Lucas Kenjy Bazaglia Kuroda
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Instituto de Biociências
de Botucatu
lucaskuroda@ibb.unesp.br

Alexys Bruno-Alfonso
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Faculdade de Ciências
de Bauru
alexys@fc.unesp.br

**Paulo Fernando de Arruda
Mancera**
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Instituto de Biociências
de Botucatu
pmancera@ibb.unesp.br

**Rubens de Figueiredo
Camargo**
UNESP - Universidade Estadual
Paulista “Júlio de Mesquita
Filho”, Faculdade de Ciências
de Bauru
rubens@fc.unesp.br

Método da transformada diferencial generalizada no modelo fracionário de Malthus

Generalized differential transform method in the Malthus
fractional model

Resumo

O método da transformada diferencial generalizada é aplicado para resolver a generalização fracionária do problema de Malthus. Para facilitar a compreensão do método, é apresentada uma forma alternativa de calcular a transformada de cada função, sem uso da derivada fracionária. Na primeira etapa do método, representa-se a função incógnita como série de potências em que os expoentes são múltiplos da ordem de derivação. Em seguida, a equação diferencial é reduzida a um sistema de equações algébricas para os termos da transformada diferencial. Mediante a solução algébrica são obtidos os termos da série que representa a solução da equação diferencial. No modelo de Malthus, o sistema de equações algébricas é linear e simples de resolver. Neste caso, é recuperada a solução exata analítica, que é usualmente obtida mediante a metodologia da transformada de Laplace.

Palavras-chave: Cálculo Fracionário e Aplicações. Modelo de Malthus. Modelagem Fracionaria. Método da Transformada Diferencial Generalizada

Abstract

The generalized differential transform method is applied to solve the fractional generalization of Malthus problem. To better explain the method, it is given an alternative and simpler way to calculate the transform without using fractional derivatives. Initially, the unknown function is represented as a power series in which the exponents are multiples of the derivative order. Then, the differential equation is reduced into a system of algebraic equations for the terms of the differential transform. The algebraic solution give the terms of the series that represent de solution of the differential equation. In the Malthus model, the system of equations is linear and easy to solve. In this case, one recovers the analytical solution that is usually obtained using the Laplace Transform.

Keywords: Fractional Calculus and Applications. Malthus Model. Fractional Modeling. Generalized Differential Transform Method.

1 Introdução

A modelagem matemática é a área do conhecimento que estuda a simulação de sistemas reais a fim de prever o comportamento dos mesmos, ou seja, consiste em descrever matematicamente um fenômeno. Segundo Zill e Cullen (2001), esta descrição compreende as etapas de identificação das variáveis do problema e de um conjunto de hipóteses razoáveis sobre o sistema. Assim, quanto mais variáveis essa equação possuir, maior será a dificuldade em encontrar sua solução.

A obtenção de uma equação diferencial cuja solução descreve bem a realidade traz consigo grande dificuldade. Normalmente, quanto mais próximos estamos de descrever um problema real, maior será o número de variáveis envolvidas e a complexidade das equações. Com o objetivo de descrever um fenômeno com maior precisão, o Cálculo Fracionário, conhecido também como cálculo de ordem não-inteira, assume um papel de destaque. Diversos problemas descritos em termos de equações diferenciais fracionárias fornecem uma descrição mais apropriada do que a respectiva equação de ordem inteira, como visto em Camargo e Oliveira (2015) e Kuroda et al. (2017). Um dos modelos matemáticos mais conhecidos é o modelo apresentado por Malthus, chamado também de modelo malthusiano, pode ser utilizado na modelagem de crescimento populacional sem agentes influenciando na mortalidade dos indivíduos (competição, alimento,...). Nessas condições, a população cresce proporcionalmente ao número de indivíduos presentes naquele instante.

Considerando a equação diferencial proposta por Malthus, uma maneira comum de usar a modelagem fracionária é substituir a derivada de ordem inteira por uma derivada de ordem não-inteira, geralmente menor que ou igual a 1. Assim, a derivada ordinária pode ser recuperada como um caso particular (KURODA et al., 2017). O principal desafio passa ser o desenvolvimento de técnicas e métodos de resolução, tanto analíticos quanto numéricos. Por exemplo, se tratando de equações lineares de ordem fracionária, como o Modelo Malthusiano original, pode-se utilizar a metodologia da transformada de Laplace. No entanto, é difícil estender esse método para uma ampla classe de equações não lineares.

Dentre os métodos disponíveis para o tratamento de equações não lineares de ordem fracionária está o “Método da Transformada Diferencial Generalizada” (GDTM, em Inglês). O método é uma generalização do Método da Transformada Diferencial, diretamente relacionado com a série de Taylor (KURODA, 2016). E tem sido aplicado em tratamentos numéricos computacionais por vários autores, dentre eles, Abdel-Halim Hassan (2008), Odibat et al. (2010), Mirzaee (2011), Freihat e Momani (2012), Arshad; Sohail e Javed (2015) e Kuroda (2016).

Neste trabalho, resolveremos o modelo de Malthus de ordem fracionária, com a derivada definida por Caputo. Faremos isto mediante o GDTM e mostraremos que a solução coincide com a usualmente obtida mediante a transformada de Laplace.

2 Conceitos preliminares

Os conceitos preliminares são baseados em Camargo e Oliveira (2015), Camargo (2009) e Kuroda (2016). O operador I produz a integral de 0 a t de cada função de t . O operador I^n , com $n \in \mathbb{N}$, representa a n -ésima repetição da operação I^1 . De forma explícita, temos

¹Definimos $I^0 f(t) = f(t)$.

$$If(t) = \int_0^t f(t_1) dt_1,$$

$$I^2 f(t) = I[If(t)] \int_0^t \int_0^{t_1} f(t_2) dt_2 dt_1$$

e

$$I^n f(t) = \int_0^t \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} \dots \int_0^{t_{n-2}} \int_0^{t_{n-1}} f(t_n) dt_n dt_{n-1} \dots dt_3 dt_2 dt_1.$$

Definição 1 *Seja $v \notin \mathbb{Z}$ a função de Gel'fand-Shilov é definida como:*

$$\phi_v(t) := \begin{cases} \frac{t^{v-1}}{\Gamma(v)} & \text{se } t \geq 0 \\ 0 & \text{se } t < 0. \end{cases}$$

Teorema 2 *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ integrável. A integral de ordem $n \in \mathbb{N}$ é dada por,*

$$I^n f(t) = \phi_n(t) * f(t) = \int_0^t \phi_n(t - \tau) f(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{(t - \tau)^{n-1}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau, \quad (1)$$

sendo $\phi_n(t) * f(t)$ o produto de convolução da função Gel'fand-Shilov com a função $f(t)$ (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015).

Definição 3 *A integral fracionária de Riemann-Liouville de ordem v de uma função f é definida como,*

$$I^v f(t) = \phi_v(t) * f(t) = \frac{1}{\Gamma(v)} \int_0^t f(\tau) (t - \tau)^{v-1} d\tau, \quad (2)$$

sendo $Re(v) > 0$ e $t > 0$.

Definição 4 *Neste trabalho, as derivadas fracionárias serão calculadas segundo Caputo, como visto em Camargo (2009), com limite de integração inferior igual a t_0 . Para cada função u definida em $[t_0, +\infty)$, a derivada de ordem $\beta \in \mathbb{C}$ de u , em cada t com $t > t_0$, é dada por*

$$D_{t_0}^\beta u(t) = I^{n-\beta} [D^n u(t)] = \phi_{n-\beta}(t) * [D^n u(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_{t_0}^t \frac{u^{(n)}(\tau)}{(t - \tau)^{\beta-n+1}} d\tau, \quad (3)$$

em que $Re(\beta) > 0$ e n o menor inteiro maior que ou igual a $Re(\beta)$, isto é, $n - 1 < Re(\beta) \leq n$.

Observação: Pela definição acima de derivada fracionária segundo Caputo, segue que se $\beta = n$, com n natural, temos,

$$D_{t_0}^\beta u(t) = I^{n-\beta} [D^n u(t)] = I^{n-n} [D^n u(t)] = D^n u(t).$$

3 Transformada diferencial generalizada

Considerando uma função u da variável real t , definida para $t \geq t_0$, há situações em que convém representar $u(t)$ mediante uma série de potências de $t - t_0$ em que os expoentes são múltiplos de um número real β , com $\beta > 0$. Nesse caso, temos

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(\beta)} (t - t_0)^{\beta k}. \quad (4)$$

Os coeficientes $U_k^{(\beta)}$ formam uma sequência que é chamada de Transformada Diferencial Generalizada de ordem β , com centro em t_0 , da função u . Esses coeficientes são definidos da seguinte maneira, segundo Odibat e Shawagfeh (2007),

$$U_k^{(\beta)} = \frac{1}{\Gamma(k\beta + 1)} \lim_{t \rightarrow t_0^+} (D_{t_0}^{\beta})^k u(t), \quad (5)$$

em que $(D_{t_0}^{\beta})^k = D_{t_0}^{\beta} \cdot D_{t_0}^{\beta} \cdots D_{t_0}^{\beta}$, k vezes.

Considerando a ordem $\beta = 1/2$ e a função $u(t) = e^{t+\sqrt{t}}$ centrada em $t_0 = 0$, vamos encontrar $U_1^{(1/2)}$, o primeiro coeficiente da transformada diferencial generalizada. De acordo com (3) e (5), temos

$$\begin{aligned} U_1^{(1/2)} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2} + 1)} [D_0^{\frac{1}{2}} u(t)] \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{1}{2} \tau^{-1/2}) e^{\tau + \sqrt{\tau}} d\tau. \end{aligned}$$

Como $e^{\tau + \sqrt{\tau}}$ é crescente no intervalo $[0, t]$, temos $1 \leq e^{\tau + \sqrt{\tau}} \leq e^{t + \sqrt{t}}$.
Então,

$$(t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) \leq (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) e^{\tau + \sqrt{\tau}} \leq (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) e^{t + \sqrt{t}}$$

e

$$\int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) d\tau \leq \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) e^{\tau + \sqrt{\tau}} d\tau \leq e^{t + \sqrt{t}} \int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) d\tau. \quad (6)$$

Logo,

$$1 \leq \frac{\int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) e^{\tau + \sqrt{\tau}} d\tau}{\int_0^t (t - \tau)^{-1/2} (1 + \frac{\tau^{-1/2}}{2}) d\tau} \leq e^{t + \sqrt{t}}.$$

Assim,

$$U_1^{(1/2)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t - \tau}} + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t - \tau)}} \right].$$

Resolveremos as duas integrais separadamente. Para a primeira integral com substituição de variável $v = t - \tau$,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = \int_t^0 \frac{-dv}{v^{1/2}} = \int_0^t v^{-1/2} dv = 2\sqrt{t}.$$

Na segunda integral, fazendo a substituição $v = \sqrt{\frac{\tau}{t}}$,

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\tau(t-\tau)}} = \int_0^1 \frac{2tvdv}{tv\sqrt{1-v^2}} = 2 \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = 2 \arcsin(v)|_0^1 = \pi.$$

Assim,

$$\begin{aligned} U_1^{(1/2)} &= \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \cdot \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \cdot \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{t} + \frac{1}{2}\pi \right] \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Para encontrar $U_2^{(1/2)}$, devemos aplicar a derivada fracionária de Caputo duas vezes, ou seja,

$$U_2^{(1/2)} = \frac{1}{\Gamma(\frac{3}{2})} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left[D_0^{\frac{1}{2}} \left(D_0^{\frac{1}{2}} u(t) \right) \right].$$

Nota-se que para encontrar os coeficientes $U_k^{(1/2)}$ utilizando a definição da derivada fracionária de Caputo é um processo trabalhoso e em alguns casos complicado. Mostraremos, a seguir, outra maneira de encontrar os coeficientes da transformada diferencial generalizada.

Pela definição (4), se introduzirmos a variável $r = (t - t_0)^\beta$, temos que

$$u(t_0 + r^{1/\beta}) = \sum_{k=0}^{\infty} U_k^{(\beta)} r^k. \quad (7)$$

Como o lado direito dessa equação é a série de Taylor de $g(r) = u(t_0 + r^{1/\beta})$ com centro em $r = 0$, concluímos que

$$U_k^{(\beta)} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}. \quad (8)$$

Isto garante a unicidade, uma vez garantida a existência, da transformada generalizada. Para tanto, é necessário determinar o conjunto de valores de t nos quais a série converge para a função $u(t)$.

Retomemos o caso, $\beta = 1/2$ e $u(t) = e^{t+\sqrt{t}}$, com centro em $t_0 = 0$. A função auxiliar é $g(r) = u(t_0 + r^{1/\beta}) = u(r^2) = e^{r^2+r}$ e a transformada generalizada é dada por

$$U_k^{(1/2)} = \frac{g^{(k)}(0)}{k!}. \quad (9)$$

Como

$$g(r) = e^{r^2+r} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(r^2+r)^n}{n!},$$

pela fórmula do Binômio de Newton, temos

$$U_k^{(1/2)} = \sum_{q=0}^{[k/2]} \frac{1}{q!(k-2q)!}. \quad (10)$$

Assim, em lugar de calcular as derivadas em (5), encontramos os coeficientes da transformada diferencial generalizada pela expressão (10). Truncando a série em $k = 10$, obtemos

$$u(t) \approx 1 + \sqrt{t} + \frac{3t}{2} + \frac{7t^{3/2}}{6} + \frac{25t^2}{24} + \frac{27t^{5/2}}{40} + \frac{331t^3}{720} + \frac{1303t^{7/2}}{5040} + \frac{1979t^4}{13440} + \frac{5357t^{9/2}}{72576} + \frac{19093t^5}{518400}. \quad (11)$$

A comparação entre os gráficos da função e da série truncada pode ser feita com auxílio da Figura 1. Observa-se que há excelente acordo para $k = 5$, quando $0 \leq t \leq 0.6$ e para $k = 10$, desde que $0 \leq t \leq 1.2$. O gráfico inserido é uma ampliação do principal, para $0 \leq t \leq 0.1$. A primeira derivada tende a $+\infty$ quando $t \rightarrow 0^+$.

A Tabela 1 apresenta as principais propriedades da transformada diferencial generalizada. As propriedades (i) e (ii) exprimem a linearidade da transformada. A (iii) diz que a transformada do produto é a convolução discreta das transformadas dos fatores. A (iv) estabelece como calcular a transformada da derivada de Caputo.

Tabela 1: Propriedades da Transformada Diferencial Generalizada. Considera-se que $U_k^{(\beta)}$ e $W_k^{(\beta)}$ são as transformadas de $u(t)$ e $w(t)$, enquanto α é uma constante.

Propriedade	Função Original	Transformada Diferencial Generalizada
i	$f(t) = \alpha u(t)$	$F_k^{(\beta)} = \alpha U_k^{(\beta)}$
ii	$f(t) = u(t) \pm w(t)$	$F_k^{(\beta)} = U_k^{(\beta)} \pm W_k^{(\beta)}$
iii	$f(t) = u(t) w(t)$	$F_k^{(\beta)} = \sum_{q=0}^k U_k^{(\beta)} W_{k-q}^{(\beta)}$
iv	$f(t) = D_{t_0}^\beta u(t)$	$F_k^{(\beta)} = \Gamma\left(\frac{((k+1)\beta+1)}{\Gamma(k\beta+1)}\right) U_{k+1}^{(\beta)}$

4 Método da transformada diferencial generalizada (GDTM)

Consideremos o problema de condição inicial dado por $u(t_0) = u_0$ e

$$D_{t_0}^\beta u(t) = f(t, u(t)), \quad (12)$$

para $t > t_0$. A transformada diferencial generalizada de $f(t, u(t))$ depende da transformada $U^{(\beta)}$. Denotando-a por $F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)})$, a Equação 12 transforma-se em

$$\frac{\Gamma((k+1)\beta + 1)}{\Gamma(k\beta + 1)} U_{k+1}^{(\beta)} = F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)}), \quad (13)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Trata-se de um sistema de equações algébricas que pode ser muito difícil de resolver. No entanto, há situações de interesse em que $F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)})$ depende apenas dos valores dos termos $U_q^{(\beta)}$, com $0 \leq q \leq k$, ou seja,

$$F_k^{(\beta)}(U^{(\beta)}) = F_k^{(\beta)}(U_0^{(\beta)}, U_1^{(\beta)}, \dots, U_k^{(\beta)}). \quad (14)$$

Então, pode-se calcular cada valor da transformada a partir dos anteriores, de acordo com

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{\Gamma(k\beta + 1)}{\Gamma((k+1)\beta + 1)} F_k^{(\beta)}(U_0^{(\beta)}, U_1^{(\beta)}, \dots, U_k^{(\beta)}), \quad (15)$$

para todo número natural k , com $U_0^{(\beta)} = u_0$. Isto estabelece uma relação de recorrência mediante a qual podem ser gerados todos os valores da transformada. A solução do problema será dada pela Equação 4.

5 Aplicação do GDTM no modelo fracionário de Malthus

Consideramos o modelo fracionário de Malthus, com derivada de Caputo de ordem β , sendo $0 < \beta \leq 1$ (CAMARGO; OLIVEIRA, 2015). O problema a resolver é dado por

$$D_{t_0}^{\beta} u(t) = \alpha u(t), \quad (16)$$

e $u(t_0) = u_0$, sendo α e u_0 certas constantes positivas.

Para aplicar o método apresentado na seção anterior, identificamos $f(t, u(t)) = \alpha u(t)$. De acordo com a propriedade (i) da Tabela 1, a transformada dessa função é

$$F_k^{(\beta)}(U_k^{(\beta)}) = \alpha U_k^{(\beta)}. \quad (17)$$

Portanto, a relação de recorrência na Equação 15 adota a forma

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{\Gamma(k\beta + 1)}{\Gamma((k+1)\beta + 1)} \alpha U_k^{(\beta)}, \quad (18)$$

enquanto a condição inicial é

$$U_0^{(\beta)} = u_0. \quad (19)$$

A Tabela 2 mostra os valores da transformada diferencial obtidos a partir da condição inicial e da relação de recorrência, para k de 0 a 4. Mediante a tabela, pode-se fazer a conjectura de que para todo $k \geq 0$ vale

$$U_k^{(\beta)} = \frac{\alpha^k u_0}{\Gamma(k\beta + 1)}. \quad (20)$$

Tabela 2: Primeiros cinco valores da Transformada Diferencial Generalizada da solução do modelo fracionário de Malthus.

k	$U_k^{(\beta)}$
0	u_0
1	$\frac{\Gamma(0\beta + 1)}{\Gamma((0 + 1)\beta + 1)} \alpha U_0^{(\beta)} = \frac{\alpha u_0}{\Gamma(\beta + 1)}$
2	$\frac{\Gamma(1\beta + 1)}{\Gamma((1 + 1)\beta + 1)} \alpha U_1^{(\beta)} = \frac{\alpha^2 u_0}{\Gamma(2\beta + 1)}$
3	$\frac{\Gamma(2\beta + 1)}{\Gamma((2 + 1)\beta + 1)} \alpha U_2^{(\beta)} = \frac{\alpha^3 u_0}{\Gamma(3\beta + 1)}$
4	$\frac{\Gamma(3\beta + 1)}{\Gamma((3 + 1)\beta + 1)} \alpha U_3^{(\beta)} = \frac{\alpha^4 u_0}{\Gamma(4\beta + 1)}$

A conjectura pode ser demonstrada pelo método de indução. Primeiramente, a validade para $k = 0$ é garantida pela Equação 19. Para finalizar, deve-se verificar que a validade da Equação 20 garante a validade de

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{\alpha^{k+1} u_0}{\Gamma((k + 1)\beta + 1)}. \quad (21)$$

A verificação é simples com base na Equação 18. De fato, se a proposição na Equação 20 for verdadeira, então

$$U_{k+1}^{(\beta)} = \frac{\Gamma(k\beta + 1)}{\Gamma((k + 1)\beta + 1)} \alpha \frac{\alpha^k u_0}{\Gamma(k\beta + 1)} = \frac{\alpha^{k+1} u_0}{\Gamma((k + 1)\beta + 1)}. \quad (22)$$

Conclui-se, assim, que a conjectura é válida.

A solução de problema é obtida ao substituir a Equação 20 na Equação 4, isto é,

$$u(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^k u_0}{\Gamma(k\beta + 1)} (t - t_0)^{\beta k} = u_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha(t - t_0)^{\beta})^k}{\Gamma(k\beta + 1)} = u_0 E_{\beta}((\alpha(t - t_0)^{\beta})), \quad (23)$$

em que

$$E_{\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k\beta + 1)} \quad (24)$$

é a função de Mittag-Leffler, como visto em Camargo e Oliveira (2015). É muito importante salientar que o resultado apresentado na Equação 24 coincide com a solução usualmente obtida pelo método da transformada de Laplace nos trabalhos de Camargo e Oliveira (2015) e Kuroda (2016). O mesmo resultado é obtido por Odibat e Shawagfeh (2007), calculando os coeficientes da transformada diferencial generalizada mediante a definição da derivada fracionária de Caputo, na equação 5. Esta solução recupera a forma exponencial no caso $\beta = 1$.

Agradecimentos

Os autores agradecem o grupo de pesquisa CF@FC - Cálculo Fracionário, da Unesp, por discussões úteis. RFC agradece também ao CNPq (Universal 455920-2014-1).

Conclusões

Apresentamos brevemente algumas definições referentes ao Cálculo Fracionário, em especial a derivada fracionária de Caputo, a transformada diferencial generalizada e o método de resolução de equações diferenciais de ordem fracionária baseado nessa transformada. Mostramos também uma forma alternativa de se calcular os coeficientes da transformada diferencial generalizada sem usar derivadas de ordem fracionária. O método foi aplicado à resolução do modelo fracionário de Malthus e a solução obtida coincide com os resultados reportados na literatura em que aplica-se o método da transformada de Laplace. O procedimento é análogo para sistemas de equações.

Deve-se ressaltar que os dois métodos são igualmente eficientes na hora de tratar modelos fracionários lineares como o de Malthus. No entanto, o Método da Transformada Diferencial Generalizada tem sido aplicado com sucesso para resolver modelos não lineares. Nesse caso, não é simples obter uma fórmula explícita para os termos da transformada, mas a série de potências pode ser aproximada mediante truncamento. A aplicação do método à equação logística fracionária, na sua versão não linear, está em andamento.

6 Referências bibliográficas

ABDEL-HALIM HASSAN, I. H. Application to differential transformation method for solving systems of differential equations. **Applied Mathematical Modelling**, v. 32, n. 12, p. 2552-2559, 2008.

ARSHAD, S.; SOHAIL, A.; JAVED, S. Dynamical study of fractional order tumor model. **International Journal of Computational Methods**, v. 12, n. 5, 12 p. 2015.

CAMARGO, R. F. **Cálculo fracionário e aplicações**. Campinas, 2009. 135 f. Tese (Doutorado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2009.

CAMARGO, R. F.; OLIVEIRA, E. C. **Cálculo fracionário**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

FREIHAT, A.; MOMANI, S. Application of multistep generalized differential transform method for the solutions of the fractional-order Chua's system. **Discrete Dynamics in Nature and Society**, v. 2012, 2012.

KURODA, L. K. B. **Cálculo fracionário aplicado em dinâmica tumoral: método da transformada diferencial generalizada**. 2016. 105f. Dissertação (Mestrado em Biometria) - IBB/UNESP, Botucatu, 2016.

KURODA, L. K. B.; BRUNO-ALFONSO, A.; CAMARGO, R. F. Método da transformada diferencial generalizada no modelo fracionário de Malthus. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumo**. Bauru: UNESP, Faculdade de Ciências, 2017. p. 178-184.

KURODA, L. K. B. et al. Unexpected behavior of Caputo fractional derivative. **Computational and Applied Mathematics**, v. 36, n. 3, p. 1173-1183, 2017.

MIRZAEI, F. Differential transform method for solving linear and nonlinear systems of ordinary differential equations. **Applied Mathematical Sciences**, v. 5, n. 70, p. 3465-3472, 2011.

ODIBAT, et al. A Multi-step differential transform method and application to non-chaotic or chaotic systems. **Computer and Mathematics with Applications**, v. 59, n. 4, p. 1462-1472, 2010.

ODIBAT, Z. M.; SHAWAGFEH, N. T. Generalized Taylor's formula. **Applied Mathematics and Computation**, v. 186, n. 1, p. 286-293, 2007.

ROSENDO, D. C. **Sobre a função de Mittag-Leffler**. Campinas, 2008. 78 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2008.

ROSS, B. The development of fractional calculus 1695-1900. **Historia Mathematica**, v. 4, n. 1, p. 75-89, 1977.

ZILL, D. G.; CULLEN, M. R. **Equações diferenciais**. 3. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001. 2 v.

Figura 1: Gráficos da função $u(t) = e^{t+\sqrt{t}}$ (linha contínua) e da sua série generalizada. A série foi truncada em $k = 5$ (linha pontilhada) e $k = 10$ (linha tracejada), como na Equação 11.

Artigo recebido em jun. 2017 e aceito em nov. 2017.