Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 12, jul. 2018
Iniciação Científica

André Fabiano Steklain
Lisbôa

Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
steklain@utfpr.edu.br

Adriano Carlos Leal

Universidade Tecnológica
Federal do Paraná
profadrianoaleal@ibest.com.br

Abordagem de séries divergentes no ensino médio usando progressões

Approach of divergent series in high school using progressions

Resumo

Neste trabalho propomos uma metodologia para a introdução de séries divergentes no Ensino Médio. A proposta baseia-se no ensino de Progressões Aritméticas e Geométricas, as quais são abordadas como sequências numéricas. A convergência das séries numéricas baseadas nestas sequências é estudada. Para as séries divergentes, é proposto uma extensão do conceito de soma. O método da Soma de Cesàro é apresentado como uma alternativa simples para abordar o assunto no Ensino Médio.

Palavras-chave: Progressões Aritméticas. Progressões Geométricas. Séries. Séries Divergentes.

Abstract

In this work we propose a methodology for the introduction of divergent series in High School. The proposal is based on the teaching of Arithmetic and Geometric Progressions, treated as numerical sequences. The convergency of the numerical series based on these sequences are studied. For the divergent series is proposed an extension of the concept of sum. The Cesàro sum method is presented as an simple alternative for the approach of this subject in High School.

Keywords: Arithmetic Progressions. Geometric Progressions. Series. Divergent Series.

1 Introdução

No Ensino Médio o ensino das progressões aritméticas e geométricas não sofreu alterações substanciais ao longo dos anos (IEZZI et al., 2015; SILVA; BARRETO FILHO, 1997). Primeiramente o estudante é introduzido ao conceito de sequência. A seguir, são estudadas duas sequências específicas: as *progressões aritméticas* e as *progressões geométricas*. O último tópico abordado é a soma das progressões. Neste tópico em particular são abordados com ênfase as progressões finitas (que possuem um número finito de elementos). A questão da soma das progressões infinitas é abordado de forma bastante superficial.

O tratamento superficial dado à soma das sequências infinitas é plenamente justificável através do ponto de vista pedagógico. O estudante do Ensino Médio ainda não possui todas as ferramentas necessárias para o desenvolvimento do conceito de séries (sejam convergentes ou divergentes). Se o assunto é evitado, no entanto, o estudante pode insistir nesta visão simplificada no Ensino Superior, fazendo com que a assimilação dos novos conceitos torne-se mais difícil, com o risco adicional de o estudante adquirir vícios em sua formação.

Para exemplificar esta discussão, considere uma propriedade simples que é válida para uma soma finita de termos, como, por exemplo, que o resultado da soma independe da ordem em que os elementos são somados:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}.$$

No caso de algumas séries (condicionalmente) convergentes esta mesma propriedade não se verifica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \neq \frac{1}{1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n} \right).$$

Em particular as séries divergentes são abordadas apenas como casos que devem ser descartados no estudo das séries. Esta interpretação permanece de forma natural no ensino de Cálculo na maior parte dos livros. A impressão dada é que não há sentido em estudar séries divergentes. No entanto, as séries divergentes não são mais um mero objeto de curiosidade matemática. Elas estão na base de diversos problemas em aberto na Matemática, como o a Hipótese de Riemann, atualmente um dos “Problemas do Milênio” (EDWARDS, 1974; HARDY, 1992). Muitas aplicações de física teórica utilizam séries divergentes. Estas séries aparecem desde teorias de renormalização (WEINBERG, 2005) até teorias mais modernas, como teoria de supercordas (POLCHINSKI, 2005). Nos dias de hoje engenheiros e outros profissionais estão se aproximando de áreas que antes pertenciam somente à Física, como a Mecânica Quântica e Relatividade Geral (MILLER, 2008). Em um futuro próximo as engenharias devem rumar para as teorias mais recentes, e precisarão de ferramentas matemáticas adequadas.

Com base nesta motivação apresentamos a proposta metodológica a seguir. Nesta proposta o estudante é apresentado não somente às progressões tradicionais do ensino médio, mas ao conceito de sequência e série. É apresentado também ao conceito de limite, que é utilizado de forma bastante intuitiva. Ao estudante é apresentada algumas das propriedades das séries. Por fim, trabalha-se o conceito de série divergente, a partir do emblemático caso $1 + 2 + 3 + 4 + \dots = -1/12$ e qual o seu significado.

2 Ensino de progressões no ensino médio

É importante comentar como os livros de Ensino Médio tradicionalmente tratam estes assuntos. Eles trazem a definição de que uma progressão aritmética (PA) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é a soma do termo anterior com uma constante. Alguns definem *PA finita* e *PA infinita* por meio de exemplos, porém sem uma definição formal. Na maioria, através da generalização dos primeiros termos, é obtida a fórmula do termo geral da PA. Menciona-se que, a partir de casos particulares, pode-se formular a hipótese de indução, e comprovar que a fórmula é válida. Porém o método em si não é explicado, assim como sua demonstração. Os livros mostram uma demonstração para a fórmula da soma dos n primeiros termos (soma parcial) de uma PA. Por falta de pré-requisito, não se utiliza o método da indução. Nenhum dos livros pesquisados comentam sobre o que ocorre quando são somados infinitos termos de uma progressão aritmética.

Sobre progressões geométricas, os livros trazem a definição de que uma progressão geométrica (PG) é uma sequência de números reais em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do termo anterior por uma constante. Novamente cita-se PG finita e PG infinita por meio de exemplos, sem definição formal. Através da generalização dos primeiros termos, é obtida a fórmula do termo geral da PG. Com relação à soma dos n primeiros termos de uma PG, nem todos os livros trazem a demonstração da fórmula, nem comentam o que ocorre quando a razão for 1. Outros, apesar de apresentar uma demonstração, não utilizam o método da indução. Já para obter a fórmula da soma dos termos de uma PG infinita, quando a razão estiver entre -1 e 1, a maioria dos autores partem da fórmula da soma dos n primeiros termos de uma PG e usam uma noção intuitiva de limite. Muitos autores não comentam o que ocorre quando a razão não estiver entre -1 e 1. Em alguns apenas existe menção ao conceito de série. Trazem também que quando a razão estiver entre -1 e 1, a série é convergente e quando for menor ou igual a -1 ou maior ou igual 1, ela é divergente e mencionam que somente as séries convergentes têm soma finita. Nada mais é dito sobre as séries divergentes.

Quanto às aplicações, é raro encontrar a relação da PA com a função afim e da PG com função exponencial. Em nenhum dos livros pesquisados existia a relação das progressões com juros simples ou compostos.

O estudo das progressões do Ensino Médio pode ser complementado introduzindo uma linguagem um pouco mais formal e introduzindo o conceito de séries divergentes. A única ferramenta necessária neste caso seria uma noção intuitiva de limite, a qual eles já tem contato no estudo da soma infinita da PG. Este estudo pode fornecer um fechamento do conteúdo, fornecendo um método de tratar a soma infinita de uma PA.

3 Inserindo sequências e séries

3.1 Sequências

Diversos autores de livros de Cálculo e Análise (GUIDORIZZI, 1987; LIMA, 1997) diferem ligeiramente com relação à definição de sequência. A maioria afirma, basicamente, que uma *sequência* ou *sucessão* de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais. De fato, para se definir precisamente sequência, é necessário dizer que ela é uma função. Porém, há uma divergência com relação ao domínio dessa função. Em (LIMA, 1997), por exemplo, o domínio é o próprio conjunto dos números naturais. Já em (GUIDORIZZI, 1987), ele é um subconjunto dos números

naturais. Nesse último caso, as “sequências finitas” também são consideradas sequências. Esta é uma definição útil no caso do Ensino Médio, em que sequências finitas são as que são estudadas de maneira mais aprofundada. A definição a ser utilizada é a seguinte:

Definição 1 (GUIDORIZI, 1987) *Uma sequência ou sucessão de números reais é uma função $n \mapsto a_n$, a valores reais, cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$.*

Esta definição é bastante natural aos estudantes de Ensino Médio, que já estudaram o conceito de função. A inserção (ou não) do zero no conjunto $\mathbb{N}$ não prejudica o conceito de sequência. A notação a_n é usada para indicar o valor que a sequência assume no natural n . Diz-se que a_n é o *termo geral* da sequência e n é referido como *índice*. A sequência é denotada por $\{a_n\}$.

É importante deixar claro ao estudante a diferença entre uma sequência $\{a_n\}$ e o conjunto $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ dos seus termos. No conjunto, além de não existirem elementos repetidos, não importa a ordem em que esses elementos estão inseridos. Por exemplo, a sequência $(1, 1, \dots, 1, \dots)$ não é o mesmo que o conjunto $\{1\}$. As sequências $(0, 1, 0, 1, \dots)$ e $(0, 0, 1, 0, 0, 1, \dots)$ são diferentes, embora o conjunto dos seus termos seja o mesmo, igual a $\{0, 1\}$.

Um conceito central para o estudo das sequências infinitas é o de *limite*:

Definição 2 (GUIDORIZI, 1987) *Consideremos uma sequência de termo geral a_n e seja L um número real. Definimos:*

- (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $a_n > \varepsilon$.
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$, existe um número natural n_0 tal que para todo $n > n_0$ temos $a_n < -\varepsilon$.

Para um estudante do Ensino Médio a definição acima pode parecer bastante abstrata. O professor pode preferir não abordar este conceito com os estudantes, o que é possível. No entanto, a discussão do conceito de limite, mesmo de maneira intuitiva e através de exemplos, é capaz de enriquecer a discussão posterior sobre convergência, sendo necessária para fornecer o formalismo necessário.

Por exemplo, no caso (i) se os termos de uma sequência a_n aproximam-se de um número fixo L tanto quanto desejado conforme n se torne suficientemente grande, temos que L é o limite da sequência, e escrevemos $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$. Nesse caso diz-se que a sequência a_n *converge para L* e a sequência é dita *convergente*. Um exemplo é a sequência $a_n = 1/n$, que, conforme n se torna grande, os termos ficam cada vez mais próximos de 0.

Uma sequência que não é convergente é denotada *divergente*. Isso ocorre no caso (ii), quando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ (a sequência diverge para infinito), e no caso (iii), quando $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ (a sequência diverge para menos infinito). Exemplos destes dois casos são as sequências $a_n = \pm n$, que crescem (decrecem) indefinidamente.

A sequência ainda pode ser divergente, mas sem crescer ou decrescer indefinidamente. Um exemplo desse último caso é a sequência $a_n = (-1)^n$, na qual os termos oscilam entre -1 (n ímpar) e 1 (n par).

Neste contexto, uma progressão aritmética é uma sequência $\{a_n\}$ cujos termos são dados por $a_n = a_0 + nr$. É fácil se convencer que temos somente três casos: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ se $r = 0$; (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se $r > 0$ e (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ se $r < 0$. Portanto, a progressão aritmética (infinita) diverge ao menos que a razão aritmética seja nula. Por sua vez, uma progressão geométrica é uma sequência $\{a_n\}$ cujos termos são dados por $a_n = a_0 \cdot q^n$. Temos agora três casos: (i) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a_0$ se $q = 1$; (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ se $|q| < 1$; (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ se $q > 1$. No caso em que $r \leq -1$ não existe limite.

3.2 Séries

A partir do conceito de sequência é possível construir o conceito de *série*, que corresponde à soma (infinita) dos termos de uma sequência:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n. \quad (1)$$

A questão reside em estabelecer um valor numérico para esta soma infinita. Neste caso é conveniente analisar as *somas parciais*:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_k, \quad (2)$$

que são números correspondentes a soma (finita) dos n primeiros termos da série. Estes números formam uma sequência, que podemos analisar quanto a sua convergência. Se a sequência das somas parciais for convergente, podemos atribuir como a *soma* desta série o limite desta sequência:

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n. \quad (3)$$

Em geral a análise das séries numéricas passa pela verificação se elas são convergentes ou não. Para esta análise o seguinte teorema mostra-se bastante útil:

Teorema 3 (GUIDORIZI, 1987) *Dada a série $\sum a_n$, uma condição necessária para a sua convergência é que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada na maioria dos livros de cálculo (GUIDORIZI, 1987). Este conceito é bastante intuitivo aos alunos, pois é simplesmente a afirmação que, se os termos somados não ficarem cada vez menores, a soma crescerá sem limites. É importante notar que a condição $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ não garante a convergência da série. De fato, existem séries que obedecem a esta condição mas não são convergentes. Caso a série não seja convergente, ela é dita *divergente*.

No caso de uma série aritmética

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_0 + nr)$$

a convergência ocorre apenas no caso trivial $a_0 = 0, r = 0$. Para todos os outros casos a série diverge, crescendo ou decrescendo indefinidamente. É fácil verificar que isto ocorre pois o único caso em que a condição necessária $a_n \rightarrow 0$ é satisfeita é justamente este caso trivial. Portanto,

sem as ferramentas necessárias para estudar séries divergentes o estudo das somas de progressões geométricas fica restrita somente às progressões finitas, em que pode se efetuar a soma.

Para uma série geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot q^n,$$

à parte do caso trivial $a_0 = 0$ (convergente, pois todos os termos são nulos) a convergência dependerá exclusivamente da razão geométrica q . Supondo $a_0 \neq 0$, se $|q| \geq 1$ pelo Teorema 3 a série deve ser divergente, pois $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$. Caso $|q| < 1$ a convergência é demonstrada através do limite das somas parciais:

$$s_n = \sum_{k=0}^n a_0 q^k = a_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}, \quad (4)$$

que, para $|q| < 1$ resulta, no limite $n \rightarrow \infty$,

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a_0}{1 - q}. \quad (5)$$

Neste caso ainda é possível explorar o conceito de série analisando a soma de uma progressão geométrica infinita. Ainda assim permanecem triviais os casos divergentes através da análise do termo geral. Abordar o Teorema 3 apenas para estes dois tipos de série pode fazer com que o estudante possa pensar que a condição apresentada é *suficiente*, uma armadilha a ser evitada. Uma possível abordagem seria introduzir outros exemplos de séries, como a série harmônica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n},$$

que é facilmente compreensível como a soma dos recíprocos de uma progressão aritmética. Neste caso temos que a condição necessária do Teorema 3 é satisfeita:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

porém a série diverge. Alguns exemplos numéricos podem convencer os estudantes de que a série de fato diverge, e a demonstração também está ao alcance da compreensão dos estudantes. O ponto chave é mostrar aos alunos que a análise da convergência das séries não é trivial podendo muitas vezes ir além da análise do limite do termo geral.

4 Métodos de soma para séries divergentes

No caso de uma série divergente não é possível atribuir um valor numérico através do cálculo do limite das somas parciais, dado que este não existe. Porém, é possível atribuir valores numéricos a estas séries de forma a estender o conceito de soma. Este procedimento é chamado *método de soma*.

Este procedimento deve obedecer a alguns critérios para que seja considerado um método útil. O primeiro critério é a *regularidade*. Segundo este critério, se a série é convergente, a soma atribuída deve coincidir com o valor atribuído a partir do limite das somas parciais. Esta propriedade é importante se desejarmos que o método permaneça significativo no âmbito das séries convergentes.

O segundo critério é a *linearidade*. Este critério é bastante natural, e segue da propriedade da soma. Segundo este critério, fazendo a adição de duas séries convergentes, a soma desta série resultante deve ser igual à adição das duas somas. Além disso, se multiplicarmos uma série convergente por um número, a soma desta nova série deve ser igual à multiplicação da soma da série original por este número.

Finalmente, um terceiro critério é a *estabilidade*, ou *translatividade*. Segundo este critério, a série obtida ao retirar o primeiro termo da série possui uma soma atribuída se e somente se a soma original tiver, e a diferença entre a soma original e a nova soma é justamente o primeiro termo. Este critério é o menos importante, podendo falhar em alguns métodos significativos, como a Soma de Borel.

Existem diversos métodos de soma que satisfazem estes critérios. Eles possuem diferentes aplicações a depender do contexto em que são definidas. Dois métodos são chamados *consistentes* se fornecem a mesma soma para todas as séries que ambas atribuem um valor. Neste trabalho, não iremos estudar todos os métodos. Como critério complementar abordaremos a necessidade que o método de soma seja simples o suficiente para que um estudante do Ensino Médio possa entender o método e aplicá-lo a alguns casos simples.

Vamos estudar o Método de Cesàro (HARDY, 1992), que utiliza um conceito bastante simples. Dada uma série $\sum a_n$, e a sequência das somas parciais, s_n uma série divergente é dita *somável* por Cesàro se existe o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k, \quad (6)$$

a ideia por trás desta definição é fazer uma média das n primeiras somas parciais da série, e depois calcular o limite para $n \rightarrow \infty$. O conceito de média é familiar aos estudantes do ensino médio, de forma que este método pode ser facilmente introduzido. É possível verificar que o método de Cesàro obedece aos três critérios expostos acima. Este método permite estabelecer um valor para a série

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 \dots \quad (7)$$

Neste caso, temos para as somas parciais:

$$s_n = \begin{cases} 1 & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (8)$$

Computando as médias, temos

$$\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n s_k = \begin{cases} 1/2 & n \text{ par} \\ \frac{n+2}{2(n+1)} & n \text{ ímpar.} \end{cases} \quad (9)$$

É fácil ver que o limite destas médias, quando $n \rightarrow \infty$, é $1/2$, que corresponde à soma de Cesàro.

Este método possui uma utilidade limitada no sentido que, se as somas parciais aumentam sem limite, o método não converge. Deste modo, o método não é útil para estabelecer um valor para a série

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots$$

Neste caso são precisos métodos de soma mais potentes, como o método da regularização da função zeta de Riemann ou a soma de Ramanujan (HARDY, 1992). Porém o estudante de ensino médio não possui a base necessária para compreender e aplicar tais métodos.

A soma $1 + 2 + 3 + 4 + \dots$ pode ser trabalhada de forma diferente. Com base nos critérios acima, e supondo a existência um método de soma adequado, podemos estabelecer qual deve ser o valor desta soma. Para isso vamos primeiramente trabalhar a série alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots$$

Supondo a consistência do método com a soma de Cesàro, e utilizando o resultado obtido para a sequência $1 - 1 + 1 - 1 \dots$ temos, denotando por S_a a soma da série alternada:

$$S_a = 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots$$

Podemos modificar esta sequência começando por zero e deslocando todos os demais termos de uma posição. Como estamos somando apenas um termo nulo, a soma deve ficar inalterada:

$$S_a = 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots$$

Ao somarmos a série alternada original com a série deslocada temos, então:

$$\begin{aligned} 2 \cdot S_a &= 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - 8 + \dots \\ &\quad 0 + 1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6 + 7 - \dots \\ &= 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \end{aligned}$$

Pela soma de Cesàro, esta última série possui soma $1/2$. Portanto, $S_a = 1/4$. Finalmente podemos tratar o caso $S = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots$. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} S - S_a &= +1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + \dots \\ &\quad -1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6 - 7 + 8 - \dots \\ &= +0 + 4 + 0 + 8 + 0 + 12 + 0 + 16 + \dots \\ &= 4 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + \dots) \\ &= 4S. \end{aligned}$$

Resolvendo esta equação utilizando $S_a = 1/4$ obtido anteriormente temos, finalmente, o valor $S = -1/12$. Este valor é surpreendente, dado que a série possui apenas termos positivos. Este é o mesmo valor obtido por métodos de soma mais potentes, tais como o método da função Zeta de Riemann. Este resultado está na base de casos especiais de fenômenos como o *Efeito Casimir*, que consiste na força atrativa na atração entre duas placas paralelas neutras e perfeitamente condutoras no vácuo, e teorias mais avançadas, como a Teoria de Supercordas.

5 Conclusões

Os conteúdos ensinados no Ensino Médio e Ensino Superior no Brasil precisam ser aproximados, para que a transição seja suave, e o estudante valorize os conhecimentos adquiridos

durante toda a sua formação. Para isso, é possível trazer alguns conteúdos do nível superior e contextualizá-los a um nível mais básico, consistente com as ferramentas teóricas que o estudante já possui. É possível fazer esta transição, tomando o cuidado de formalizar os passos, na medida do possível, e apresentar de forma correta os conceitos e limitações, de forma a não introduzir vícios na formação do estudante. O conteúdo de progressões é um exemplo claro de introdução às sequências e séries. O estudo destes conteúdos pode ser grandemente enriquecido através da introdução de algumas ferramentas teóricas mais avançadas e tópicos atuais. O domínio dos conceitos básicos apresentados pode facilitar a aprendizagem de conceitos mais avançados no ensino superior.

6 Referências bibliográficas

EDWARDS, H. M. **Riemann's eta function**. Mineola: Dover, 1974.

GIOVANNI, J. R.; BONJORNO, J. R.; GIOVANNI JÚNIOR, J. R. **Matemática fundamental: uma nova abordagem**. São Paulo: FTD, 2002.

GUIDORIZZI, H. L. **Um curso de cálculo**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1987. v. 1.

HARDY, G. H. **Divergent series**. 3. ed. Sceaux: Jacques Gabay, 1992.

IEZZI, G. et al. **Matemática**. 6. ed. São Paulo: Atual, 2015.

LIMA, E. L. **Análise real**. 3. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 1997. v. 1.

MILLER, D. A. B. **Quantum mechanics for scientists and engineers**. Cambridge: Cambridge University Press, 2008.

POLCHINSKI, J. **String theory**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 1.

SILVA, C. X. da; BARRETO FILHO, B. **Toda matemática: 196 exercícios resolvidos, 581 exercícios propostos, 127 questões de vestibular**. 7. ed. São Paulo: Ática, 1997.

WEINBERG, S. **The quantum theory of fields**. Cambridge: Cambridge University Press, 2005. v. 1.