Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac
Iniciação Científica

Graziane Sales Teodoro
Universidade Federal de Lavras
graziane.teodoro@ufla.br

Edmundo Capelas de Oliveira
Universidade Estadual de
Campinas
capelas@ime.unicamp.br

Derivadas fracionárias: critérios para classificação

Fractional derivatives: criteria for classification

Resumo

O cálculo fracionário tem se mostrado importante e, em muitos casos, imprescindível na discussão de problemas de diversas áreas da ciência, ganhando popularidade e importância consideráveis durante as últimas três décadas. Existe mais de uma formulação para a derivada fracionária e esse número de definições vem aumentando, sendo cada uma delas mais adequada a um contexto físico. No entanto, alguns questionamentos surgem naturalmente: 1) Todas essas derivadas realmente podem ser consideradas derivadas fracionárias? 2) Quais propriedades essas devem satisfazer para serem classificadas como tal? Caminhando nessa direção, em 1974, Ross propôs um critério, composto por cinco propriedades, que um operador deve satisfazer para que este possa ser chamado de derivada fracionária. Em 2015, Ortigueira e Machado reformularam esse critério tendo em vista a necessidade de uma derivada fracionária satisfazer a generalização da regra de Leibniz. A fim de exemplificar um operador que satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado, apresentamos a derivada de Riemann-Liouville.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário. Critérios. Derivada de Riemann-Liouville.

Abstract

Fractional calculus has been proved important and, in many cases, it is essential for discussing problems in various areas of science. The subject of fractional calculus has gained considerable popularity and importance during the past three decades. There is more than one formulation for the fractional derivative and the number of definitions is increasing, each one being more suited to a physical context. However, questions that arise naturally are: 1) Could all these derivatives be considered fractional derivatives? and 2) Which properties they must satisfy to be classified as fractional derivatives? Going in this direction, Ross in 1974, proposed a criterion, composed of the five properties, that an operator must satisfy to be considered a fractional derivative. Ortigueira and Machado in 2015 reformulated this criterion due to the necessity of a fractional derivative to satisfy the generalization of the Leibniz rule. In order to exemplify an operator that satisfies the criterion proposed by Ortigueira and Machado, we showed the Riemann-Liouville derivative.

Keywords: Fractional Calculus. Criteria. Riemann-Liouville Derivative.

1 Introdução

Em 1695, numa famosa carta, l'Hôpital pergunta a Leibniz o significado de uma derivada de ordem meio, com a resposta de Leibniz, temos o início do cálculo fracionário. A partir de então, o cálculo fracionário chamou a atenção de outros importantes matemáticos, tais como, Euler, Laplace, Fourier, Abel, Liouville, Riemann, Laurent entre outros. Devido as contribuições destes e de outros matemáticos, a teoria de operadores generalizados atingiu um nível de formalismo suficiente para dar início aos estudos mais modernos (CAMARGO, 2009). O cálculo fracionário tem se mostrado importante na discussão de problemas advindos de diversas áreas do conhecimento. Uma vantagem de sua utilização em aplicações é a sua propriedade não-local, ou seja, o próximo estado de um sistema não depende apenas de seu estado atual, mas sim de todos os seus estados anteriores, traduzindo assim melhor a realidade da natureza.

O cálculo fracionário vem ganhando popularidade e importância considerável nas últimas três décadas devido principalmente a suas aplicações atraentes em campos da ciência e engenharia (SCHERER et al, 2011). Há um grande número de formulações para derivada fracionária (OLIVEIRA; MACHADO, 2014) e esse número vem aumentando (RODRIGUES; OLIVEIRA, 2015). Com isso nos deparamos com a seguinte questão: Que critérios um operador deve satisfazer para que este possa ser considerado uma derivada fracionária?

A fim de responder esse questionamento Ross (ROSS, 1975) propõe cinco propriedades que um operador deve satisfazer para poder ser considerado uma derivada fracionária, são elas:

1. A derivada fracionária de uma função analítica é analítica;
2. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo n , $n \in \mathbb{N}$, deve produzir o mesmo resultado da n -ésima derivação ordinária e quando a ordem é um inteiro negativo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ deve produzir o mesmo resultado da repetição n -ésima da integração ordinária;
3. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função;
4. A derivada fracionária é um operador linear;
5. A lei dos expoentes $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$ é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$. (Usaremos a notação D^α para representar uma derivada fracionária de ordem α).

Ortigueira e Machado reformularam o critério proposto por Ross tendo em vista a necessidade da derivada fracionária do produto de duas funções satisfazer a regra de Leibniz em sua versão fracionária (ORTIGUEIRA; MACHADO, 2015). Esse novo critério também é constituído de cinco propriedades, são elas:

1. A derivada fracionária é um operador linear;
2. A derivada de ordem zero de uma função é a própria função;
3. A derivação fracionária, quando a ordem é um inteiro positivo n , $n \in \mathbb{N}$, deve produzir o mesmo resultado da n -ésima derivação ordinária e quando a ordem é um inteiro negativo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ deve produzir o mesmo resultado da repetição n -ésima da integração ordinária;
4. A lei dos expoentes $D^\alpha D^\beta f(x) = D^{\alpha+\beta} f(x)$ é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$;

5. Vale a generalização da regra de Leibniz, a saber, $D^\alpha(f(x)g(x)) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} D^k f(x) D^{\alpha-k} g(x)$,
sendo $\binom{\alpha}{k} = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)k!}$.

Um exemplo de operador que satisfaz as cinco propriedades do critério de Ortigueira e Machado é a derivada de Grünwald-Letnikov.

Definição 1 A derivada de Grünwald-Letnikov de ordem α de uma função f é definida através do limite de uma série, a saber,

$$D^\alpha f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f(x - kh).$$

Os autores apresentaram essa derivada bem como mostraram que esta satisfaz tais critérios (TEODORO; OLIVEIRA, 2017). Essa formulação tem grande importância em problemas numéricos (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015) e está baseada na generalização da diferenciação ordinária.

Na próxima seção apresentaremos a derivada fracionária de Riemann-Liouville bem como mostraremos que ela satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

2 Derivada de Riemann-Liouville

A derivada fracionária de Riemann-Liouville é definida através de uma derivada de ordem inteira de uma integral fracionária, sendo assim introduzimos, primeiro, a definição de integral fracionária.

Definição 2 A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem α de uma função f causal é dada por,

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau, \quad (1)$$

sendo $\text{Re}(\alpha) > 0$, $t > 0$ e $J^0 = I$, sendo I o operador identidade.

Podemos escrever a integral fracionária, Eq.(1), como um produto de convolução das funções f e ϕ_α , denotado por $*$, sendo a função ϕ_α conhecida como função Gel'fand-Shilov e dada por

$$\phi_\alpha(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \text{se } t > 0, \\ 0, & \text{se } t \leq 0. \end{cases}$$

Portanto, podemos escrever

$$J^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau = \phi_\alpha(t) * f(t).$$

Apresentamos agora a definição da derivada fracionária de Riemann-Liouville.

Definição 3 Sejam α um número complexo tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$ e m o menor inteiro maior que $\text{Re}(\alpha)$, assim $m - 1 < \text{Re}(\alpha) \leq m$. A derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de uma função causal e suficientemente bem comportada f é dada por,

$$D^\alpha f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau. \quad (2)$$

Mostraremos que a derivada de Riemann-Liouville, conforme definida pela Eq.(2) satisfaz o critério proposto por Ortigueira e Machado.

Linearidade. Sejam f e g funções reais de variável real, a e b escalares e $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\text{Re}(\alpha) > 0$. Assim, para $m - 1 < \text{Re}(\alpha) \leq m$, temos

$$\begin{aligned} D^\alpha (af + bg)(t) &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{(af + bg)(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \left[a \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + b \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \right] \\ &= \frac{a}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau + \frac{b}{\Gamma(m-\alpha)} \frac{d^m}{dt^m} \int_0^t \frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha-m+1}} d\tau \\ &= aD^\alpha f(t) + bD^\alpha g(t), \end{aligned}$$

portanto a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville é um operador linear.

Derivada de ordem zero. Vamos calcular a derivada de Riemann-Liouville de ordem zero de uma função f , assim para $\alpha = 0$ temos, $D^0 f(t) = D^0 J^0 f(t) = f(t)$, ou seja, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem zero de uma função é a própria função.

Derivada de ordem inteira. Para $\alpha = m$ sendo m inteiro positivo, temos,

$$D^m f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^{m-m} f(t) = \frac{d^m}{dt^m} J^0 f(t) = \frac{d^m}{dt^m} f(t).$$

Portanto, a derivada fracionária segundo Riemann-Liouville de ordem m , sendo m um inteiro positivo é igual a m -ésima derivada ordinária. Tomemos agora $\alpha = -m$ sendo m inteiro positivo, assim

$$D^{-m} f(t) = J^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{m-1} d\tau$$

essa integral é a fórmula integral de Cauchy, portanto D^{-m} representa a m -ésima integral, ou seja,

$$D^{-m} f(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_{m-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{m-1}.$$

Logo, a derivada fracionária de Riemann-Liouville recupera o caso inteiro.

Lei dos expoentes. Uma derivada fracionária cuja a ordem α é menor que zero, pode ser interpretada como uma integral fracionária. Portanto, mostrar que a derivada segundo Riemann-Liouville satisfaz à lei dos expoentes, $D^\alpha D^\beta = D^{\alpha+\beta}$ para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$ é o mesmo que mostrar que $J^\alpha J^\beta = J^{\alpha+\beta}$, para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$.

Observemos que a função ϕ_α satisfaz a propriedade, $\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \phi_{\alpha+\beta}(t)$, sendo $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato, pelo produto de convolução de Fourier temos,

$$(\phi_\alpha * \phi_\beta)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_\alpha(\tau) \phi_\beta(t - \tau) d\tau. \quad (3)$$

Observemos que

$$\phi_\alpha(\tau) = \begin{cases} \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}, & \tau > 0; \\ 0, & \tau < 0. \end{cases} \quad \phi_\beta(t - \tau) = \begin{cases} \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}, & \tau < t; \\ 0, & \tau > t. \end{cases}$$

O produto $\phi_\alpha(\tau) \phi_\beta(t - \tau)$ só será diferente de zero para $0 < \tau < t$. Assim pela Eq.(3) temos,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau, & 0 < \tau < t; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Através da função beta, a saber, $B(p, q) = \int_0^1 u^{p-1} (1 - u)^{q-1} du$, e de sua relação com a função gama, $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, temos,

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} (t - \tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \frac{t^{\beta-1}}{t^{\beta-1}} (t - \tau)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} t^{\beta-1} \left(\frac{1}{t} (t - \tau) \right)^{\beta-1} d\tau \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} t^{\beta-1} \left(1 - \frac{\tau}{t} \right)^{\beta-1} d\tau. \end{aligned} \quad (4)$$

Introduzindo a mudança de variável $u = \frac{\tau}{t}$ na Eq.(4), temos

$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\tau^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(t - \tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} d\tau &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (ut)^{\alpha-1} t^{\beta-1} (1 - u)^{\beta-1} t du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^1 (u)^{\alpha-1} (1 - u)^{\beta-1} du \\ &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} B(\alpha, \beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)} \\
 &= \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t) = \begin{cases} \frac{t^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}, & t > 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} = \phi_{\alpha+\beta}(t),$$

Por fim, mostraremos que $J^\alpha J^\beta f(t) = J^{\alpha+\beta} f(t)$, para qualquer função f e para $\alpha > 0$ e $\beta > 0$. De fato,

$$\begin{aligned}
 J^\alpha J^\beta f(t) &= J^\alpha(\phi_\beta(t) * f(t)) \\
 &= \phi_\alpha(t) * (\phi_\beta(t) * f(t)) \\
 &= (\phi_\alpha(t) * \phi_\beta(t)) * f(t) \\
 &= \phi_{\alpha+\beta}(t) * f(t) \\
 &= J^{\alpha+\beta} f(t).
 \end{aligned}$$

E, portanto, a lei dos expoentes é satisfeita para $\alpha < 0$ e $\beta < 0$.

Generalização da regra de Leibniz. Para mostrarmos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz iremos primeiro considerar o seguinte resultado:

Lema 4 *A derivada fracionária de Riemann-Liouville de ordem $\alpha \in \mathbb{C}$ de uma função analítica f possui a propriedade,*

$$D^\alpha f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t) t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \binom{\alpha}{n}. \quad (5)$$

Demonstração. Vamos primeiro considerar $Re(\alpha) < 0$, então $D^\alpha = J^{-\alpha}$ sendo $J^{-\alpha}$ a integral fracionária de Riemann-Liouville, conforme **Definição 2**, seja $\beta = -\alpha$. Assim,

$$D^\alpha f(t) = J^{-\alpha} f(t) = J^\beta f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{\beta-1} d\tau.$$

Sendo f uma função analítica, temos $f(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t) (\tau-t)^n}{n!}$. E, portanto, podemos escrever,

$$D^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\beta}} d\tau \quad (6)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(\tau-t)^n(t-\tau)^{\beta-1}}{n!} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \int_0^t (t-\tau)^{\beta-1+n} d\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \left[\frac{-(t-\tau)^{\beta+n}}{\beta+n} \right]_0^t \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\beta+n}}{\beta+n} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\beta+n}}{\beta+n} \frac{\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n)} \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)(-1)^n}{n!} \frac{t^{\beta+n}\Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta+n+1)}.
\end{aligned}$$

Agora observemos que

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{(-1)^n \Gamma(n+\beta)}{n! \Gamma(\beta)}. \quad (7)$$

Para mostrarmos a Eq.(7) precisaremos da seguinte equação $\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$, conhecida como fórmula de reflexão de Euler. Assim,

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(1-\beta-n)n!} = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)\Gamma(\beta)(-\beta-n)\Gamma(-\beta-n)n!} = \frac{\pi}{\sin(\pi\beta)\Gamma(\beta)\Gamma(-\beta-n+1)n!}.$$

Por outro lado,

$$\Gamma(-\beta-n)\Gamma(1-\beta-n) = \frac{\pi}{\sin(-\pi(\beta+n))} = \frac{-\pi}{\sin(\beta\pi)(-1)^n}.$$

Assim, obtemos

$$\binom{-\beta}{n} = \frac{-\pi\Gamma(1+\beta+n)(-1)^n \sin(\beta\pi)}{\sin(\pi\beta)\Gamma(\beta)(-\beta-n)n!\pi} = \frac{(-1)^n \Gamma(\beta+n)}{\Gamma(\beta)n!},$$

portanto vale a Eq.(7). Pelas Eq.(6) e Eq.(7) podemos escrever

$$\begin{aligned}
D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)t^{n+\beta}}{\Gamma(n+\beta+1)} \binom{-\beta}{n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t)t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \binom{\alpha}{n},
\end{aligned}$$

logo, vale a Eq.(5) para $Re(\alpha) < 0$. Mostraremos agora que vale a Eq.(5) para $Re(\alpha) > 0$. Assim para $m - 1 < Re(\alpha) \leq m$ e usando o fato de valer a Eq.(5) para $Re(\alpha) < 0$, temos

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \frac{d^m}{dt^m} J^{m-\alpha} f(t) \\ &= \frac{d^m}{dt^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(t) t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)} \binom{\alpha-m}{n}. \end{aligned}$$

Considerando que essa série converge uniformemente e utilizando a regra de Leibniz para o caso inteiro podemos escrever,

$$\begin{aligned} D^\alpha f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{f^{(n+k)}(t) \frac{d^{m-k}}{dt^{m-k}} t^{n+m-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)} \binom{\alpha-m}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} \frac{f^{(n+k)}(t) \frac{\Gamma(n+m-\alpha+1)}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+m-\alpha+1)} \binom{\alpha-m}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m}{k} f^{(n+k)}(t) \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} \binom{\alpha-m}{n} \end{aligned}$$

Introduzindo a mudança de índices $k \rightarrow j - n$ temos,

$$D^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{j-n} \binom{\alpha-m}{n} f^{(j)}(t) \frac{t^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}$$

Utilizando a relação (ORTIGUEIRA, 2011):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{m-n} \binom{\beta}{n} = \binom{\alpha+\beta}{m},$$

segue

$$D^\alpha f(t) = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{\alpha}{j} f^{(j)}(t) \frac{t^{j-\alpha}}{\Gamma(j-\alpha+1)}.$$

Portanto, vale a Eq.(5) para todo $\alpha \in \mathbb{C}$, como queríamos mostrar. ■

Utilizando o **Lema 4** e considerando f e g funções analíticas temos, pela Eq.(5),

$$D^\alpha (fg)(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(fg)^{(n)}(t) t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \binom{\alpha}{n}.$$

Usando a regra de Leibniz para o caso inteiro temos,

$$\begin{aligned} D^\alpha (fg)(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{k} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} f^{(k)}(t) g^{(n-k)}(t) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=k}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \binom{n}{k} \frac{t^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)} g^{(n-k)}(t).$$

Introduzindo a mudança de índices $n \rightarrow n+k$ podemos escrever

$$D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t).$$

Como,

$$\begin{aligned} \binom{\alpha}{n+k} \binom{n+k}{k} &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(1+\alpha-n-k)(n+k)!} \frac{(n+k)!}{n!k!} \\ &= \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma(1+\alpha-n-k)n!k!} \frac{\Gamma(\alpha-k+1)}{\Gamma(\alpha-k+1)} = \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{n} \end{aligned}$$

podemos escrever,

$$\begin{aligned} D^{\alpha}(fg)(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} \binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha-k}{n} \frac{t^{n+k-\alpha}}{\Gamma(n+k-\alpha+1)} g^{(n)}(t). \end{aligned}$$

Considerando novamente a Eq.(5) temos que a derivada de Riemann-Liouville satisfaz a generalização da regra de Leibniz, a saber,

$$D^{\alpha}(fg)(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} f^{(k)}(t) D^{\alpha-k}g(t).$$

3 Conclusões

Tento em vista o crescente número de definições envolvendo o conceito de derivada fracionária faz-se necessário um critério que um operador deve satisfazer para que esse possa ser chamado de derivada fracionária. Nesse trabalho, foram apresentados dois critérios, um proposto em 1975 por Ross e outro em 2015 por Ortigueira e Machado, ambos são compostos de cinco propriedades. Visto que o critério de Ortigueira e Machado é mais restritivo que aquele proposto por Ross, apresentamos um operador que cumpre o critério propostos por Ortigueira e Machado, a saber, a derivada de Riemann-Liouville (TEODORO; OLIVEIRA; OLIVEIRA, 2018).

4 Referências bibliográficas

CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Matemática) – Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Unicamp, Campinas, 2009.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Livraria da Física, 2015.

ORTIGUEIRA, M. D.; MACHADO, J. A. T. What is a fractional derivative? **Journal of Computational Physics**, v. 293, p. 4-13, 2015.

OLIVEIRA, E. C.; MACHADO, J. A. T. A review of definitions for fractional derivatives and integral. **Mathematical Problems in Engineering**, p. 1-6, 2014.

ORTIGUEIRA, M. D. **Fractional calculus for scientists and engineers**. New York: Springer, 2011.

RODRIGUES, F. G.; OLIVEIRA, E. C. Introdução às técnicas do cálculo fracionário para estudar modelos da física matemática. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 3, p. 1-12, 2015. Disponível em:
<<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v37n3/0102-4744-rbef-37-3-3305.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2017.

ROSS, B. A brief history and exposition of the fundamental theory of fractional calculus. In: _____ (Ed.). **Fractional calculus and its applications**. Berlin; New York: Springer, 1975. p. 1-36.

SCHERER, R. et al. The Grünwald-Letnikov method for fractional differential equations. **Computers and Mathematics with Applications**, v. 62, n. 3, p. 902-917, 2011.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, D. S.; OLIVEIRA, E. C. Sobre derivadas fracionárias. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 40, n. 2, 2018. Disponível em:
<<http://www.scielo.br/pdf/rbef/v40n2/1806-1117-rbef-40-02-e2307.pdf>>. Acesso em: 10 nov. 2017.

TEODORO, G. S.; OLIVEIRA, E. C. Derivadas fracionárias: critérios para classificação. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 4., 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2017. p. 107-114. Disponível em:
<http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/ermac/caderno-ermac_2017.pdf>. Acesso em: 10 nov. 2017.

Artigo recebido em maio 2017 e aceito em nov. 2017.