Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac

Hércules de Araujo Feitosa
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita
Filho"
haf@fc.unesp.br

Marcelo Reicher Soares
UNESP - Universidade Estadual
Paulista "Júlio de Mesquita
Filho"
reicher@fc.unesp.br

Da dedução para a álgebra

From deduction to algebra

Resumo

Iniciamos com o conceito de dedução, como conhecido no contexto da Matemática e das ciências exatas. Então, apresentamos algumas propostas de formalização da dedução em sistemas dedutivos, o que é bem conhecido nos tratados de lógica universal ou lógica abstrata. Como uma outra opção de formalização da noção de dedução, tomamos os operadores de consequência de Tarski, que geram os espaços de Tarski. Mostramos que os sistemas dedutivos são casos particulares dos espaços de Tarski. Para uma formalização algébrica dos espaços de Tarski, definimos as TK-álgebras. Como novidade, sobre estas álgebras desenvolvemos os conceitos de filtro e ideal e, na tradição de Paul Halmos, identificamos uma lógica abstrata como uma álgebra munida de um filtro sobre aquela álgebra. Tratamos do caso das TK-álgebras.

Palavras-chave: Dedução. Sistemas dedutivos. Espaços de Tarski. TK-álgebras. Lógica algébrica.

Abstract

We begin with the concept of deduction, that is well known in the context of Mathematics and exact sciences. Then we present some proposals of formalization for deduction in deductive systems, what is well known in papers about universal logic or abstract logic. As another option to formalize the notion of deduction, we take the Tarski consequence operators, that generate the Tarski Spaces. So we show that deductive systems are particular cases of Tarski spaces. For an algebraic formalization of Tarski Spaces we define the TK-algebras. As novelty, on the these algebras we develop the concepts of filter and ideal and, following the tradition of Paul Halmos, we identify an abstract logic with an algebra plus a filter on that algebra. We consider the case using TK-algebras.

Keywords: Deduction. Deductive systems. Tarski spaces. TK-algebras. Algebraic logic.

1 Introdução

O conceito de dedução ou demonstração é essencial para a Matemática. Podemos considerar que fazer matemática é o mesmo que desenvolver algum tipo de sistema dedutivo com motivação e interesse matemático.

Neste trabalho fazemos uma análise da noção de dedução. Partimos de um ponto de vista bastante geral e vamos incluindo conceitos matemáticos no desenvolvimento. Culminamos com visões bastante algébricas deste desenvolvimento do conceito de dedução, que perpassa nossas concepções de Lógica.

Na primeira seção, procuramos destacar o que os matemáticos consideram deduções ou demonstrações. Para o lógico, demonstração é uma dedução sem hipóteses adicionais além dos axiomas e teoremas já demonstrados. Deste modo, toda demonstração é uma dedução.

A seguir, mostramos uma versão de formalização do conceito de sistema dedutivo. Isto está no contexto do que é chamado de lógica abstrata ou lógica universal. Assim como a álgebra universal, podemos tratar de uma visão geral e abstrata dos sistemas dedutivos, sem nos determos em um sistema específico.

Uma outra abordagem, bastante usada, deste contexto de lógica universal foi proposta por Alfred Tarski na década de 1930. Na seção seguinte destacamos a caracterização de Tarski naquilo que chamamos de espaços de Tarski.

A partir dos espaços de Tarski, tratamos da sua versão em ambiente algébrico, as TK-álgebras. Desenvolvemos alguns elementos algébricos das TK-álgebras.

Na parte final, resgatamos uma noção de Paul Halmos, de que a álgebra e a lógica podem ser vistas como sistemas duais, que são quocientados pelos ideais (álgebra) e filtros (lógica).

Este artigo é derivado do trabalho (FEITOSA; SOARES; MOREIRA, 2017).

2 Noção de dedução

Todo aluno de curso de matemática entra em contato, ou deveria fazê-lo, com o sistema dedutivo axiomático da Geometria Euclidiana.

Esse sistema, desenvolvido na Grécia Antiga, foi o modelo ou protótipo do raciocínio preciso e elegante procurado pelos matemáticos nos séculos posteriores.

Fazer matemática é, de algum modo, se espelhar no desenvolvimento daquele sistema. As muitas matemáticas foram dando lugar a sistemas sólidos e bem fundados, que levaram à unificação da Matemática no início do século XX.

A geometria analítica, iniciada com Descartes, faz uma união entre álgebra e geometria. Os desenvolvimentos das teorias dos números, desde os antigos, teve fundamentação essencial com o conhecido sistema de Peano para os números naturais. A fundamentação da análise, com o conceito preciso de número real, do final do século XIX, fez uma extensão natural da teoria dos números, a aritmetização da análise. Os fundamentos do final do século XIX e início do XX deram versões robustas e finas para a unificação da Matemática.

Quais são as noções essenciais destes sistemas dedutivos? Podemos desenvolver reflexões sobre eles?

Propomos aqui um caminho de olhares sobre a dedução que vai em direção da algebrização da dedução.

A descrição do ambiente em que acontece o que entendemos por dedução pode ser bastante detalhada e formal, e consideramos importante destacar que tal ambiente encontra-se no campo da lógica matemática.

Podemos começar por estipular os símbolos que utilizaremos para compor as fórmulas sobre as quais raciocinaremos, faremos deduções, ou realizaremos inferências.

Entendemos que os processos dedutivos que almejamos tratar sejam produtivos na geração de novas fórmulas a partir de fórmulas dadas.

Assim, o alfabeto é um conjunto de símbolos. Estes símbolos devem ser concatenados, obedecendo regras precisamente estabelecidas, as regras gramaticais, para formar sequências finitas (expressões) que definem as fórmulas.

Naturalmente, devemos a partir das regras, poder separar as fórmulas bem formadas das expressões mal formadas.

A exigência de que a sequência de símbolos (concatenação) seja finita é, em geral, um critério para a composição de fórmulas.

Uma vez determinado o processo de composição das fórmulas, pensamos em agrupá-las em um conjunto, que pode ser infinito, chamado de conjunto das fórmulas bem formadas de nosso sistema.

Dentro desse conjunto, separamos um subconjunto de fórmulas, cujos elementos chamamos de Axiomas.

Eventualmente, tal conjunto pode ser vazio e ao mudarmos a escolha dos axiomas podemos, ou não, alterar o sistema formal obtido.

Finalmente, especificamos certas regras, as regras de inferência ou regras de dedução, que nos permitem gerar fórmulas deduzidas a partir de fórmulas anteriores, em uma configuração que leva fórmulas aceitas, ou válidas, em fórmulas que, dado o procedimento estabelecido pelas regras, têm também que ser aceitas, ou válidas.

Estas regras comportam-se como comandos que o sistema formal permite para proceder a jornada dedutiva, isto é, concluir uma dedução.

Utilizando uma abordagem mais simbólica, podemos nos expressar dizendo que: dada uma fórmula φ e um conjunto Σ de fórmulas, uma dedução de φ a partir de Σ é uma sequência finita de fórmulas φ_i , $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ tal que as fórmulas φ_i pertencem a Σ , ou são axiomas do sistema considerado, ou decorrem de fórmulas φ_j , com $j < i$, pelas regras de inferência, e que $\varphi_n = \varphi$.

Neste caso, escrevemos $\Sigma \vdash \varphi$, para indicar que a fórmula φ foi deduzida do conjunto de fórmulas Σ .

Vejamos que na Geometria Euclidiana, cada enunciado corresponde a uma fórmula φ . Cada axioma deve ser representado por uma fórmula e os teoremas também.

Eventualmente podemos ter $\Sigma = \emptyset$ e, nesse caso, dizemos que φ é um teorema do sistema formal e a sequência de fórmulas que leva à dedução de φ é uma demonstração do teorema φ .

Existem sistemas formais dedutivos que não têm axiomas, como são os sistemas de Gentzen de dedução natural ou cálculo de seqüentes. São sistemas dedutivos perfeitos que contam apenas com regras de dedução ou inferência.

O conceito de dedução que mencionamos até aqui tem caráter puramente formal e consideramos que a dedução $\Sigma \vdash \varphi$, como definida, constitui o que chamamos de dedução sintática, ou seja φ é consequência sintática de Σ .

Outra maneira de pensarmos em deduções leva em conta significados ou valorações que

atribuímos para as fórmulas do sistema.

Com essas atribuições, especificamos com clareza alguma maneira de dizer se uma fórmula é verdadeira ou falsa, segundo uma interpretação planejada para o sistema formal tratado.

De uma forma bem intuitiva, consideramos que existe uma correspondência (uma função v) que associa a cada fórmula φ , do conjunto de fórmulas do sistema formal, um significado (valor, interpretação) $v(\varphi)$ para a fórmula φ .

No contexto da lógica clássica, podemos considerar apenas os valores lógicos 0 ou 1, que correspondem às ideias de falso ou verdadeiro, não vale ou vale, respectivamente.

Uma maneira possível de definir que uma fórmula φ é consequência semântica de um conjunto de fórmulas Σ , o que denotamos por $\Sigma \models \varphi$, é: se para toda atribuição v , se v faz todas as fórmulas de Σ válidas (verdadeiras), então $v(\varphi)$ também é válida (verdadeira).

Os sistemas formais que permitem estabelecer uma correlação entre consequência sintática e consequência semântica são, em geral, os mais interessantes.

Vejamos um exemplo simples.

Definição 2.1 *Um sistema de Peano é uma terna (N, s, e) em que N é um conjunto, $e \in N$ é um elemento distinguido e s é uma função $s : N \rightarrow N$ de modo que:*

- (i) *a função s é injetiva*
- (ii) *$Im(s) = N - \{e\}$*
- (iii) *dado qualquer $A \subseteq N$, se $e \in A$ e para todo $y \in A$ tem-se que $s(y) \in A$, então $A = N$.*

O sistema é definido por várias sentenças claras e precisas. Certamente, destas sentenças podemos derivar muitas outras sentenças.

Agora, imaginemos uma função de atribuição v que associa N com o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$, a função s com a função sucessor dos números naturais e e com o número natural 0. Temos assim uma interpretação ou um modelo para o sistema de Peano.

Não é único o modelo do sistema de Peano. Consideramos que a N atribuamos os inteiros positivos $\mathbb{Z}_+$, a s mais uma vez a função sucessor e a e o número 1. Este também é um outro modelo possível para o sistema de Peano.

É natural buscarmos o entendimento destas noções na correlação entre o sistema de Peano (sintaxe) com os seus modelos (semântica).

Se tudo que pode ser deduzido sintaticamente, também pode ser deduzido semanticamente, dizemos que o modelo é correto para a teoria descrita no sistema formal.

Por outro lado, se toda consequência semântica tem uma correspondente versão dedutiva, então dizemos que o modelo é completo para a teoria formal.

Seria desejável tratar sempre com sistemas corretos e completos, isto é, sistemas adequados. Porém, nem sempre isto é possível.

A seguir, abordaremos sistemas dedutivos em ambiente puramente conjuntista.

3 Sistema dedutivo

Na literatura, encontramos inúmeras definições para a fundamental noção de consequência (FEITOSA; RODRIGUES; SOARES, 2016a, 2016b). A seguir, apresentamos três delas, as duas primeiras serão definidas utilizando o conceito de relação, este entendido como um subconjunto

do produto cartesiano de dois outros conjuntos. Nessas relações exigiremos o cumprimento de certas condições que distinguirão a consequência que a mesma define. Já a terceira, apresentada na próxima seção, será dada por um conceito mais restritivo. Assim é que exigiremos que a relação seja uma função com certas propriedades, que definirão o que é conhecido como operador de consequência de Tarski.

Definição 3.1 *Seja E um conjunto não vazio. A relação de consequência $\Vdash$ definida sobre E é o subconjunto $\Vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que, para todo $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$:*

- (1) $x \in A \Rightarrow A \Vdash x$
- (2) $A \Vdash x$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \Vdash x$
- (3) $A \Vdash x$ e para todo $y \in A$, $B \Vdash y \Rightarrow B \Vdash x$.

É usual denotar a relação de consequência pelo par $(E, \Vdash)$. Como apresentada ela pode ser encontrada, por exemplo, em (FONT; JANSANA; PIGOZZI, 2003).

Definição 3.2 *Seja E um conjunto não vazio. A relação de consequência $\vdash$ definida sobre E é o subconjunto $\vdash \subseteq \mathcal{P}(E) \times E$ tal que, para todo $A \cup B \cup \{x, y\} \subseteq E$:*

- (i) $x \in A \Rightarrow A \vdash x$
- (ii) $A \vdash x$ e $A \subseteq B \Rightarrow B \vdash x$
- (iii) $A \vdash x$ e $B \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \cup B \vdash y$.

O par $(E, \vdash)$ indicará essa relação de consequência. Ela pode ser encontrada em (KRACHT, 2006).

Estudo estabelecendo relações entre as condições impostas nas definições acima podem ser vistos em (FEITOSA; RODRIGUES; SOARES, 2016a e 2016b).

A título de ilustração vejamos, por exemplo, que:

Proposição 3.3 *As condições (i) e (iii) implicam (ii).*

Demonstração: *Se $A \vdash x$ e $A \subseteq B$, usando (i), $B \cup \{x\} \vdash x$ e, por (iii), $A \cup B \vdash x$. Como $A \subseteq B$, então $B \vdash x$.* ■

Proposição 3.4 *A condição (iii) implica (iv): $A \vdash x$ e $A \cup \{x\} \vdash y \Rightarrow A \vdash y$.*

Na verdade temos a equivalência entre essas definições de consequência.

Proposição 3.5 *A relação de consequência $(E, \Vdash)$ é equivalente à relação $(E, \vdash)$.*

Demonstração: *Ver (FEITOSA; RODRIGUES; SOARES, 2016a).* ■

4 Operador de consequência

Nesta seção, apresentamos a definição de operador de consequência de Tarski, de espaço de Tarski e comentamos algumas relações entre as definições de consequências vistas na seção anterior com a noção de consequência de Tarski.

Definição 4.1 Um operador de consequência sobre E é uma função $- : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ tal que, para todos $A, B \subseteq E$:

- (i) $A \subseteq \bar{A}$
- (ii) $A \subseteq B \Rightarrow \bar{A} \subseteq \bar{B}$
- (iii) $\bar{\bar{A}} \subseteq \bar{A}$.

Segue de (i) e (iii), que para todo $A \subseteq E$, temos $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$.

Definição 4.2 Um operador de consequência $- : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é finitário quando, para todo $A \subseteq E$:

- (iv) $\bar{A} = \bigcup \{\bar{A}_f : A_f \text{ é subconjunto finito de } A\}$.

Definição 4.3 Um espaço de Tarski (sistema dedutivo de Tarski) é um par $(E, -)$ tal que E é um conjunto não vazio e $-$ é um operador de consequência sobre E .

Definição 4.4 O conjunto A é fechado num espaço de Tarski $(E, -)$, se $\bar{A} = A$, e A é aberto se seu complementar relativo a E , denotado por A^C , é fechado em $(E, -)$.

Desde que, para todo $A \subseteq E$, segue que $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, então $\bar{A}$ é fechado em $(E, -)$.

Proposição 4.5 Se $(E, -)$ é um espaço de Tarski, então:

- (i) $\bar{A}$ é o menor conjunto fechado que contém A
- (ii) o conjunto E é fechado
- (iii) o conjunto $\emptyset$ é aberto.

Assim $\bar{\emptyset}$ e E correspondem, respectivamente, ao menor e ao maior conjuntos fechados, associados ao operador de consequência $-$.

Definição 4.6 O conjunto $\bar{A}$ é o fecho de A .

Proposição 4.7 Se $(E, -)$ é um espaço de Tarski, então:

- (i) toda intersecção de conjuntos fechados é um fechado em $(E, -)$
- (ii) $\bar{A} = \bigcap \{X : A \subseteq X \text{ e } X \text{ é fechado}\}$.

Demonstração: (i) Se $\{A_i\}$ é uma coleção de conjuntos fechados, então $\bigcap_i A_i \subseteq \bigcap_i \bar{A}_i \subseteq \bigcap_i \bar{A}_i = \bigcap_i A_i$. Portanto, $\bigcap_i A_i = \bigcap_i \bar{A}_i$. ■

Definição 4.8 O interior de A é o conjunto: $\mathring{A} = \bigcup \{X \subseteq E : X \subseteq A \text{ e } X \text{ é aberto}\}$.

Proposição 4.9 Se $(E, -)$ é um espaço de Tarski, então para todos $A, B \subseteq E$:

- (i) $\mathring{\mathring{A}} \subseteq \mathring{A} \subseteq \bar{A}$
- (ii) $\mathring{\mathring{A}} \subseteq \mathring{A}$
- (iii) $\mathring{\emptyset} \subseteq \emptyset$
- (iv) $A \subseteq B \Rightarrow \mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

Podemos estabelecer uma conexão muito próxima entre relações de consequência que definimos na seção anterior e operadores de consequência, na forma que descrevemos abaixo.

Proposição 4.10 Se $\vdash$ é uma relação de consequência sobre E e $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é definido, para cada $A \subseteq E$, por $\bar{A} = \{x \in E : A \vdash x\}$, então $\bar{\cdot}$ é um operador de consequência sobre E .

Proposição 4.11 Se $\bar{\cdot} : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ é um operador de consequência de Tarski, então a relação induzida por $A \vdash x \Leftrightarrow x \in \bar{A}$ é uma relação de consequência sobre E .

Tendo em vista a Proposição 3.5 segue que os resultados acima têm versões óbvias e válidas quando substituímos $\vdash$ por $\Vdash$.

5 Álgebras de Tarski

Motivados pelo conceito de operador de Tarski, apresentamos as TK-álgebras conforme (NASCIMENTO; FEITOSA, 2005).

Definição 5.1 Seja $f : (A, \leq_A) \rightarrow (P, \leq_P)$ uma função entre dois conjuntos parcialmente ordenados. Então:

- (i) a função f preserva as ordens se $a \leq_A b \Rightarrow f(a) \leq_P f(b)$
- (ii) a função f inverte as ordens se $a \leq_A b \Rightarrow f(b) \leq_P f(a)$.

Definição 5.2 Se $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$, então:

- (i) a função f é idempotente se $f \circ f = f$
- (ii) a função f é extensiva ou inflacionária se para todo $a \in A$, $a \leq f(a)$
- (iii) a função f é deflacionária se para todo $a \in A$, $f(a) \leq a$.

Definição 5.3 Se $f : (A, \leq_A) \rightarrow (A, \leq_A)$, então:

- (i) a função f é um operador de Tarski (operador do fecho dedutivo) se f é extensiva (ou inflacionária), preserva ordens e é idempotente
- (ii) a função f é um operador de interior se f é deflacionária, preserva ordens e é idempotente.

A seguir, trataremos com álgebra de Boole, que são reticulados, distributivos e complementados. Logo, cada álgebra de Boole determina uma ordem natural em que $a \leq b \Leftrightarrow a \vee b = b$.

Definição 5.4 Uma TK-álgebra é uma sêxtupla $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ tal que $(A, 0, 1, \vee, \sim)$ é uma álgebra de Boole e $\bullet$ é um operador de Tarski sobre A .

Exemplos:

(a) Os espaços de conjuntos $\mathcal{P}(E)$ quando $E \neq \emptyset$ e $\bullet A = A$, para todo $A \subseteq E$, é uma TK-álgebra.

(b) O espaço de subconjuntos dos reais $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ tal que $\bullet X = X \cup \{0\}$ é uma TK-álgebra.

(c) O espaço de conjuntos $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ com $\bullet X = \cap \{I : I \text{ é um intervalo e } X \subseteq I\}$ é uma TK-álgebra.

Proposição 5.5 Se $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \bullet)$ é uma TK-álgebra, então:

- (i) $\sim \bullet a \leq \sim a \leq \bullet \sim a$
- (ii) $a \leq b \Rightarrow \bullet a \leq \bullet b$
- (iii) $\bullet(a \wedge b) \leq \bullet a \wedge \bullet b$
- (iv) $\bullet a \vee \bullet b \leq \bullet(a \vee b)$.

Podemos definir uma operação dual de $\bullet$ que corresponde ao conceito de interior num espaço de Tarski.

$$\circ a =_{df} \sim \bullet \sim a.$$

Proposição 5.6 *Numa TK-álgebra, as seguintes condições são válidas:*

- (i) $\circ a \leq a$
- (ii) $a \leq b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$
- (iii) $\circ(a \wedge b) \leq \circ a$
- (iv) $\circ a \leq \circ \circ a$.

Demonstração: (i) Como $\circ a = \sim \bullet \sim a$ e $a \leq \bullet \sim a$, então $\sim \bullet \sim a \leq \sim \sim a$, ou seja, $\circ a \leq a$.

(ii) $a \leq b \Rightarrow \sim b \leq \sim a \Rightarrow \bullet \sim b \leq \bullet \sim a \Rightarrow \sim \bullet \sim a \leq \sim \bullet \sim b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$.

(iii) Segue de (ii), considerando que $a \wedge b \leq a$.

(iv) $\circ a \leq a \Rightarrow \sim a \leq \sim \circ a \Rightarrow \bullet \sim a \leq \bullet \sim \circ a \Rightarrow \sim \bullet \sim \circ a \leq \sim \bullet \sim a \Rightarrow \circ \circ a \leq \circ a$. ■

Com isto, poderíamos ter uma definição dual de TK-álgebra definida a partir do operador de interior.

Definição 5.7 *Uma TK-álgebra é uma sextupla $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \circ)$ tal que $(A, 0, 1, \vee, \sim)$ é uma álgebra de Boole e $\circ$ é um operador de interior sobre A .*

Para esta definição, o operador de Tarski pode ser definido a partir do operador de interior por:

$$\bullet a =_{df} \sim \circ \sim a.$$

Definição 5.8 *Um elemento $a \in A$ é fechado se $\bullet a = a$; e a é aberto $\circ a = a$.*

Proposição 5.9 *Em toda TK-álgebra valem:*

- (i) se a é aberto, então $a \leq b \Leftrightarrow a \leq \circ b$
- (ii) se b é fechado, então $a \leq b \Leftrightarrow \bullet a \leq b$.

Como tratamos com álgebra de Boole, então temos as duas igualdades:

$$\begin{aligned} a \rightarrow b &=_{df} \sim a \vee b \\ a - b &=_{df} a \wedge \sim b. \end{aligned}$$

Proposição 5.10 *Em toda TK-álgebra valem as condições:*

- (i) $\circ \sim a \leq \sim a \leq \sim \circ a$
- (ii) $a \leq b \Rightarrow \circ a \leq \circ b$.

Demonstração: (ii) $a \leq b \Rightarrow a \wedge b = a \Rightarrow \circ(a \wedge b) = \circ a \Rightarrow \circ a \wedge \circ b = \circ(a \wedge b) \wedge \circ b = \circ(a \wedge b) = \circ a \Rightarrow \circ a \leq \circ b$. ■

Proposição 5.11 *Em cada TK-álgebra valem as condições:*

- (i) $\circ(a \wedge b) \leq \circ a \wedge \circ b$
- (ii) $\circ a \vee \circ b \leq \circ(a \vee b)$.

Demonstração: (i) $a \wedge b \leq a$ e $a \wedge b \leq b \Rightarrow \circ(a \wedge b) \leq \circ a$ e $\circ(a \wedge b) \leq \circ b \Rightarrow \circ(a \wedge b) \leq \circ a \wedge \circ b$.

(ii) Semelhante a (i). ■

Proposição 5.12 Para as TK-álgebras valem:

- (i) $\circ(\circ a \vee \circ b) = \circ a \vee \circ b$
- (ii) $\circ(\circ a \wedge \circ b) = \circ(a \wedge b)$
- (iii) $\circ a - \circ b \leq \circ(a - b)$.

Demonstração: Basta verificarmos que $\circ a \vee \circ b \leq \circ(\circ a \vee \circ b)$.

Mas, $\circ a \vee \circ b = \circ \circ a \vee \circ \circ b \leq \circ(\circ a \vee \circ b)$.

(ii) $\circ(a \wedge b) = \circ \circ(a \wedge b) \leq \circ(\circ a \wedge \circ b) \leq \circ(a \wedge b)$. Então, $\circ(a \wedge b) = \circ(\circ a \wedge \circ b)$.

(iii) $\circ(a - b) = \circ(a \wedge \sim b) \leq \circ a \wedge \circ \sim b \leq \circ a \wedge \sim \circ b = \circ a - \circ b$. ■

Definição 5.13 Sejam $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \wedge, \sim, \circ)$ e $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \vee, \wedge, \sim, \circ)$ duas TK-álgebras. Um homomorfismo de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$ é uma função $h : A \rightarrow B$ que preserva as TK-operações.

Definição 5.14 O 0-núcleo do homomorfismo h é o conjunto $\text{Ker}(h) = \{x \in A : h(x) = 0\} = h^{-1}(0)$.

Definição 5.15 O 1-núcleo do homomorfismo h é o conjunto $N(h) = \{x \in A : h(x) = 1\} = h^{-1}(1)$.

6 Filtros e Ideais nas TK-álgebras

Para o contexto algébrico, o conceito de ideal é bem mais usual e frequente que o de filtro. Para a obtenção dos Teoremas do Homomorfismo, usamos o conceito de ideal. Porém, para a Lógica, a noção de filtro é essencial. Num reticulado com 0 e 1 o filtro aponta para o 1 que indica os elementos válidos no reticulado.

Veremos estes conceitos relativos às TK-álgebras. Faremos o desenvolvimento para os filtros e consideramos que dada a dualidade dos conceitos, desenvolvimento semelhante pode ser feito para os ideais.

Definição 6.1 Seja $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \wedge, \sim, \circ)$ uma TK-álgebra. Um filtro em A é um conjunto não vazio $F \subseteq A$ tal que, para todos $x, y \in A$:

- (i) se $x, y \in F$, então $x \wedge y \in F$
- (ii) se $x \in F$ e $x \leq y$, então $y \in F$.

Naturalmente, se F é um filtro e $a_1, a_2, \dots, a_n \in F$, então, por indução, temos que $a_1 \wedge a_2 \wedge \dots \wedge a_n \in F$.

Definição 6.2 O filtro F é um TK-filtro se para todo $x \in F$ tem-se que $\circ x \in F$.

Exemplos:

- (a) O conjunto A é um TK-filtro em $\mathcal{A}$.
- (b) O conjunto unitário $\{1\}$ é um TK-filtro se, e somente se, $\circ 1 = 1$.
- (c) Para $a \in A$, o conjunto $[a] = \{x \in A : \circ a \leq x\}$ é um TK-filtro. O conjunto $[a]$ é o TK-filtro gerado por a .

Definição 6.3 Um TK-ideal na TK-álgebra $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \wedge, \sim, \circ)$ é um conjunto não vazio $I \subseteq A$ tal que, para todos $x, y \in A$:

- (i) se $x, y \in I$, então $x \vee y \in I$
- (ii) se $y \in I$ e $x \leq y$, então $x \in I$
- (iii) se $y \in I$, então $\bullet y \in I$.

Proposição 6.4 *Sejam $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e F um filtro em $\mathcal{A}$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) $a \in F \Rightarrow \circ a \in F$
- (ii) $a - b \in F \Rightarrow \circ a - \circ b \in F$.

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se $a - b \in F$, por (i), temos que $\circ(a - b) \in F$. Como $\circ(a - b) \leq \circ a - \circ b$, então $\circ a - \circ b \in F$.

$(\Leftarrow)$ Se $a \in F$, como $a = a - 0$, então $a - 0 \in F$. De (ii), temos que $\circ a - \circ 0 \in F \Rightarrow \circ a - 0 \in F \Rightarrow \circ a \in F$. ■

Proposição 6.5 *Seja $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e $\emptyset \neq B \subseteq A$. O conjunto $[B] = \{x \in A : (\exists a_1, \dots, a_n \in B)(\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \leq x)\}$ é um TK-filtro.*

Demonstração: (i) Se $x, y \in [B]$, então existem $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n \in B$ tais que $\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \leq x$ e $\circ(b_1 \wedge \dots \wedge b_n) \leq y$. Daí $\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n \wedge b_1 \wedge \dots \wedge b_n) \leq \circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \wedge \circ(b_1 \wedge \dots \wedge b_n) \leq x \wedge y$ e, portanto, $x \wedge y \in [B]$.

(ii) Se $x \in [B]$ e $x \leq y$, então $y \in [B]$.

(iii) Se $x \in [B]$, então existem $a_1, \dots, a_n \in B$ tais que $\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \leq x$ e como $\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n)$ é aberto, pela Proposição 5.9, $\circ(a_1 \wedge \dots \wedge a_n) \leq \circ x$ e, assim, $\circ x \in [B]$. ■

Definição 6.6 *O TK-filtro $[B]$ definido na proposição anterior é o TK-filtro gerado por B .*

Proposição 6.7 *Seja $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra. Se F é um TK-filtro em $\mathcal{A}$ e $b \in A$, então*

$$[F, b] = \{x \in A : (\exists c \in F)(\circ(b \wedge c) \leq \circ x)\}$$

é também um TK-Filtro.

Demonstração: Se $x \in [F, b]$ e $x \leq y$, então $y \in [F, b]$. Além disso, se $x \in [F, b]$, então $\circ x \in [F, b]$.

Agora, se $x, y \in [F, b]$, então existem $c, d \in F$ tais que $\circ(b \wedge c) \leq \circ x$ e $\circ(b \wedge d) \leq \circ y$. Assim, $\circ(b \wedge (c \wedge d)) = \circ((b \wedge c) \wedge (b \wedge d)) = \circ(\circ(b \wedge c) \wedge \circ(b \wedge d)) \leq \circ(\circ x \wedge \circ y) = \circ(x \wedge y)$. Portanto, $x \wedge y \in [F, b]$. ■

Definição 6.8 *O filtro $[F, b]$ é o TK-filtro gerado por F e b .*

Definição 6.9 *Seja F um filtro em uma TK-álgebra $\mathcal{A}$. O filtro F é próprio se $F \neq A$.*

Definição 6.10 *Seja F um filtro em uma TK-álgebra $\mathcal{A}$. O filtro F é maximal se ele é próprio e não pode ser incluso em qualquer filtro próprio distinto de F .*

Definição 6.11 *Seja F um filtro em uma TK-álgebra $\mathcal{A}$. O filtro F é primo se ele é próprio e para todos $a, b \in A$ tem-se que:*

$$a \vee b \in F \Rightarrow a \in F \text{ ou } b \in F.$$

Se F é próprio, então existe $a \in A$ tal que $a \notin F$ e, desse modo, $0 \notin F$.

Proposição 6.12 *Seja F um filtro numa TK-álgebra $\mathcal{A}$. As seguintes condições são equivalentes:*

- (i) F é maximal
- (ii) para todo $a \in A$, ou $a \in F$ ou $\sim a \in I$
- (iii) F é primo

(iv) para todos $a, b \in A$, ou $a - b \in F$ ou $b - a \in F$.

Demonstração: Como A é uma álgebra de Boole, então (i), (ii) e (iii) são equivalentes.

Mostraremos a equivalência entre (iii) and (iv).

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Se $a, b \in A$, então $(a - b) \vee (b - a) = 1 \in F$. Desde que F é primo, então ou $a - b \in F$ ou $b - a \in F$.

(iv) $\Rightarrow$ (iii) Consideremos que $a \vee b \in F$. Se $a \wedge \sim b = a - b \in F$, então $a = (a \wedge b) \vee (a \wedge \sim b) \in F$. Se $b \wedge \sim a = b - a \in F$, então $b \in F$. ■

A próximas definições são específicas para os TK-filtros. A menos que seja observado no texto, toda vez que mencionarmos um filtro, estamos entendendo um TK-filtro.

Para destacarmos um filtro que não seja TK-filtro diremos filtro Booleano.

Definição 6.13 Um filtro F é TK-irredutível se F é próprio e para todos filtros F_1 e F_2 temos:
 $F = F_1 \cap F_2 \Rightarrow F = F_1$ ou $F = F_2$.

Definição 6.14 Um filtro F é TK-maximal se ele é próprio e não está incluso em qualquer filtro próprio distinto de F .

Definição 6.15 Um filtro F é TK-primo se ele é um filtro próprio e para todos $a, b \in A$:
 $\circ a \vee \circ b \in F \Rightarrow \circ a \in F$ or $\circ b \in F$.

Seja F um TK-filtro. Se F é um filtro Booleano primo, então F é um filtro TK-primo. Porém, pode ser que F seja TK-primo mas não Booleano primo.

O mesmo vale para filtros TK-maximais. Além disso, ser Booleano maximal não implica ser TK-filtro e, desse modo, ser filtro TK-maximal.

Exemplos:

(a) Sobre o conjunto $E = \{a, b, c\}$, consideremos a TK-álgebra $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(E), \emptyset, E, \cap, \cup, \overset{C}{\circ}, \circ)$, tal que $\circ E = E$, $\circ\{a\} = \{a\}$, $\circ\{b\} = \circ\{c\} = \circ\{a, b\} = \circ\{a, c\} = \circ\{b, c\} = \circ\{a, b, c\} = \emptyset$.

O TK-filtro $F = \{E, \{a\}\}$ é TK-primo, mas não é primo, pois $\{a, b\} \cup \{c\} = E \in F$, mas $\{a, b\} \notin F$ e $\{c\} \notin F$.

Proposição 6.16 Se um filtro é TK-maximal, então ele é TK-irredutível.

Demonstração: Seja F um filtro TK-maximal. Assim, F é próprio. Além disso, se F_1 e F_2 são dois filtros próprios tais que $F = F_1 \cap F_2$, então $F \subseteq F_1$ e $F \subseteq F_2$. Como F é TK-maximal, então $F = F_1 = F_2$. ■

Exemplo:

(a) Dado o conjunto $E = \{a, b\}$, consideremos a TK-álgebra $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(E), \emptyset, E, \cap, \cup, \overset{C}{\circ}, \circ)$, tal que $\circ E = E$ e $\circ\{a\} = \{a\}$, $\circ\{b\} = \circ\{a, b\} = \{a, b\}$.

O TK-filtro $\{E\}$ é TK-irredutível e está contido no TK-filtro maximal $\{E, \{a\}\}$.

Segue deste exemplo que temos um filtro TK-irredutível que não é TK-maximal.

Proposição 6.17 *Seja A uma TK-álgebra e F um TK-filtro sobre A . Então, F é um filtro TK-primo se, e somente se, para todo $a \in A$: ou $\circ a \in F$ ou $\sim \circ a \in F$.*

Demonstração: $(\Rightarrow)$ Se F é TK-primo, então F é próprio. Agora, se $\circ a \in F$ e $\sim \circ a \in F$, então $\circ a \wedge \sim \circ a = 0 \in F$ e, portanto, F não é próprio. Além disso, como F é primo e $\circ a \vee \sim \circ a = 1 \in F$, então ou $\circ a \in F$ ou $\sim \circ a \in F$.

$(\Leftarrow)$ Por hipótese, F é próprio. Se $\circ a \vee \circ b \in F$ e $\circ a \notin F$, então, pela hipótese, $\sim \circ a \in F$. Desse modo, $\sim \circ a \wedge (\circ a \vee \circ b) \in F$. Mas $\sim \circ a \wedge (\circ a \vee \circ b) = (\sim \circ a \wedge \circ a) \vee (\sim \circ a \wedge \circ b) = (\sim \circ a \wedge \circ b) \leq \circ b$. Logo, $\circ b \in F$ e, assim, F é um filtro TK-primo. ■

Proposição 6.18 *Se um filtro é TK-primo, então ele é TK-maximal.*

Demonstração: Seja F um filtro TK-primo. Se $F \subset M$ e M é um filtro TK-maximal, então tomemos x tal que $x \in M$, mas $x \notin F$.

Como F é um filtro TK-primo, então $\circ x \notin F$ e como M é um filtro TK-maximal, então $\circ x \in M$. Desde que F é um filtro TK-primo, da Proposição 6.17, temos que $\sim \circ x \in F$. Logo, $\circ x \in M$ e $\sim \circ x \in F \subseteq M$, donde segue que $0 = \circ x \wedge \sim \circ x \in M$, isto é, $M = A$. ■

Corolário 6.19 *Se um filtro é TK-primo, então ele é TK-irredutível.*

Demonstração: Segue das Proposições 6.18 e 6.16. ■

Exemplo:

(a) Sobre $E = \{a, b, c\}$, consideremos a TK-álgebra $\mathcal{A} = (\mathcal{P}(E), \emptyset, E, \cap, \cup, {}^C, \circ)$, tal que $\circ E = E$, $\circ \{a\} = \{a\}$, $\circ \{b\} = \{b\}$, $\circ \{c\} = \{c\}$, $\circ \{a, b\} = \{a, b\}$, $\circ \{a, c\} = \circ \{b, c\} = \emptyset$. O TK-filtro $F = \{E, \{c\}\}$ é TK-maximal, mas não é TK-primo pois:

(i) F é TK-maximal: se $F \subset J$ de modo que J é um TK-filtro próprio, então J tem um elemento x tal que $x \notin F$. Se $x = \{a\}$, $x = \{b\}$ ou $x = \{a, b\}$, então $\emptyset = x \cap \{c\} \in J$ e, desse modo, $J = A$, o que contradiz o fato de J ser próprio. Se $x = \{a, c\}$, $x = \{b, c\}$ ou $x = \emptyset$, também temos que $J = A$.

(ii) F não é TK-primo: $\circ \{a\} \vee (\circ \{b\} \cup \circ \{c\}) = E \in F$, mas $\circ \{a\} = \{a\} \notin F$ e $\circ \{b\} \cup \circ \{c\} = \{b, c\} \notin F$.

Definição 6.20 *Uma cadeia de filtros é uma sequência $(F_1, F_2, F_3, \dots)$ de filtros tal que $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$.*

Lema 6.21 *Se $\mathcal{A}$ é uma TK-álgebra e $(F_1, F_2, F_3, \dots)$ é uma cadeia de filtros próprios de $\mathcal{A}$, então a união $\cup F_n$ também é um filtro próprio.*

Demonstração: Sejam $x \in F$ e $y \in A$, como $x \leq y$. Considerando que $F = \cup F_n$, então há $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in F_n$. Como F_n é um TK-filtro, então $y \in F_n \subseteq F$.

Se $x, y \in F = \cup F_n$. Desde que $F_1 \subseteq F_2 \subseteq F_3 \subseteq \dots$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x, y \in F_n$. Como F_n é um TK-filtro, então $x \wedge y \in F_n \subseteq F$. Logo, F é um filtro.

Agora, como $0 \notin F_n$, para todo n , então $0 \notin F$ e, portanto, F é um filtro próprio.

Claramente, F é um TK-filtro. ■

Teorema 6.22 *Cada filtro próprio em uma TK-álgebra está contido em um filtro TK-maximal.*

Demonstração: O resultado segue do lema anterior e do Lema de Zorn. ■

Corolário 6.23 *Seja $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e $a \in \mathcal{A}$ tal que $\circ a \neq 0$. Então, existe um filtro TK-maximal F em que $a \in F$.*

Demonstração: Como $\circ a \neq 0$, então o TK-filtro gerado por a é próprio e, pelo teorema anterior, $[a]$ pode ser incluso num filtro TK-maximal F para o qual $a \in F$. ■

Proposição 6.24 *Sejam $\mathcal{A}$ uma TK-álgebra e F um filtro em $\mathcal{A}$. Se $a \notin F$, então existe um filtro TK-irreducible F^* tal que $F \subseteq F^*$ e $a \notin F^*$.*

Demonstração: Seja S uma ordenação dos TK-filtros J de $\mathcal{A}$ tais que $F \subseteq J$ e $a \notin J$. Pelo Lema de Zorn e Lema 6.21, existe um elemento TK-maximal M em S . Se $M = F_1 \cap F_2$, como $a \notin M$, então $a \notin F_1$ ou $a \notin F_2$. Se $a \notin F_1$, como $F \subseteq M \subseteq F_1$, então $F_1 \in S$ e como M é TK-maximal em S , então $M = F_1$.

Além disso, se $a \notin F_2$, então $M = F_2$. Portanto, M é TK-irreduzível. ■

Nos resultados seguintes precisaremos do conceito de núcleo. Em particular, trataremos com o 1-núcleo.

Definição 6.25 *Sejam $\mathcal{A} = (A, 0, 1, \vee, \sim, \circ)$ e $\mathcal{B} = (B, 0, 1, \vee, \sim, \circ)$ duas TK-álgebras e $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ um homomorfismo. Então, $a \equiv_{N(h)} b \iff h(a) = h(b)$.*

Proposição 6.26 *A relação $\equiv_{N(h)}$ é uma congruência de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$.*

Demonstração: Certamente a relação $\equiv_{N(h)}$ é uma equivalência.

Para ser uma congruência, a função h deve preservar as operações. O homomorfismo Booleano é bastante conhecido.

Verificaremos que h preserva também o operador $\circ$, isto é, que $a \equiv_{N(h)} b$ implica $\circ a \equiv_{N(h)} \circ b$.

De fato, $a \equiv_{N(h)} b \Rightarrow h(a) = h(b) \Rightarrow \circ h(a) = \circ h(b) \Rightarrow h(\circ a) = h(\circ b) \Leftrightarrow \circ a \equiv_{N(h)} \circ b$. ■

Proposição 6.27 *Se $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de TK-álgebras, então:*

$$a \equiv_{N(h)} b \Leftrightarrow a \rightarrow b \in N(h) \text{ e } b \rightarrow a \in N(h).$$

Demonstração: $(\Rightarrow) h(a) = h(b) \Rightarrow \sim h(a) \vee h(b) = 1 \Rightarrow h(\sim a \vee b) = 1 \Rightarrow \sim a \vee b \in N(h) \Rightarrow a \rightarrow b \in N(h)$. De modo semelhante, $b \rightarrow a \in N(h)$.

$(\Leftarrow) a \rightarrow b \in N(h) \Rightarrow \sim a \vee b \in N(h) \Rightarrow h(\sim a \vee b) = 1 \Rightarrow \sim h(a) \vee h(b) = 1 \Rightarrow h(a) \wedge h(b) = h(a) \Rightarrow h(a) \leq h(b)$. Por outro lado, $b \rightarrow a \in N(h) \Rightarrow h(b) \leq h(a)$. Logo, $h(a) = h(b)$. ■

Segue então que $a \rightarrow b \in N(h) \Leftrightarrow h(a) \leq h(b) \Leftrightarrow a \rightarrow b \in h^{-1}(1)$.

Proposição 6.28 *Se $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo de TK-álgebras, então:*

(i) $N(h)$ é um filtro em $\mathcal{A}$

(ii) $N(h)$ é um TK-filtro em $\mathcal{A}$ se e somente se $\circ 1 = 1$.

Demonstração: (i) Como $h(1) = h(1 \vee 0) = h(1 \vee \sim 1) = h(1) \vee \sim h(1) = 1$ temos que $1 \in N(h)$. Do fato de $a, b \in N(h)$, segue que $h(a) = 1 = h(b)$. Dessa forma, $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b) = 1 \wedge 1 = 1$ e, assim, $a \wedge b \in N(h)$. Portanto, $N(h)$ é um filtro.

(ii) Se $h(a) = 1$ então, $h(\circ a) = \circ h(a) = \circ 1$. Decorre que: $a \in N(h)$ se, e somente se, $\circ 1 = 1$. ■

Teorema 6.29 Se $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é um homomorfismo sobrejetivo de TK-álgebras, então:

- (i) $\mathcal{A}|_{N(h)}$ é uma TK-álgebra
- (ii) $\mathcal{A}|_{N(h)} \cong \mathcal{B}$.

Demonstração: (i) Como $\equiv_{N(h)}$ é uma equivalência, então temos um conjunto quociente $\mathcal{A}|_{N(h)}$. Agora, seja $[\cdot] : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}|_{N(h)}$ tal que $[a] = \{b \in \mathcal{A} : a \equiv_{N(h)} b\}$.

Devemos obter um operador de interior em $\mathcal{A}|_{Ker(h)}$.

Consideremos que $\circ[a] = [\circ a]$.

- (1) $\circ[a] \wedge [a] = [\circ a \wedge a] = [\circ a] = \circ[a]$ e, portanto, $\circ[a] \leq [a]$;
- (2) $[a] \leq [b] \Rightarrow [a \rightarrow b] = 1 \Rightarrow \circ[a \rightarrow b] = 1 \Rightarrow [\circ(a \rightarrow b)] = 1 \Rightarrow [\circ a \rightarrow \circ b] = 1 \Rightarrow [\circ a] \leq [\circ b] \Rightarrow \circ[a] \leq \circ[b]$;
- (3) $\circ \circ [a] = \circ[\circ a] = [\circ \circ a] = [\circ a] = \circ[a]$.

(ii) Como usual, definimos $\tilde{h} : \mathcal{A}|_{N(h)} \rightarrow \mathcal{B}$ por $\tilde{h}([a]) = h(a)$. Naturalmente $\tilde{h}$ está bem definida e é bijetiva. Resta-nos mostrar que $\tilde{h}$ preserva a operação $\circ$. De fato: $\tilde{h}(\circ[a]) = \tilde{h}([\circ a]) = h(\circ a) = \circ h(a) = \circ \tilde{h}([a])$. ■

Para a TK-álgebra $\mathcal{A}$, seja U um TK-filtro maximal (ou primo) em $\mathcal{A}$ e consideremos a seguinte relação de equivalência $\equiv_U$ sobre $\mathcal{A}$:

$$a \equiv_U b \Leftrightarrow a \rightarrow b \in U \text{ e } b \rightarrow a \in U.$$

Neste caso, o filtro U é um TK-filtro e maximal, então ele é também TK-maximal. Trata-se de um ultrafiltro. Além disso, como $1 \in U$ então $\circ 1 \in U$.

Proposição 6.30 Se $\mathcal{A}$ é uma TK-álgebra e o TK-filtro U é maximal em $\mathcal{A}$, então:

- (i) a função $h : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}|_U$ definida por $h(a) = [a]$ é um homomorfismo sobrejetivo
- (ii) para todo $a \in \mathcal{A}$, temos que $a \in U \Leftrightarrow a \equiv_U 1$
- (iii) U é o 1-núcleo de h
- (iv) para todo $a \in \mathcal{A}$, vale que $a \notin U \Leftrightarrow a \equiv_U 0$.

Demonstração: (i) É imediato que h é sobrejetiva. A verificação de que h é homomorfismo é similar ao teorema anterior.

(ii) ($\Rightarrow$) Se $a \in U$, como $a = a \vee 0 = a \vee \sim 1 = 1 \rightarrow a \in U$ e $1 = 1 \vee \sim a = a \rightarrow 1 \in U$. Assim, $a \equiv_U 1$. ($\Leftarrow$) Se $a \equiv_U 1$, então $1 \rightarrow a \in U$, mas $1 \rightarrow a = \sim 1 \vee a = 0 \vee a = a \in U$.

(iii) Basta observarmos que $a \equiv_U 1$ se, e somente se, $h(a) = h(1)$.

(iv) Como U é maximal, $a \notin U \Leftrightarrow \sim a \in U \Leftrightarrow \sim a \equiv_U 1 \Leftrightarrow a \equiv_U 0$. ■

Neste caso, $U = N(h)$ e, portanto, $N(h)$ é um TK-filtro e também $\circ 1 = 1$.

Se F é um filtro qualquer, então $\mathcal{A}|_F$ é uma álgebra degenerada se, e somente se, $F = \mathcal{A}$.

Proposição 6.31 Se U é um filtro TK-primo, então a álgebra quociente $\mathcal{A}|_{\equiv_U}$ é linearmente ordenada.

Demonstração: Sejam U um filtro TK-primo e $a, b \in \mathcal{A}$. Assim, ou $a \rightarrow b \in U$ ou $b \rightarrow a \in U$, isto é, $[a] \leq [b]$ ou $[b] \leq [a]$ e, desse modo $\mathcal{A}|_U$ é linearmente ordenado. ■

7 Um conceito de lógica algébrica

Faremos uma pequena adaptação da visão de Paul Halmos (1962) sobre uma definição abstrata e algébrica de Lógica.

No livro mencionado, que traz uma coletânea de artigos de Halmos, o autor trata especificamente da lógica clássica. Podemos, no entanto, estender o tratamento dado pelo autor à outras lógicas, se considerarmos que elas têm, usualmente, modelos algébricos.

Chamamos de lógica algébrica as investigações sobre os modelos algébricos de lógicas. No caso da lógica clássica, por exemplo, seu modelo algébrico é a álgebra de Boole.

Considerando $\mathcal{A}$ como modelo algébrico de uma lógica $\mathbb{L}$ é razoável que $\mathcal{A}$ tenha, no mínimo, uma estrutura de reticulado com 0 e 1. Tal exigência garante que a lógica tenha um menor e um maior elemento, já que em $\mathcal{A}$ existirá uma relação de ordem bem definida, a qual pode ser transferida para a lógica.

Como estamos particularmente interessados nas TK-álgebras, segue que esta exigência é satisfeita, no entanto, uma grande quantidade de outras lógicas também têm modelos algébricos desse tipo.

Para Halmos, em sua caracterização de lógica, os membros de $\mathcal{A}$ são proposições que estão associadas a polinômios bem constituídos em $\mathcal{A}$. Essa associação funciona muito bem, pois, as funções de interpretação são homomorfismos entre a álgebra das fórmulas de $\mathbb{L}$ e polinômios de $\mathcal{A}$.

No entanto, devemos considerar que os polinômios representam todas as fórmulas, inclusive as que representam noções falsas na lógica $\mathbb{L}$. É atribuição da lógica separar dentre todos estes polinômios, aqueles que representam as noções válidas. Ao invés da expressão separar, usaremos o termo filtrar.

Definição 7.1 *Uma lógica algébrica é um par $(\mathcal{A}, F)$, em que $\mathcal{A}$ é um modelo algébrico para $\mathbb{L}$ e F é um filtro sobre $\mathcal{A}$.*

Alegoricamente podemos dizer que o filtro F filtra os elementos válidos de $\mathcal{A}$, que correspondem às fórmulas válidas de $\mathbb{L}$.

Dado um conjunto de axiomas para uma lógica $\mathbb{L}$, por Ax indicaremos o conjunto dos polinômios determinados por tais axiomas, eles geram um filtro que denotaremos por $F = [Ax]$.

Isto ocorre para teorias em geral. O conjunto de axiomas da teoria age como um conjunto de geradores dos teoremas dessa teoria. O filtro nos dá a coleção dos teoremas.

Os algebristas usam mais fortemente o conceito de ideal, que em um reticulado com 0 e 1 aponta para o zero, mas o lógico dá ênfase para o 1 que aponta para as verdades lógicas, filtradas pelo filtro.

Definição 7.2 *Uma teoria de $\mathbb{L}$ é um conjunto de fórmulas fechado para a dedutibilidade de $\mathbb{L}$.*

Com isto, a própria lógica $\mathbb{L}$ é uma teoria sobre $\mathbb{L}$.

Definição 7.3 *Uma teoria T de $\mathbb{L}$ é consistente se não é o caso que, para alguma fórmula φ , tanto φ quanto $\neg\varphi$ sejam teorema se T .*

Do ponto de vista algébrico, quando entendemos que uma teoria consistente T fica determinada por um filtro F , necessariamente tal filtro F não pode conter, simultaneamente, a e $\sim a$. Assim, o filtro F tem que ser próprio para que a teoria correspondente seja consistente.

Definição 7.4 Uma teoria T de $\mathbb{L}$ é completa se, para toda fórmula φ , exatamente uma dentre φ e $\neg\varphi$ é teorema de T .

Novamente do ponto de vista algébrico, se uma teoria T é completa, então o filtro F tem que conter ou a ou $\sim a$ e, desse modo, o filtro F deve ser maximal.

Estes dois últimos conceitos são fundamentalmente sintáticos, dependem apenas de aspectos da dedutibilidade de T e podem ser refletidos apenas na lógica algébrica $(\mathcal{A}, F)$.

Porém, nos textos de lógica, tratamos também do conceito de correção e completude semânticas, os quais exigem uma estrutura matemática para ser modelo da lógica $\mathbb{L}$, embora possa estar separada de $\mathbb{L}$.

A análise destes itens semânticos, que faremos em outra oportunidade, também pode ser desenvolvida no contexto algébrico aqui mencionado. Para tanto precisaremos considerar a existência de outras álgebras do mesmo tipo que $\mathcal{A}$ e os homomorfismos entre tais álgebras.

Com relação às TK-álgebras, enquanto lógicas, sabemos que são consistentes, pois na linguagem das TK-álgebras, dado um elemento atômico a qualquer, não ocorre que a e $\sim a$ sejam concomitantemente válidos em $\mathcal{A}$ e, portanto, $F \neq \mathcal{A}$.

Por outro lado, em geral, a lógica $(\mathcal{A}, F)$ não é uma teoria completa, pois o filtro $F = [Ax]$, em que Ax é o conjunto de axiomas das TK-álgebras, não é maximal.

Em outras oportunidades apresentaremos novos estudos que envolverão as TK-álgebras, os conceitos abstratos de lógica e a dedutibilidade.

8 Referências Bibliográficas

EBBINGHAUS, H. D.; FLUM, J.; THOMAS, W. **Mathematical logic**. New York: Springer-Verlag, 1984.

ENDERTON, H. B. **A mathematical introduction to logic**. San Diego: Academic Press, 1972.

EPSTEIN, R. L. **The semantic foundations of logic**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1990. v.1.

FEITOSA, H. A.; PAULOVICH, L. **Um prelúdio à lógica**. São Paulo: Editora UNESP, 2005.

FEITOSA, H. A.; RODRIGUES, A. P.; SOARES, M. R. Operadores de consequência e relações de consequência. **Kínesis**, v. 8, n. 18, p. 156-171, 2016a.

FEITOSA, H. A.; RODRIGUES, A. P.; SOARES, M. R. Sobre relações de consequência com múltiplas conclusões. **Cognitio: Revista de Filosofia**, v. 17, n.1, p. 73-82, 2016b.

FEITOSA, H. A.; SOARES, M. R.; MOREIRA, A. P. R. Relações de consequência simétrica. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 4., 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2017. p. 306-311. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/>

ermac/caderno-ermac_2017.pdf). Acesso em: 10 nov. 2017.

FONT, J. M.; JANSANA, R.; PIGOZZI, D. A survey of abstract algebraic logic. **Studia Logica**, v. 74, n.1-2, p. 13-97, 2003.

HALMOS, P. R. **Algebraic logic**. New York: Chelsea Publishing Company, 1962.

HALMOS, P. R.; GIVANT, S. **Logic as algebra**. [Washington]: Mathematical Association of America, 1998.

KRACHT, M. Modal consequence relations. In: BLACKBURN, P.; BENTHEM, J.; WOLTER, F. (Ed.). **Handbook of modal logic**. Amsterdam: Elsevier, 2006. v. 3, p. 491-545.

MENDELSON, E. **Introduction to mathematical logic**. Princeton: D. Van Nostrand, 1964.

NASCIMENTO, M. C.; FEITOSA, H. A. As álgebras dos operadores de consequência. **Revista de Matemática e Estatística**, São Paulo, v. 23, n. 1, p. 19-30, 2005.

RASIOVA, H. **An algebraic approach to non-classical logics**. Amsterdam: North-Holland, 1974.

Artigo recebido em jul. 2017 e aceito em nov. 2017.