**Revista Eletrônica
Paulista de Matemática**

ISSN 2316-9664
Volume 11, dez. 2017
Edição Iniciação Científica

João Calixto Garcia

EEP-FUMEP, Piracicaba, SP;
FIT/UNIESP, Tietê, SP;
Colégio Gradual, Cerquilha,
SP; E. E. Pres. Arthur da Silva
Bernardes, Cerquilha, SP
klixg@yahoo.com.br.

Sobre o cálculo de taxas de desconto e de juro em transações comerciais

About calculating discount rates and interest rates on
commercial transactions

Resumo

Neste texto, fazemos uso de princípios básicos da Matemática Financeira para explorar duas situações comuns no comércio. Uma delas diz respeito ao cálculo da taxa mínima devida de desconto, ao optar pela compra à vista de uma mercadoria, oferecida com pagamento em parcelas, sem juro. A outra trata do cálculo da taxa de juro em um caso típico de financiamento, incluindo-se a reavaliação dessa taxa, em considerando fatores adicionais a que está sujeito. A abordagem proposta tem por finalidade tornar esse estudo didaticamente interessante. Assuntos da matemática básica, tais como soma de progressão geométrica e funções fundamentam essa abordagem. Não dispensamos o auxílio de algoritmos em calculadoras ou computadores, que permitem obter os resultados pretendidos mais diretamente, assim como realizar comparações com resultados alcançados por processos matemáticos então empregados.

Palavras-chave: Taxa de desconto. Taxa de juro. Financiamento. Progressão geométrica. Funções.

Abstract

In this text, we make use of basic principles of Financial Mathematics to explore two common situations in commerce. One of them concerns the calculation of the minimum discount rate, when opting for in cash purchase of a commodity, offered with payment in installments, without interest. The other treat the calculation of the interest rate in a typical case of financing, including the revaluation of this rate, considering additional factors to which it is subject. The proposed approach aims to make this study didactically interesting. Subjects of basic mathematics such as sum of geometric progression and functions sustain this approach. We do not go without the aid of algorithms in calculators or computers, which allow to obtain the desired results more directly, as well as to make comparisons with results reached by mathematical processes then employed.

Keywords: Discount rate. Interest rate. Financing. Geometric progression. Functions.

1 Introdução

Quando tratamos de Matemática Financeira na Educação, sobretudo a partir do Ensino Médio, há concepções e entraves importantes a se considerar, muitas vezes envolvidos em situações do cotidiano.

Uma noção fundamental própria desse tema é o estabelecimento de comparações entre quantias em dinheiro referidas a diferentes épocas. Com base nessa noção, a partir de situações exemplares, desenvolvemos expressões que fornecem a taxa de desconto a se exigir em virtude de uma compra à vista, bem como a taxa de juro em uma operação usual de financiamento. Nesse desenvolvimento, exploramos algebricamente e graficamente as relações entre as variáveis implicadas em cada contexto.

2 Preliminares

Recordemos um resultado essencial da matemática financeira: no regime de juros compostos à taxa i , uma quantia com valor atual A , depois de n períodos de tempo relativos a essa taxa, fica transformada no valor futuro $F = A \cdot (1 + i)^n$. Isso quer dizer que, por exemplo, sob uma taxa de 2% ao mês, pagar (ou receber) 500 reais hoje é equivalente a pagar (ou receber) $500 \cdot (1 + 0,02)^2 = 520,20$ reais daqui a dois meses. Outro exemplo: à taxa de 5% ao mês, optamos por um valor a receber de 640 reais hoje a 735 reais daqui a três meses, pois, ao “transportamos” 640 reais para três meses adiante, teríamos $640 \cdot 1,05^3 = 740,88 > 735$ reais (ou equivalentemente, ao “transportamos” 735 reais para a época atual, teríamos $735/1,05^3 \cong 635,92 < 640$ reais). Enfim, para comparar quantias, devemos referi-las à mesma época, multiplicando-se por $(1 + i)^n$ um valor atual para “levá-lo” para n períodos de tempo adiante, ou dividindo-se um valor futuro por esse fator, em caso contrário.

3 Estimando a taxa de desconto

Uma atividade interessante na escola, e que tem importante implicação no cotidiano, é obter a estimativa do desconto no preço de um produto que é concedido (ou pleiteado) quando se pretende realizar sua compra à vista, uma vez estabelecido seu preço sem desconto, em prestações.

Digamos que temos dinheiro o suficiente para a compra em qualquer das formas que nos é oferecido: a prazo, em certo número de prestações iguais, sem juro, e à vista, com determinado desconto sobre o preço que totalizam as prestações. A opção pela qual devemos decidir depende, então, do conhecimento da taxa desse desconto a que temos direito, aplicado no seu preço em parcelas.

Vamos partir de uma situação exemplar. Suponhamos que seja de 0,6% ao mês a taxa em que conseguimos investir nosso capital (tecnicamente denominada *taxa mínima de atratividade*). Consideremos que a venda de um produto se dê em 5 prestações mensais iguais a P reais (a primeira paga no ato da compra). Quanto, ao menos, nos cabe de desconto se desejarmos adquiri-lo mediante seu pagamento único e imediato?

Ora, comprando-se em 5 parcelas como descrito acima, vamos desembolsar, referindo-se à data da compra, uma quantia igual a:

$$P + \frac{P}{1,006} + \frac{P}{1,006^2} + \frac{P}{1,006^3} + \frac{P}{1,006^4} \cong 4,94P \text{ reais.}$$

Pagaríamos pelo produto $5P$ sem desconto. Com desconto, à taxa D , devemos então pagar $5P(1 - D)$ reais. Assim, a opção pela compra à vista com desconto é a indicada se, e só se:

$$5P(1 - D) < 4,94P, \text{ isto é, para } D > 0,0119 = 1,19\%.$$

No caso geral, para um produto sendo vendido em n parcelas mensais iguais a P (a primeira no ato da compra) sob uma taxa mínima de atratividade i , mensal, a compra à vista só é vantajosa se for oferecido um desconto de taxa D , de modo que:

$$n P(1 - D) < P + \frac{P}{1+i} + \frac{P}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{P}{(1+i)^{n-1}}.$$

Observando que o segundo membro da inequação é a soma de n termos de uma P.G., fazendo-se os cálculos necessários, obtemos:

$$D > 1 - \frac{(1+i)^n - 1}{n \cdot i \cdot (1+i)^{n-1}}.$$

A tabela seguinte apresenta, para diversos valores de n , a taxa de desconto no preço de um produto, com a referida entrada, a partir da qual a compra à vista é mais conveniente.

$n \backslash i$	0,5%	1%	1,5%	2%	$n \backslash i$	0,5%	1%	1,5%	2%
3	0,5%	1,0%	1,5%	1,9%	10	2,2%	4,3%	6,4%	8,4%
4	0,7%	1,5%	2,2%	2,9%	11	2,5%	4,8%	7,1%	9,2%
5	1,0%	2,0%	2,9%	3,8%	12	2,7%	5,3%	7,7%	10,1%
6	1,2%	2,4%	3,6%	4,8%	18	4,1%	8,0%	11,6%	15,0%
7	1,5%	2,9%	4,3%	5,7%	24	5,5%	10,6%	15,3%	19,6%
8	1,7%	3,4%	5,0%	6,6%	36	8,2%	15,5%	22,0%	27,8%
9	2,0%	3,9%	5,7%	7,5%	48	10,8%	20,1%	28,0%	34,8%

Percebe-se na tabela acima, que, quanto maior o número n de prestações proposto na compra de um produto, ou, quanto maior a taxa mínima de atratividade i , maior é o desconto mínimo que se deve exigir ao se optar por uma compra à vista. Isso porque, em qualquer uma das variáveis $i > 0$ ou $n > 0$, natural, é estritamente crescente a função D dada por:

$$D(i, n) = 1 - \frac{(1+i)^n - 1}{n \cdot i \cdot (1+i)^{n-1}}.$$

De fato, as derivadas $\frac{\partial D}{\partial i}(i, n) = \frac{1 - \frac{n \cdot i + 1}{(1+i)^n}}{n \cdot i^2}$ e $\frac{\partial D}{\partial n}(i, n) = \frac{(1+i)}{i \cdot n^2} \left(1 - \frac{1 + \ln(1+i) \cdot n}{(1+i)^n} \right)$ são

positivas. A primeira, devido $(1+i)^n > ni + 1$, decorrente da desigualdade de Bernoulli. A segunda, porque $(1+i)^n > 1 + \ln(1+i)^n$, já que $y > 1 + \ln y$, para $y > 0$ e $y \neq 1$.

Além disso, não é difícil concluir que: $\lim_{n \rightarrow \infty} D(i, n) = 1$ e $\lim_{i \rightarrow \infty} D(i, n) = 1 - \frac{1}{n}$. Assim, por exemplo, para a compra de um produto oferecido em 4 parcelas iguais, a taxa de desconto a se requerer limita-se a 75%, no caso de opção por pagamento integral no ato da compra.

Sob taxa mínima mensal de atratividade i , é indiferente, enfim, a compra de um produto oferecido em n parcelas mensais iguais (a primeira a se pagar no ato da compra), à vista com um desconto de taxa d , se:

$$d = 1 - \frac{(1+i)^n - 1}{n \cdot i \cdot (1+i)^{n-1}}.$$

Às vezes, no comércio, concede-se um desconto menor do que d , com possibilidade de pagamento em parcelas, no entanto, em número menor do que o plano originalmente proposto. Cabe-nos determinar, a partir do desconto ofertado, o número de prestações a partir do qual se torna interessante ao comprador essa nova opção de pagamento.

Sendo fixas a taxa i e a taxa δ , do referido desconto ofertado, e considerando a função d com domínio $\{x \in \mathbb{R} / x \geq 1\}$, devemos, portanto, ter:

$$\delta < d(x) = 1 - \frac{(1+i)^x - 1}{x \cdot i \cdot (1+i)^{x-1}}, \text{ para todo } x \text{ desse domínio.}$$

Decorrente da desigualdade generalizada de Bernoulli, de modo inteiramente análogo ao anteriormente feito, verifica-se que se trata de uma função estritamente crescente. Como d é contínua, $d(1) = 0$ e $\delta > 0$, existe $x_0 > 1$ tal que $d(x_0) = \delta$. O menor inteiro, maior do que x_0 é o número de parcelas a partir do qual é mais vantajoso realizar a negociação.

Vamos a um exemplo. Suponhamos que a taxa mínima de atratividade seja $i = 2\%$ e que um bem seja oferecido em 12 prestações mensais iguais, com entrada. O desconto D a se oferecer para que sua aquisição à vista seja recomendável deve ser maior do que $d(12)$, isto é:

$$D > 1 - \frac{1,02^{12} - 1}{12 \cdot 0,02 \cdot 1,02^{11}} = 10,1\%.$$

Digamos que esse bem seja oferecido com desconto de 6% no preço a prazo, havendo possibilidade de negociar o número de parcelas para o seu pagamento. Nesse caso, o número mínimo de prestações a se pleitear é o menor inteiro, solução da inequação $0,06 < d(x)$, ou:

$$0,06 < 1 - \frac{1,02^x - 1}{x \cdot 0,02 \cdot 1,02^{x-1}}.$$

Nessa ocasião, pode-se contar com o auxílio de um *software* gráfico. É suficiente traçar os gráficos da função d e da função constante dada por $y = 0,06$, e obter a abscissa do ponto de intersecção entre eles, funcionalidade esta encontrada na maioria desses aplicativos, tais como no *Winplot* e no *Graphmatica*. Com isso, constatamos que $x > 7,34$.

A figura 1 ilustra parte dos gráficos das referidas funções.

Diante disso, verifica-se que é interessante ao comprador o pagamento do bem em, ao menos, 8 parcelas.

Observações:

a) Caso se trate de uma venda sem entrada (em n parcelas mensais iguais, a primeira paga um mês após a compra), cálculos semelhantes aos acima realizados conduzem a

$$D_s > 1 - \frac{(1+i)^n - 1}{n \cdot i \cdot (1+i)^n},$$

sendo que a função D_s , associada a essa sentença, apresenta a mesma monotonicidade da função D anteriormente estudada, tendo-se, neste caso, $\lim_{n \rightarrow \infty} D_s(i, n) = \lim_{i \rightarrow \infty} D_s(i, n) = 1$.

b) Descontos reais oferecidos acima do esperado não são raros e podem ter diversas finalidades. Promoções especiais tanto podem servir como chamariz de consumidores como podem sugerir necessidade de diminuição ou extinção de um estoque. Por outro lado, a prática de preço a prazo acima do normal induz invariavelmente um desconto expressivo nesse preço, em relação ao seu valor à vista. É uma maneira de impressionar o consumidor pela magnitude desse desconto e levá-lo a decidir pela compra à vista. Dentre outros, há o propósito de promover liquidez, minimizar problemas advindos de inadimplência e evitar custos adicionais inerentes à modalidade de pagamento em prestações. Também, a depender do valor da mercadoria, da situação financeira do consumidor e suas necessidades prementes, a compra por meio de um financiamento pode ser a opção indicada. Nesse caso, o juro que incide nessa operação é fator importante na aceitação de um negócio.

No item seguinte, tratamos da obtenção da taxa de juros nesse tipo de transação comercial, o qual, sujeito a certas condições, tem o valor declarado pelo vendedor diferente do valor efetivamente exercido.

4 Juros declarados e juros praticados

É comum recorrermos a um empréstimo para aquisição de um bem se não dispomos de capital suficiente para saldar seu valor à vista ou, até mesmo, a prazo. Esse expediente tem o financiamento como forma peculiar, em que os recursos, geralmente provenientes de uma instituição financeira, têm destinação acordada por um contrato. O valor financiado é normalmente pago em prestações, tornadas acessíveis ao comprador. Nessa operação comercial, em regra, existe incidência de juro.

Analisemos uma situação exemplar:

Considere um financiamento de 8.000 reais a ser pago em 6 parcelas mensais iguais, com entrada, à taxa mensal de juro de 1,5%. O valor financiado deve ser equivalente a uma série de 6 pagamentos mensais iguais a P . Fazendo referência à época do último pagamento, isso equivale a desembolsar $8.000 \cdot (1,015)^5$ reais, ou:

$$P \cdot (1,015)^5 + P \cdot (1,015)^4 + \dots + P = P \cdot \frac{1,015^6 - 1}{1,015 - 1} \cong 6,23P \text{ reais.}$$

De $8.000 \cdot (1,015)^5 \cong 6,23P$, se obtém $P \cong 1.383,45$ reais.

Se chamarmos de M , i e n o montante a ser financiado, a taxa de juro e o número de prestações, respectivamente, pondo $j = i + 1$, podemos genericamente assim escrever:

$$M \cdot j^{n-1} = P \frac{j^n - 1}{j - 1}, \text{ ou, } \frac{j^n - 1}{j^n - j^{n-1}} = \frac{M}{P}.$$

Com base no exemplo anterior, vamos explorar adiante dois custos que habitualmente estão envolvidos nessa transação e que podem provocar importantes interferências na taxa de juro.

Com a cobrança de, digamos, 1.000 reais da famigerada (e indevida) *Tarifa de Abertura de Crédito*, a *TAC*, o montante financiado passa a ser de 9.000 reais, 12,5% maior, assim como cada uma de suas prestações, que passa a 1.556,38 reais. Além disso, acrescentando-se a cada uma delas, digamos, 4 reais referentes à também indevida *TEC*, *Tarifa de Emissão de Carnê ou Boleto*, perfaremos 1.560,38 reais.

Com esse valor para cada parcela, é possível encontrar uma nova taxa de juro, associada a esse financiamento, resolvendo a equação:

$$\frac{j^6 - 1}{j^6 - j^5} = \frac{8000}{1.560,38} \cong 5,127.$$

Nessa ocasião, podemos optar por não lançar mão de recursos computacionais, que calculam essa taxa diretamente, sobretudo se essa situação for abordada na escola básica. Um caminho é sugerir aos alunos um meio de se obter o seu valor aproximado estudando tal equação. Para tanto, é interessante propor que investiguem a função $f(j) = \frac{j^6 - 1}{j^6 - j^5}$, conduzindo-os a constatar que $f(1,065) \cong 5,156$ e $f(1,070) \cong 5,100$. Com isso, podem concluir que o valor de j está compreendido entre 1,070 e 1,065, ou que a taxa de juro mensal

praticada está entre 6,5% e 7%. É oportuno ressaltar que se trata de uma taxa relativamente elevada, comparada à taxa declarada de 1,5%.

A partir daí, uma atividade didaticamente relevante nesse nível de ensino consiste em buscar maior precisão para essa taxa. Um dos recursos que permite essa possibilidade, do qual faremos uso a seguir, é o da interpolação linear.

Um parêntesis: se faz oportuno observar que, para cada n natural, com $n > 1$, a função g , dada por $g(j) = \frac{j^n - 1}{j^n - j^{n-1}}$, é decrescente. A derivada g' , dada por $g'(j) = \frac{n \cdot j - n - j^n + 1}{j^n \cdot (j-1)^2}$, é negativa, para $j > 1$. De fato, como $j = i + 1$, seu numerador, reescrito, é $n \cdot i + 1 - (i + 1)^n$, que é negativo, também em consequência da desigualdade de Bernoulli.

Efetuada-se o ajuste de uma linha reta aos dois pontos (1,065; 5,156) e (1,070; 5,100) do gráfico de f , por meio da semelhança entre os triângulos ABC e ADE que se observa na figura 2, tem-se $\frac{5,156 - 5,100}{1,070 - 1,065} = \frac{5,156 - 5,127}{j - 1,065}$, o que conduz a $j \cong 1,067$, daí, a juro real mensal de cerca de 6,7%.

figura 2

Ainda se tratando do ensino da escola básica, nessa oportunidade, é interessante que utilizem um *software* gráfico para verificar a precisão que se conseguiu por esse método. É suficiente traçar os gráficos de f e da função constante g , dada por $g(j) = 5,127$, e obter a abscissa do ponto de intersecção entre eles.

A seguir são apresentadas duas questões didaticamente proveitosas que exploram esse contexto:

a) É natural imaginar que o aumento do número de parcelas proporcione uma diluição dessas tarifas e um menor impacto na taxa real de juro. Realizando a mesma sequência de cálculos, vamos obter esta taxa considerando a situação estudada, agora, com $n = 12$.

Chega-se a 722,60 reais para cada parcela sem as tarifas, resolvendo a equação:

$$P \cdot \frac{1,015^{12} - 1}{1,015 - 1} = 8.000 \cdot (1,015)^{11}.$$

Incluindo-se a *TAC* de 1.000 reais, cada parcela aumenta em 12,5%. Acrescentando a *TEC* de 4 reais, totaliza-se 816,93 reais. Por fim, da equação:

$$\frac{j^{12} - 1}{j^{12} - j^{11}} = \frac{8000}{816,93} \cong 9,793.$$

chega-se ao juro real mensal de cerca de 3,9%. Como sugerido acima, a fim de minimizar o trabalho de obtenção da solução dessa equação, pode-se contar com o auxílio de um *software* gráfico, determinando a intersecção entre os gráficos da função f dada por $f(j) = \frac{j^{12} - 1}{j^{12} - j^{11}}$ e a função constante g , dada por $g(j) = 9,793$.

b) Uma situação não rara reside no trabalho de verificarmos em qual quantia consiste a *TAC* embutida num financiamento, a partir do anúncio de suas condições. Tomemos como exemplo um financiamento de 10.000 reais a ser pago em 18 parcelas mensais iguais a 713,53 reais em boleto, com entrada, à taxa mensal de juro declarada de 2%. Para uma *TEC* de 4 reais, temos prestações mensais corrigidas para 709,53 reais, que geram o montante financiado de $709,53 \cdot \frac{1,02^{18} - 1}{1,02^{18} - 1,02^{17}} \cong 10.850$ reais, o que evidencia cerca de 850 reais referentes à *TAC*.

5 Conclusão

Ao abdicarmos de recursos tecnológicos, muita matemática, sobretudo básica, se manifesta no estudo do tema em questão. Trata-se de uma ação educativa, que revela a importância de certos conteúdos do ensino a serviço do mundo financeiro.

Vimos que a fórmula que fornece o desconto que ao menos nos cabe, ao optarmos pela quitação do valor de um produto no ato de sua compra, depende apenas do número de parcelas em que o produto é oferecido a prazo e da taxa mínima de atratividade do mercado. Se dispendiosa for a sua utilização, a construção de uma planilha eletrônica, além de instrutiva, pode prestar-lhe um bom auxílio no momento da realização de um negócio.

Nos financiamentos, discutimos a influência de custos adicionais sobre a taxa de juro professada em uma negociação. Aliado a uma abordagem gráfica, o tratamento funcional para obtenção dessa taxa se mostrou providencial. E desse estudo foi possível entender: anúncios de financiamentos com taxas de juros irrisórias ou até mesmo nulas, em se operando com tarifas abusivas (muitas vezes ilegais) e por períodos relativamente curtos, mascaram taxas absurdamente altas.

6 Referências

GARCIA, J. C. **À vista com desconto ou a prazo sem juros?** Revista do Professor de Matemática, ano 8, n. 20, p. 23-24, 1992.

MORGADO, A. C.; WAGNER, E.; ZANI, S. C. **Progressões e matemática financeira**. 5. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005. (Coleção do Professor de Matemática).

Artigo recebido em jul. 2017 e aceito em set. 2017.