Revista Eletrônica
Paulista de Matemática

ISSN 2316-9664
Volume 10, dez. 2017
Edição Ermac

**Carina Brabo da Silva
Caramelo**

Rede estadual de ensino
carina.bs2@gmail.com

**Renata Zotin Gomes de
Oliveira**

DM - IGCE - UNESP -
Universidade Estadual Paulista
"Júlio de Mesquita Filho" - Rio
Claro - SP.
rzotin@rc.unesp.br

Educação financeira: uma introdução através de um software

Financial education: an introduction through software

Resumo

A Matemática Financeira está presente na vida de todos os cidadãos e grande parte deles não tem conhecimento necessário para fazer um planejamento financeiro, tomar decisões como comprar à prazo ou guardar dinheiro para comprar à vista. O objetivo desse trabalho, que é parte da dissertação de mestrado pelo programa PROFMAT, é ressaltar a importância do estudo da Matemática Financeira no Ensino Médio, trazendo uma proposta de ensino para tratar desse assunto através do uso de um software educacional livre. Espera-se com isso motivar e despertar o interesse dos alunos para esse assunto que é de extrema importância e que vai refletir no cotidiano deles e de seus familiares.

Palavras-chave: Ensino. Matemática financeira. Software

Abstract

Financial Mathematics is present in the lives of all citizens, and most of them do not have the knowledge necessary to make financial planning, make decisions such as buying on time or saving money to buy cash. The purpose of this work, which is part of the Master's thesis by the PROFMAT program, is to highlight the importance of the study of Financial Mathematics in High School, bringing a teaching proposal to address this subject through the use of free educational software. It is hoped to motivate and awaken students interest in this subject that is of extreme importance and that will reflect in their daily lives and their families.

Keywords: Teaching. Financial math. Software.

1 Introdução

O papel desempenhado pela escola na vida dos alunos, vai muito além de conteúdos teóricos. Espera-se formar cidadãos pensantes, críticos, com valores éticos e morais. Um ponto importantíssimo na formação do aluno é a educação financeira, visto que hoje em dia a quantidade de pessoas inadimplentes é enorme. Os alunos se deparam com muitas opções de crédito, parcelamentos e assim, a matemática pode ser útil na tomada de decisão pela aquisição de algum bem, por exemplo.

Atualmente, na rede estadual de ensino, a Matemática Financeira é vista de forma muito superficial. Este trabalho traz uma proposta para se trabalhar conteúdos da Matemática Financeira com o auxílio de um software, com o intuito de despertar maior interesse nos alunos para esse conteúdo, que é tão importante. Ao trabalhar, discutir e resolver a situação-problema abordada pelo software é importante adequar e introduzir outras situações do cotidiano, trabalhar com valores e taxas reais, para levar o aluno a refletir sobre a importância de fazer um planejamento na aquisição de algum bem material. A proposta de ensino apresentada pressupõe que em cada atividade do software haverá a intervenção do professor, comentando o passo a passo dos cálculos necessários para responder as questões apresentadas em cada etapa.

Para a aplicação da proposta é necessário que os alunos tenham conhecimento de alguns conteúdos preliminares, como: razão, porcentagem e juros simples. Para o professor, seria importante também algum conhecimento sobre equações de diferenças (CIPOLLI, 2012). É importante ressaltar que grande parte desse texto foi publicada no caderno de resumos e trabalhos completos do IV ERMAC - Encontro Regional de Matemática Aplicada e Computacional - 2017, realizado em Bauru-SP, (CAMELO; OLIVEIRA, 2017). Foram acrescentadas algumas atividades, exemplos e telas gráficas e uma seção envolvendo equações de diferenças, visando complementar o texto já publicado.

2 Equações de diferenças

Os conceitos aqui apresentados são baseados em Elaydi (2004) e Cipolli (2012).

Definição 1: Dada uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos sistema dinâmico discreto de primeira ordem como sendo uma sequência de números reais denotados por $x(n)$, para $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, tal que, cada número após o primeiro é relacionado ao anterior através da equação

$$x(n+1) = f(x(n)). \quad (1)$$

A sequência de números dada pela relação

$$x(n+1) - x(n) = h(x(n)) \quad (2)$$

é chamada de equação de diferença de primeira ordem, onde h é uma função real. Se $f(x) = h(x) + x$, estes dois conceitos são equivalentes.

Note que na equação (1) f não depende explicitamente da variável independente, por isso a equação é denominada autônoma. Se na equação (1) substituimos a função f , por uma função g ,

tal que $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, vamos encontrar a equação

$$x(n+1) = g(n, x(n)), \quad (3)$$

que é não autônoma.

Exemplo 1: A equação $x(n+1) = 2x(n) + 7$ é autônoma enquanto que a equação $x(n+1) = 2^n x(n) + 1$ é não autônoma.

Definição 2: Uma equação de diferença de primeira ordem é linear se pode ser escrita como

$$x(n+1) = a(n)x(n) + b(n), \quad (4)$$

com $a(n)$ e $b(n)$ são funções a valores reais.

Se $b(n) = 0$, para todo n , a equação é denominada homogênea. Se $b(n) \neq 0$, para algum n , a equação é denominada não homogênea.

Exemplo 2: A equação $x(n+1) = 5x(n)$ é linear e homogênea enquanto a equação $x(n+1) = \sin\left(\frac{k}{x(n)}\right)x(n)$ é não linear.

Podemos encontrar a solução da equação (4) por meio de iterações. Vamos demonstrar sua validade através do Princípio de Indução Finita, iniciando pela equação homogênea com o fator $a(n) = a$, $a \in \mathbb{R}$.

$$x(n+1) = ax(n), \text{ com } x(0) = x_0, \quad (5)$$

Iterando, obtemos:

$$\begin{aligned} x(1) &= ax(0) = ax_0 \\ x(2) &= ax(1) = a^2x_0 \\ &\vdots \\ x(n) &= a^n x_0. \end{aligned} \quad (6)$$

Vamos demonstrar a validade de (6) por indução. Como $x(0)$ é válido, por ser a condição inicial, supomos que a equação (6) é válida para $n = k$ (hipótese de indução), ou seja,

$$x(k) = a^k x_0.$$

Através da relação de recorrência e usando a hipótese de indução, vamos verificar para $n = k+1$.

$$x(k+1) = ax(k) = aa^k x_0 = a^{k+1} x_0.$$

Logo, (6) é válido para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, sendo assim é solução de (5).

Agora vamos generalizar para uma equação de diferença de primeira ordem homogênea

$$x(n+1) = a(n)x(n), \text{ com } x(0) = x_0 \text{ e } n \geq 0. \quad (7)$$

Iterando, obtemos:

$$x(1) = a(0)x(0) = a(0)x_0$$

$$x(2) = a(1)x(1) = a(1)a(0)x_0$$

$$\vdots$$

$$x(n) = a(n-1)a(n-2) \cdots a(1)a(0)x_0. \quad (8)$$

Vamos demonstrar a validade de (8) por indução. Como $x(0)$ é válido, por ser a condição inicial, supomos que a equação (8) é válida para $n = k$ (hipótese de indução). Logo,

$$x(k) = a(k-1)a(k-2) \cdots a(1)a(0)x_0.$$

Através da relação de recorrência e usando a hipótese de indução, vamos verificar para $n = k + 1$.

$$x(k+1) = a(k)x(k) = a(k)a(k-1)a(k-2) \cdots a(0)x_0.$$

Logo, (8) é válido para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ e assim é solução de (7).

Veremos a seguir dois casos da equação não homogênea.

1º Caso: Quando a equação possui o fator $a(n)$ constante, ou seja, $a(n) = a, \forall n \in \mathbb{Z}^+$.

$$x(n+1) = ax(n) + b(n), \text{ com } x(0) = x_0. \quad (9)$$

Iterando, obtemos:

$$\begin{aligned} x(1) &= ax(0) + b(0) = ax_0 + b(0), \\ x(2) &= ax(1) + b(1) = a^2x_0 + ab(0) + b(1), \\ x(3) &= ax(2) + b(2) = a^3x_0 + a^2b(0) + ab(1) + b(2), \\ &\vdots \\ x(n) &= a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^{n-(i+1)} b(i). \end{aligned} \quad (10)$$

Da mesma forma como fizemos anteriormente a validade de (10) pode ser mostrada por indução finita (CIPOLLI, 2012).

Como $x(0)$ é válido por ser a condição inicial, supomos que a equação 10 é válida para $n = k$ (hipótese de indução), ou seja,

$$x(k) = a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-(i+1)} b(i).$$

Através da relação de recorrência e usando a hipótese de indução, vamos verificar para $n = k + 1$.

$$x(k+1) = ax(k) + b(k)$$

$$x(k+1) = a \left(a^k x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1} b(i) \right) + b(k)$$

$$\begin{aligned}
 &= a^{k+1}x_0 + a \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i-1}b(i) + b(k) = \\
 &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^{k-1} a^{k-i}b(i) + b(k) = \\
 &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^k a^{k-i}b(i) - a^{k-k}b(k) + b(k) = \\
 &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^k a^{k-i}b(i) - b(k) + b(k) = \\
 &= a^{k+1}x_0 + \sum_{i=0}^k a^{k-i}b(i).
 \end{aligned}$$

Logo, (10) é válido para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, sendo assim é solução de (9).

2º Caso: Quando a equação possui ambos os fatores $a(n)$ e $b(n)$ constantes, ou seja, $a(n) = a$ e $b(n) = b$, para $\forall n \in \mathbb{Z}^+$.

$$x(n+1) = ax(n) + b, \text{ com } x(0) = x_0. \quad (11)$$

Iterando, obtemos:

$$\begin{aligned}
 x(1) &= ax(0) + b = ax_0 + b \\
 x(2) &= ax(1) + b = a^2x_0 + ab + b \\
 x(3) &= ax(2) + b = a^3x_0 + a^2b + ab + b \\
 &\vdots \\
 x(n) &= a^n x_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a^i b
 \end{aligned} \quad (12)$$

Note que temos a soma dos n primeiros termos de uma PG. Utilizando sua fórmula temos:

$$x(n) = a^n x_0 + b \left(\frac{a^n - 1}{a - 1} \right), \text{ com } a \neq 1. \quad (13)$$

Novamente, a validade de (13) pode ser verificada por indução finita (CIPOLLI, 2012).

Vejamos agora um exemplo equação de diferença de primeira ordem na matemática financeira.

Exemplo Vamos calcular o valor do montante produzido por um capital de R\$5000,00 aplicado no regime de juros compostos a uma taxa mensal de 2%, durante 10 meses.

Temos que

$$C(n+1) = (1,02)C(n). \quad (14)$$

Vamos denotar por $C(0)$ o capital inicial, ou seja, $C(0) = 5000$. Temos então no primeiro mês R\$5100, no segundo mês R\$5202, no terceiro mês R\$5306,04 e assim por diante. Logo,

$$C(1) = 5100 = (1,02)C(0)$$

$$\begin{aligned}C(2) &= 5202 = (1,02)C(1) = (1,02)^2C(0) \\C(3) &= 5306,04 = (1,02)C(2) = (1,02)^3C(0) \\&\vdots\end{aligned}$$

Observando os cálculos, temos

$$C(n) = (1,02)^nC(0). \quad (15)$$

Para $n = 10$, temos que

$$C(10) = (1,02)^{10}5000 \cong 6094,97.$$

Observamos que no caso das equações de diferenças de primeira ordem lineares sempre é possível obter uma expressão para a solução da equação, o que não ocorre para as equações de diferenças não lineares. Os conceitos de ponto de equilíbrio e estabilidade são úteis na análise do comportamento de soluções de equações de diferenças quando não é possível obtê-la explicitamente. Embora esses conceitos não sejam utilizados na proposta didática a ser apresentada, são fundamentais na formação do professor e podem ser encontrados em Elaydi (2004).

3 Software - descrição

O M3 - Matemática multimídia - é um portal com recursos multimídia para auxiliar o ensino da matemática no Ensino Médio. Foi desenvolvido pela Unicamp, com financiamento do FNDE (Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação), SED (Secretaria Escolar Digital), MCT (Ministério da Ciência e Tecnologia) e MEC (Ministério da Educação).

O portal possui recursos como vídeos, áudios, experimentos e softwares que abordam conteúdos do Ensino Médio. O software utilizado na proposta chama-se: “Como comprar sua moto”. Neste software o aluno irá simular a compra de uma moto, levando em consideração a necessidade de poupar dinheiro para dar de entrada na compra da moto e o financiamento do saldo devedor.

Os objetivos do software são: aplicar o conceito de juros compostos, introduzir o conceito de empréstimos sob juros e mostrar aplicações de progressão geométrica na matemática financeira.

4 Desenvolvimento da proposta

A proposta será desenvolvida da seguinte forma: após uma breve revisão dos conteúdos preliminares, será apresentada a situação problema que o software aborda “como comprar sua moto”. O software é composto por duas atividades e cada uma delas possui algumas etapas a serem cumpridas, onde o aluno precisará fazer algumas escolhas e realizar alguns cálculos. Em Caramelo (2016) é apresentado o passo a passo dos cálculos necessários para obter os valores pedidos e as sugestões de intervenções que deverão ser feitas pelo professor, assim como algumas telas do software. Nesse texto apresentamos algumas atividades e sugestões de intervenção. Se o docente usar o software apenas como aplicação da Matemática Financeira, quatro aulas de 50 minutos são suficientes para o desenvolvimento da proposta. No entanto, se o docente for introduzindo conceitos matemáticos como exponenciais e logaritmos, o software pode ser utilizado durante todo esse período.

4.1 Atividade 1: guardando no banco

Nessa primeira atividade o aluno irá analisar a importância de se poupar dinheiro para aquisição de algum bem material, a diferença em acumular um determinado valor com a aplicação de juros compostos e o acúmulo desse mesmo valor sem juros algum.

Antes de realizar a compra de uma moto é necessário poupar dinheiro, pois as agências financiadoras e lojas costumam cobrar um valor significativo como entrada. Então é proposto ao aluno escolher entre dois valores (R\$50,00 ou R\$100,00) para poupar durante 1, 2 ou 3 anos. A taxa de juros utilizada no software é de 1%.

Como comprar sua moto → **Guardando no Banco** [Mapa](#) [Introdução](#)

Uma moto comum custa cerca de R\$ 7.000,00. Uma das maneiras de se comprar uma dessas é por meio de um financiamento.

Porém, as agências de financiamento e lojas costumam cobrar um valor significativo como entrada. Só então elas parcelam o restante do valor em vários meses.

Nesta primeira atividade, você poderá calcular o quanto de dinheiro irá juntar para a entrada se depositar uma quantidade fixa de dinheiro todo mês.

→ Escolha abaixo quanto dinheiro e por quanto tempo você pretende guardar para dar como entrada na aquisição da moto:

R\$100,00 ▼

2 anos ▼

[Alterar valor inicial](#)

Agora, você analisará como se comporta a sua poupança ao longo dos meses. Assim você verá quanto terá guardado no final do período escolhido.

[Continuar](#)

Figura 1: Tela da 1ª atividade do software.

Após a escolha, o professor deve pedir ao aluno para calcular o valor acumulado nos primeiros meses:

- Valor inicial: R\$100,00.
- Início do 2º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor inicial com a aplicação dos juros.

$$100 + 100 * 1,01 = 201.$$

Total acumulado: R\$201,00.

- Início do 3º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor acumulado no mês anterior com a aplicação dos juros.

$$100 + 201 * 1,01 = 303,01.$$

Total acumulado: R\$303,01.

- Início do 4º mês: temos o novo depósito de R\$100,00 mais o valor acumulado no mês anterior com a aplicação dos juros.

$$100 + 303,01 * 1,01 = 406,04$$

Total acumulado: R\$406,04.

É importante o professor ressaltar que essa forma de utilização de juros é o chamado juro composto.

Após os cálculos terem sido realizados, o aluno poderá responder as questões 1 e 2 propostas pelo software e efetuar o comando “corrigir” do próprio software. Na sequência, o aluno poderá visualizar graficamente o valor acumulado com a aplicação dos juros.

Com os cálculos feitos anteriormente, os alunos irão perceber que é necessário o valor do mês anterior para obter o valor acumulado do mês seguinte. Nesse momento é importante que o professor faça perguntas do tipo: “Qual será o valor acumulado daqui 30 meses?”. “Será que precisamos fazer os cálculos mês a mês?”. “E daqui a n meses?”.

Essas questões irão levar o aluno a refletir sobre a necessidade de termos uma fórmula que calcula o valor acumulado em função do número de períodos, que será denotada por $V(n)$. Ilustramos na tabela a seguir alguns cálculos realizados para obtermos $V(n)$ em função $V(n - 1)$, tomando $V(1)$ como valor inicial.

Tabela 1: Valor acumulado no mês n em função do mês $n - 1$.

Tempo (n)	Valor acumulado $V(n)$
1	$V(1) = 100$
2	$V(2) = 100 + V(1) * 1,01 = 201$
3	$V(3) = 100 + V(2) * 1,01 = 303,01$
4	$V(4) = 100 + V(3) * 1,01 = 406,04$
5	$V(5) = 100 + V(4) * 1,01 = 510,10$
$\vdots$	$\vdots$
30	$V(30) = 100 + V(29) * 1,01$
$\vdots$	$\vdots$
n	$V(n) = 100 + V(n - 1) * 1,01$

Nesse momento o professor pode conduzir alguns questionamentos na tentativa de obter o valor acumulado em qualquer tempo n . É necessário que o professor, junto com os alunos, trabalhe as expressões utilizadas anteriormente para facilitar essa percepção.

Vamos organizar os dados obtidos em uma tabela para uma melhor visualização:

Vale lembrar que é de extrema importância a construção do conhecimento do aluno para que ele consiga associar o padrão descrito na tabela anterior como a soma de uma PG de n termos e razão 1,01. Na tela do software correspondente às questões 3 e 4 têm-se ainda dois *links* contendo a definição de PG, a fórmula do termo geral de uma PG e a dedução da fórmula da soma dos termos de uma PG. Assim, esses conceitos podem ser trabalhados antes ou durante essa

Tabela 2: Cálculo do valor acumulado em função do tempo.

Tempo (n)	Cálculo do valor acumulado $V(n)$
1	$V(1) = 100$
2	$V(2) = 100 + 100 * 1,01$
3	$V(3) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2$
4	$V(4) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + 100 * (1,01)^3$
5	$V(5) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + 100 * (1,01)^3 + 100 * (1,01)^4$
$\vdots$	$\vdots$
n	$V(n) = 100 + 100 * 1,01 + 100 * (1,01)^2 + \dots + 100 * (1,01)^{n-1}$

atividade. Feito isso, ele poderá finalmente escrever a fórmula do valor acumulado em função do tempo

$$V(n) = \frac{100 * [(1,01)^n - 1]}{1,01 - 1} = \frac{100}{0,01} * [(1,01)^n - 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V(n) = 10^4 * [(1,01)^n - 1]. \quad (16)$$

e responder as próximas questões do software, que são descritas a seguir e podem ser visualizadas na tela na Figura 2.

Questão 3: Seguindo o padrão dos casos acima, qual seria o valor acumulado no início do 4o. mês? a) 400,00 b) 103,03 c) 104,06 d) 406,04 e) 510,10.

Questão 4: Perceba que, para saber o total acumulado em cada mês, basta saber o primeiro termo e a razão dessa PG. Com base nisso, responda:

- Qual é a razão (q) dessa PG?
- Qual é o seu primeiro termo (a_1)?

No próximo passo o software traz uma ferramenta que mostra o gráfico dos valores que foram acumulados em cada mês até o final do período escolhido para guardar o dinheiro. Mas antes de utilizar a ferramenta, o ideal é que o professor peça aos alunos para responderem os itens da questão 5 fazendo os cálculos e utilizando a fórmula encontrada anteriormente. Essa questão diz: “Verifique qual será o total acumulado no banco em cada um dos seguintes meses: 8o. mês, 12o. mês e 24o. mês”.

Após realizar os cálculos através da fórmula, os alunos devem utilizar a ferramenta para conferir seus resultados.

O próximo item (questão 6) traz questões que levam o aluno a comparar e perceber a diferença entre aplicar o dinheiro na poupança ou guardar o dinheiro em casa.

Valor com juros: $V(24) = 2.697,35$, já calculado na questão 5.

Valor acumulado sem aplicação dos juros: $100 * 24 = 2.400$.

Diferença entre as duas aplicações: $2.697,35 - 2.400 = 297,35$.

1 Como comprar sua moto → Guardando no Banco

[Mapa](#) [Introdução](#) [Início](#)

1 Perceba que, no início de cada mês, os seguintes valores estão guardados:

2

3 1º mês → 100 reais

4 2º mês → $100 + 1.01 \cdot 100$ reais

5 3º mês → $100 + 1.01 \cdot 100 + 1.01^2 \cdot 100$ reais

Você consegue perceber algum padrão na sequência acima?

Questão 3

A Seguindo o padrão dos casos acima, qual seria o valor acumulado no início do 4º mês?

☐ R\$ 400.00
☐ R\$ 103.03
☐ R\$ 104.06
☒ R\$ 406.04 ✓
☐ R\$ 510.10

✓ [Corrigir item](#)

Note que o valor acumulado no início de cada mês corresponde a uma soma. Cada parcela dessa soma é obtida pelo valor do mês anterior multiplicado por uma constante. Essas parcelas formam uma sequência, chamada de ["Progressão Geométrica"](#) (ou "P. G.").

O valor acumulado no início de cada mês n é dado pela [soma de uma Progressão Geométrica de \$n\$ termos](#), cujo termo inicial é chamado de " a_1 " e a razão é " q ". A expressão que fornece essa soma é:

$$S_n = \frac{a_1 * (1 - q^n)}{1 - q}$$

Questão 4

Perceba que, para saber o total acumulado em cada mês, basta saber o primeiro termo e a razão dessa P. G.. Com base nisso, responda:

A Qual é a razão (q) dessa P. G.?

1,01 ✓

✓ [Corrigir item](#)

B Qual é o seu primeiro termo (a_1)?

100 ✓

✓ [Corrigir item](#)

[Corrigir todas as questões](#) ✓

Continuar

Figura 2: Questões 3 e 4 da 1ª atividade do software.

A razão entre o valor acumulado no último mês na poupança (VAP) e o acumulado no último mês em casa (VAC) é dado por: $\frac{VAP}{VAC} = \frac{2.697,35}{2.400} = 1,12$.

Nessa mesma tela têm-se uma ferramenta com dois gráficos que ilustram os valores que a pessoa teria caso resolvesse guardar dinheiro em casa e os valores acumulados em poupança.

Para finalizar a 1ª atividade, essa mesma tela do software apresenta algumas questões que devem ser respondidas no caderno do aluno. O professor deve pedir que eles pesquisem entre seus colegas, os que fizeram opções diferentes de valores e período de tempo, para comparar e refletir os resultados obtidos. Após os alunos terem respondido essas duas questões no caderno,

Responder no caderno	
Questão 1	
Procure na sala algum outro grupo que tenha escolhido guardar dinheiro pelo mesmo período que você, mas em uma quantidade diferente. Feito isso, responda:	
A	A diferença entre o valor acumulado em casa e no banco foi a mesma?
B	A razão entre o valor acumulado em casa e no banco foi a mesma?

Figura 3: Questão para finalizar a atividade 1.

seria interessante que o professor, junto com os alunos, levantasse as possibilidades possíveis de resultado e discutisse as questões propostas pelo software. Alguns exemplos:

- R\$50,00 em 1 ano (12 meses):

Valor acumulado na poupança: $V(12) = 5 * 10^3 * [(1,01)^{12} - 1] = 634,13$.

Valor acumulado em casa: $50 * 12 = 600$.

Diferença entre as duas aplicações: 34,13.

A razão entre a aplicação na poupança e o valor acumulado em casa: $\frac{634,13}{600} = 1,06$.

- R\$50,00 em 2 anos (24 meses):

Valor acumulado na poupança: $V(24) = 5 * 10^3 * [(1,01)^{24} - 1] = 1.348,67$.

Valor acumulado em casa: $50 * 24 = 1.200$.

Diferença entre as duas aplicações: 148,67.

A razão entre a aplicação na poupança e o valor acumulado em casa: $\frac{1.348,67}{1.200} = 1,12$.

- R\$100,00 em 2 anos (24 meses):

Valor acumulado na poupança: $V(24) = 10^4 * [(1,01)^{24} - 1] = 2.697,35$.

Valor acumulado em casa: $100 * 24 = 2.400$.

Diferença entre as duas aplicações: 297,35.

A razão entre a aplicação na poupança e o valor acumulado em casa: $\frac{2.697,35}{2.400} = 1,12$.

- R\$100,00 em 3 anos (36 meses):

Valor acumulado na poupança: $V(36) = 10^4 * [(1,01)^{36} - 1] = 4.307,69$.

Valor acumulado em casa: $100 * 36 = 3.600$.

Diferença entre as duas aplicações: 707,69.

A razão entre a aplicação na poupança e o valor acumulado em casa: $\frac{4.307,69}{3.600} = 1,2$.

4.2 Atividade 2: o financiamento

Nessa 2ª atividade o aluno vivencia a situação de poupar o dinheiro para dar de entrada na compra da moto e financiar o restante. É apresentado um contexto fictício em que o aluno toma um empréstimo com sua avó e se compromete a pagar mensalmente com parcelas iguais e com juros até que a dívida seja quitada.

Sua avó, como é muito boazinha e ama seu neto, irá emprestar o restante do valor da moto; porém ela irá cobrar os juros de 1% referente ao rendimento que ela teria, caso esse dinheiro estivesse aplicado em uma poupança (vale lembrar que atualmente o rendimento da poupança é inferior a 1%). Supondo o valor da moto de R\$7.000,00 e que o valor poupado (1ª atividade) foi de R\$2.697,35 ainda faltam R\$4.302,65, que é o montante que sua avó irá emprestar.

O aluno poderá escolher o valor da parcela que irá pagar por mês, entre: R\$200,00, R\$250,00, R\$300,00, R\$350,00 ou R\$400,00.

Nessa primeira página da segunda atividade o aluno também estima quantas parcelas ele pagaria, caso não houvesse cobrança de juros. Como o montante a ser emprestado é de R\$4.302,65 e a opção escolhida do valor da parcela é de R\$200,00, temos que: $\frac{4.302,65}{200} = 21,51325$. Logo, se não houvesse cobrança de juros, teríamos 21 parcelas de R\$200,00, totalizando R\$4.200,00. Além disso, teríamos mais 1 parcela de R\$102,65 ($4.302,65 - 4.200 = 102,65$). Então, seriam 22 parcelas.

Após a escolha do valor da parcela, o professor deve pedir para seus alunos realizarem os cálculos para ver como sua dívida irá se comportar nos primeiros meses, levando em conta a situação problema e considerando que a avó não irá cobrar juros no primeiro mês. Na tabela a seguir podemos observar os cálculos:

Com os cálculos realizados, nessa etapa o aluno poderá responder as questões seguintes e visualizar graficamente o comportamento dessa dívida, quando tem-se a aplicação dos juros e o pagamento da parcela.

Após o aluno acompanhar o comportamento da dívida nos primeiros meses, o professor deve conduzir o aluno a perceber que a cada mês sua dívida aumenta, devido a aplicação de juros, e se sua parcela fosse menor que esse rendimento de juros, sua dívida cresceria todo mês.

Como comprar sua moto → O Financiamento

1 Nesta atividade, considerando que, depois de juntar dinheiro para dar como entrada no pagamento da sua moto, você já é maior de idade para poder dirigi-la e, além disso, possui um emprego que lhe possibilita pagar o valor restante em prestações, você explorará nessa atividade um financiamento alternativo: a ajuda da sua avó.

2

3

4

Tendo em vista sua ansiedade para comprar a moto, mas consciente de que as lojas cobram altos juros nos financiamentos, sua avó lhe ofereceu um dinheiro para pagar o valor total restante (4302,65 reais).

Porém, apesar de muito boazinha, ela vai cobrar de você o rendimento que ela deixará de ter por não estar com esse dinheiro investido em uma poupança.

→ Para te ajudar, sua avó deixou você decidir o quanto quer pagar por mês até sanar a dívida. Escolha um valor dentre os disponíveis na lista abaixo.

R\$ 200.00
R\$ 200.00
R\$ 250.00
R\$ 300.00
R\$ 350.00
R\$ 400.00

[Definir valor da parcela](#)

Figura 4: Tela inicial da segunda atividade do software.

Tabela 3: Valor da dívida no tempo n em função de $n - 1$.

Tempo(n)	Valor da dívida D(n)
0	$D(0)=4.302,65$
1	$D(1) = D(0) - 200 = 4.102,65$
2	$D(2) = D(1) * 1,01 - 200 = 3.943,68$
3	$D(3) = D(2) * 1,01 - 200 = 3.783,11$
4	$D(4) = D(3) * 1,01 - 200 = 3.620,94$
5	$D(5) = D(4) * 1,01 - 200 = 3.457,15$
⋮	⋮
15	$D(15) = D(14) * 1,01 - 200$
⋮	⋮
n	$D(n) = D(n - 1) * 1,01 - 200$

Com os cálculos realizados para estimar o valor da dívida nos primeiros meses, os alunos poderão observar que é necessário o valor da dívida do mês anterior para obter o valor da dívida do mês seguinte. De modo análogo à atividade 1, organizamos os valores obtidos da dívida nos primeiros meses em uma tabela, para facilitar a visualização.

Tabela 4: Cálculo do valor da dívida em função do tempo.

Tempo(n)	Valor da dívida D(n)
1	$D(1) = D(0) - 200$
2	$D(2) = D(0) * 1,01 - 200 * (1 + 1,01)$
3	$D(3) = D(0) * (1,01)^2 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2]$
4	$D(4) = D(0) * (1,01)^3 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + (1,01)^3]$
5	$D(5) = D(0) * (1,01)^4 - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + (1,01)^3 + (1,01)^4]$
⋮	⋮
n	$D(n) = D(0) * (1,01)^{n-1} - 200 * [1 + 1,01 + (1,01)^2 + \dots + (1,01)^{n-1}]$

A seguir o professor novamente irá auxiliar seus alunos para que eles associem parte do padrão descrito acima como a soma de uma PG, podendo escrever uma fórmula mais simplificada para calcular o valor da dívida em função do tempo,

$$D(n) = D(0) * (1,01)^{n-1} - 200 * \frac{[(1,01)^n - 1]}{0,01}. \quad (17)$$

Lembrando que $D(0)$ é o valor inicial da dívida e 200 é o valor fixo da parcela a ser paga.

A seguir, através de uma ferramenta do software, o aluno poderá visualizar graficamente o valor da sua dívida mês a mês, mas o ideal é que antes o professor faça algumas perguntas, (como a do exemplo a seguir) e peça para que seus alunos respondam utilizando a fórmula encontrada. Após os cálculos conferir suas respostas através do aplicativo do software.

Exemplo: Qual o valor da dívida no 15º mês?

$$D(15) = 4.302,65 * (1,01)^{14} - 200 * \frac{[(1,01)^{15} - 1]}{0,01} = 1.726,41. \quad (18)$$

Nessa mesma tela do software temos 3 questões que poderiam ser respondidas, apenas visualizando a ferramenta do software, mas os alunos podem responder utilizando a fórmula já encontrada, referente ao valor da dívida em função do tempo.

$$\begin{aligned} D(n) = 0 &\Rightarrow 4.302,65 * (1,01)^{n-1} - 200 * \frac{[(1,01)^n - 1]}{0,01} = 0 \\ &\Rightarrow 4.302,65 * (1,01)^{n-1} + 20.000 * [(1,01)^n - 1] = 0 \\ &\Rightarrow (1,01)^{n-1} = 1,2581. \end{aligned}$$

Para resolver essa equação é necessário introduzir o estudo de função exponencial e logarítmica. Após ser introduzido e trabalhado a função exponencial e logarítmica, os alunos poderão calcular o tempo necessário para quitar a dívida. Logo,

$$(1,01)^{n-1} = 1,2581 \Rightarrow \log_{1,01} 1,2581 = n - 1.$$

Fazendo mudança de base temos: $\log_{1,01} 1,2581 = n - 1 \Rightarrow \frac{\log_{10} 1,2581}{\log_{10} 1,01} = n - 1 \Rightarrow 23,07 = n - 1 \Rightarrow n = 24,07$.

Com isso pode-se concluir que no 24º mês a dívida não estará quitada. Porém, o valor da dívida será menor que o valor das parcelas pagas nos meses anteriores (R\$200,00). Logo, o

Figura 5: Gráfico do valor da dívida mês a mês.

último mês em que a dívida será positiva é no 24º mês. Como foi calculado na questão 5A, que o último mês em que a dívida é positiva é o 24º mês, vamos calcular $D(24)$.

$$D(24) = 4.302,65 * (1,01)^{23} - 200 * \frac{[(1,01)^{24} - 1]}{0,01} = 14,44.$$

Foram pagas 24 parcelas de R\$200,00 e uma parcela de R\$14,44. Logo:

$$24 * 200 + 14,44 = 4.814,44$$

$$4.814,44 - 4.302,65 = 511,79.$$

Ao responder essas questões é importante que os alunos percebam que o valor pago foi maior que o valor emprestado e isso se deve à aplicação de juros.

Na próxima tela do software é a finalização da atividade. Nessa parte o software traz as informações do valor total pago pela moto, que depende dos valores escolhidos nas **duas atividades**: na primeira, o valor a ser poupado e em qual período de tempo, e na segunda, o valor da parcela paga mensalmente para saldar a dívida, que é a diferença entre o valor da moto e o acumulado na poupança.

Antes de finalizar é interessante pedir aos alunos que pesquisem entre seus colegas, os que escolheram outros valores para efetuar o pagamento, para ter essa troca de informações. O ideal seria que o professor junto com os alunos levantassem todas as possibilidades possíveis, para poder comparar os diferentes resultados, com o intuito do aluno perceber claramente que a diferença do pagamento da moto vai depender em proporção direta do valor da parcela paga a cada mês.

Para finalizar a atividade é interessante que o professor leve seus alunos a uma reflexão quanto a importância de fazer um planejamento financeiro para a aquisição de algum bem, podendo dar outros exemplos e até mesmo simular outras situações como a compra de um celular, uma festa de formatura, uma viagem, ou até mesmo uma situação onde é necessário fazer algumas mudanças nas fórmulas utilizadas no software.

4.3 Proposta de uma atividade: festa de formatura

Para complementar o trabalho, sugerimos uma proposta de atividade com o tema “Formatura”, pois é um assunto de interesse dos alunos do Ensino Médio. Ressaltamos que é fundamental que o professor faça intervenções com questionamentos no decorrer da atividade.

Suponhamos que esta atividade esteja sendo desenvolvida com alunos do primeiro ano do Ensino Médio e que a turma tenha o propósito de acumular capital para realizar a festa de formatura ao término do Ensino Médio. O objetivo principal é estimar, sob diferentes estratégias, o valor acumulado durante dois anos.

Atividade 1

Vamos considerar que toda a sala abra uma conta poupança, com juros de 0,5% ao mês, e que façam um depósito inicial v_0 . Considerando $V(n)$ a quantia de dinheiro na poupança no mês n , temos:

$$\begin{aligned}V(0) &= v_0 \\V(1) &= V(0)(1,005) \\V(2) &= V(0)(1,005)^2 \\V(3) &= V(0)(1,005)^3 \\&\vdots \\V(n) &= V(0)(1,005)^n\end{aligned}$$

Assim,

$$V(24) = V(0)(1,005)^{24}.$$

A sala deverá perceber que, no fim do período, dependendo do depósito inicial, o capital acumulado pode não ser suficiente para uma festa de formatura. Então, o professor pode sugerir novas atividades.

Atividade 2

Se desejarmos ter uma certa quantia X , fazendo um depósito inicial $v(0)$, por quanto tempo devemos poupar para obter essa quantia? Usando a expressão para $V(n)$, temos:

$$X = V(0) \cdot (1,005)^n \Rightarrow \frac{X}{V(0)} = (1,005)^n.$$

Após os cálculos a sala poderá concluir que para ter a quantia desejada será necessário um período maior do que 24 meses.

Atividade 3

Qual deveria ser o valor do depósito inicial para que tenhamos a quantia desejada após 24 meses?

$$X = V(0) \cdot (1,005)^{24} \Rightarrow V(0) = \frac{X}{(1,005)^{24}}.$$

Com os cálculos realizados a sala poderá perceber que o depósito inicial deve ser muito alto para obterem o valor X após 24 meses. E se também fossem realizados depósitos mensais?

Atividade 4

Suponha que seja realizado um depósito inicial v_0 . Qual o valor a ser depositado mensalmente para se obter o valor desejado (X) após 24 meses?

Durante o desenvolvimento da atividade o professor deve incluir questionamentos que levem os alunos a refletirem e discutirem sobre suas decisões, exercendo assim o seu papel como educador na formação de cidadãos.

5 Referências bibliográficas

CARAMELO, C. B. S. **Matemática financeira no ensino médio**. 2016. 80 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2016.

CARAMELO, C. B. S.; OLIVEIRA, R. Z. G. Educação financeira: uma introdução através de um software. In: ENCONTRO REGIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL, 4, 2017, Bauru. **Caderno de trabalhos completos e resumos**. Bauru: Unesp, Faculdade de Ciências, 2017. p. 123-130. Disponível em: <http://www.fc.unesp.br/Home/Departamentos/Matematica/ermac/caderno-ermac_2017.pdf>. Acesso em: 06 out. 2017.

CIPOLLI, V. G. **Sistemas dinâmicos discretos: análise de estabilidade**. 2012. 147 f. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Rio Claro, 2012.

ELAYDI, S. **An introduction to difference equations**. 3. ed. New York: Springer, 2004.

OLIVEIRA, S. R.; BARICHELO, L. Como comprar sua moto: software. Disponível em: <<http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1236>>. Acesso em: 10 set. 2015.

Artigo recebido em jun. 2017 e aceito em nov. 2017.