	0	1	1	0

Figura 1: Execução do Passo 2.

Passo 4: Verificar linhas ou colunas que tem um único zero e fazer a alocação nessa célula. Eliminar a linha ou coluna em que foi feita a alocação e buscar outros zeros isolados até que todos os recursos sejam alocados. Por exemplo, na primeira linha da Tabela 3, há um zero único na célula C1F1. Eliminando-se a primeira linha e a primeira coluna, tem-se outro zero único na coluna 2, na célula C3F2. Eliminando-se então a linha 3 e a coluna 2, o próximo zero único está na coluna 3, na célula C2F3. Por fim, eliminando-se a linha 2 e a coluna 3, o último zero único aparece na célula C4F4, conforme destaca a Figura 2.

	F1	F2	F3	F4
C1	0	1	1	1
C2	0	1	0	0
C3	0	0	1	0
C4	0	1	1	0

Figura 2: Execução do Passo 4.

Portanto, os tipos de cerveja são designados a serem produzidas pelos seguintes fermentadores: $C1 \rightarrow F1$ (7 dias); $C2 \rightarrow F3$ (8 dias); $C3 \rightarrow F2$ (14 dias) e $C4 \rightarrow F4$ (17 dias), minimizando o tempo de produção das cervejas para um total de 46 dias. Como a empresa não apresenta planejamento para otimização da sua produção, na prática, a designação é feita pela diagonal da matriz da Tabela 1, resultando em 48 dias. Portanto, conclui-se que o algoritmo Húngaro foi satisfatório na obtenção da solução ótima, alocando cada tipo de cerveja a um fermentador, minimizando o tempo de produção.

6 Conclusão

Neste trabalho, o Problema do Transporte e o Problema de Designação de Tarefas foram formulados como PPL's e aplicados em uma micro-cervejaria do estado de São Paulo, com o objetivo de minimizar os custos de transporte das cervejas produzidas na fábrica para os centros consumidores e minimizar o tempo de preparação das quatro cervejas melhor avaliadas, designando-se fermentadores para sua produção. Os resultados obtidos por meio da aplicação do método Simplex e do Algoritmo Húngaro foram promissores na otimização dos problemas abordados, uma vez que apresentaram melhores resultados do que a prática da indústria.

A solução ótima obtida pelo Método Simplex no Problema do Transporte, apresentou uma redução no custo de transporte de aproximadamente 5% em comparação com a prática de transporte da empresa, otimizando, desta forma, o transporte dos produtos a um custo mínimo. Para o problema de Designação de Tarefas, o algoritmo Húngaro apresentou uma solução que diminui em 2 dias o tempo de preparação das quatro cervejas melhor avaliadas no mercado, o que representa uma diminuição do tempo de preparação de 4,17% em comparação com a prática da micro-cervejaria em estudo.

Desta forma, a principal contribuição deste trabalho é oferecer auxílio na tomada de decisão nos processos produtivos da indústria de pequeno porte em estudo, no sentido de otimizar o transporte de produtos para seus destinos a um custo mínimo e otimizar também a designação de tarefas executadas por máquinas específicas para a produção de determinados produtos comercializados.

7 Referências Bibliográficas

ARENALES, M. N. et al. **Pesquisa operacional: para cursos de engenharia**. 2. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2015.

BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. **Linear programming and network flows**. 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, 2010.

BRITO, J. P. de; SILVA JUNIOR, J. C. da **Utilizando o método Húngaro e o Matlab em problemas de alocação de tarefas**. 2015. 49 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo, Birigui, 2015.

GOLDBARG, M. C.; LUNA, H. P. L. **Otimização combinatória e programação linear: modelos e algoritmos**. 2. ed. Rio de Janeiro: Campus, 2005.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à pesquisa operacional**. 9. ed. Porto Alegre: AMGH, 2013.

LACHTERMACHER, G. **Pesquisa operacional na tomada de decisões**. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2018.

MOREIRA, D. A. **Pesquisa operacional: curso introdutório**. 2. ed. rev. e atual. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

NOGUEIRA, T. H.; VALLE, W. A. do; MACHADO, R. R. Desenvolvimento de um modelo de

roteamento para suporte a mudança da estratégia de coleta de leite a granel. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 42., 2010, Bento Gonçalves, RS.

Proceedings... Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2010, p. 1329–1340.

PINHEIRO, M. D. et al. Uma aplicação da programação linear para designação de acadêmicos em equipes de apoio a organização de eventos acadêmicos: o caso eepea-enpepro. **Revista Latino America de Inovação e Engenharia de Produção**, v. 3, n. 4, p. 189–201, 2015.

STARK, F. S.; CANTÃO, L. A. P.; CANTÃO, R. F. Problema de roteamento na coleta seletiva: estudo na cooperativa Reviver, Sorocaba-SP. In: SIMPÓSIO BRASILEIRO DE PESQUISA OPERACIONAL, 45., 2013, Natal, RN. **Proceedings ...** Rio de Janeiro: SOBRAPO, 2013, p. 1713–1723.

TEIXEIRA, V. G. **Aplicação de programação linear na alocação de vagões gôndola para o transporte de ferro gusa na MRS Logística S.A.** 2011. 54 p. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia de Produção) - Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, 2011.