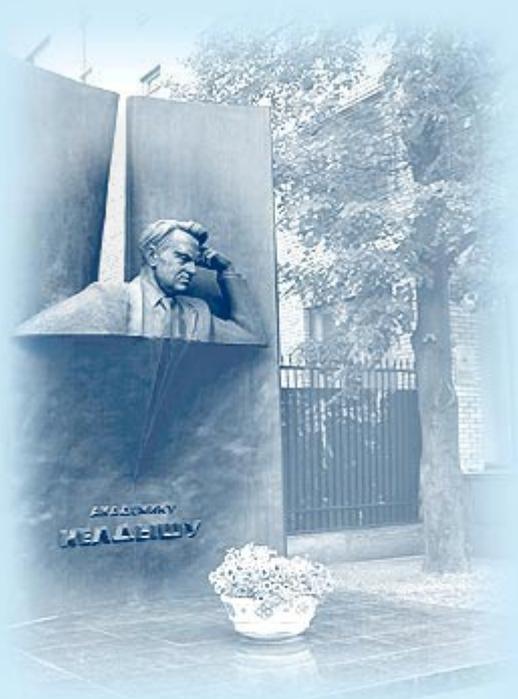




ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 87 за 2021 г.



ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

М.Ш. Поташов, П.В. Бакланов,
С.И. Блинников

Модификация уравнений
переноса излучения для
включения не-ЛТР эффектов
при расчёте кривых блеска
сверхновых радиационно-
гидродинамическим кодом
STELLA

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Поташов М.Ш., Бакланов П.В., Блинников С.И. Модификация уравнений переноса излучения для включения не-ЛТР эффектов при расчёте кривых блеска сверхновых радиационно-гидродинамическим кодом STELLA // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 87. 26 с. <https://doi.org/10.20948/prepr-2021-87>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-87>

**Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.КЕЛДЫША
Российской академии наук**

М. Ш. Поташов, П. В. Бакланов, С. И. Блинников

**Модификация уравнений переноса излучения
для включения не-ЛТР эффектов
при расчёте кривых блеска сверхновых
радиационно-гидродинамическим кодом STELLA**

Москва – 2021

М. Ш. Поташов, П. В. Бакланов, С. И. Блинников

Модификация уравнений переноса излучения для включения не-ЛТР эффектов при расчёте кривых блеска сверхновых радиационно-гидродинамическим кодом STELLA

Наблюдаемые широкополосные кривые блеска сверхновых служат обширным источником информации о физике предсверхновых и о процессах, протекающих при вспышках сверхновых. Их моделирование требует сложных вычислений с помощью радиационно-гидродинамических кодов. В работе предлагается модифицировать радиационно-гидродинамический код STELLA для включения не-ЛТР (локального термодинамического равновесия) эффектов при расчёте кривых блеска сверхновых. В работе приводится теоретическое обоснование необходимости учёта эффектов отказа от приближения ЛТР при расчётах населённостей уровней многозарядной плазмы в оболочках сверхновых. Описывается модификация системы уравнений нестационарного радиационного переноса излучений и уравнения энергии газа для учёта эффектов не-ЛТР. Разбираются различные методы усреднения коэффициентов непрозрачности в расширяющейся оболочке сверхновых.

Ключевые слова: сверхновые, перенос излучения, непрозрачность, неравновесность

M. Sh. Potashov, P. V. Baklanov, S. I. Blinnikov

Modification of the radiation transfer equations to take into account NLTE effects in the simulations of supernova light curves by the radiation-hydrodynamic code STELLA

The observed supernova broadband light curves serve as an extensive source of information about the physics of presupernovae and about the processes taking place during supernova outbursts. Their modeling requires complex calculations using radiation-hydrodynamic codes. The paper proposes to modify the STELLA radiation-hydrodynamic code to take into account NLTE (local thermodynamic equilibrium) effects in the calculation of supernova light curves. The paper provides a theoretical justification for the need to take into account the effects of NLTE when calculating the level number densities of multicharged plasma in a supernova envelope. A modification of equations of time-dependent radiation transfer and the equation of gas energy to take into account the NLTE effects is described. Various methods of mean opacity coefficients in the expanding envelope of supernovae are analyzed.

Key words: supernovae, radiation transfer, opacity, nlte

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-11-00362.

Оглавление

1	Введение	3
2	Краткое описание радиационно- гидродинамического кода STELLA	4
3	О флуоресценции и не-ЛТР	9
4	Об усреднении коэффициентов непрозрачности	13
5	Благодарности	20

1. Введение

Интерес к сверхновым звёздам (SN, supernova) в современной астрофизике велик. Организованы различные крупные обзоры SN – Carnegie Supernova Project [1, CSP], система телескопов панорамного обзора и быстрого реагирования Pan-STARRS [2], глобальная сеть телескопов-роботов MASTER [3], “Обзор тёмной энергии” [4, DES]. Строящаяся обсерватория имени Веры Рубин [5, ранее LSST] скоро присоединится к этому списку. Оценивается, что будут открыты более десяти миллионов SN в течение десяти лет, на широком диапазоне красного смещения с точной равномерной фотометрической калибровкой [5].

Одной из ключевых задач является построение более точных теоретических моделей кривых блеска и спектров SN, описывающих наблюдения. Это позволяет улучшить оценки расстояний до SN во Вселенной. Особенно это важно для прямых методик измерения, не опирающихся на лестницу космологических расстояний [6—10]. Более полное исследование структуры Вселенной позволит продвинуться в решении проблемы неопределённости в измерении параметра Хаббла (Hubble tension) [11—14].

Однако для построения теоретических моделей кривых блеска и спектров SN требуется проведение численных расчётов, самосогласованно учитывающих гидродинамику и многогрупповой перенос излучения в континууме с учётом отклонений от локального термодинамического равновесия (ЛТР, Саха-Больцман) и нестационарности в населённостях уровней многозарядной плазмы оболочек SN. Это даёт систему интегро-дифференциальных уравнений радиационной гидродинамики, полное численное решение которой пока является непосильной задачей даже в одномерном случае. Приходится прибегать к неизбежным упрощениям. В частности, иногда предполагается ЛТР при расчёте населённостей.

Предлагается модифицировать радиационно-гидродинамический код STELLA [15—18], работающий в приближении ЛТР и приблизительно учитывающий эффекты флуоресценции, добавив в его расчёт полный учёт эффектов не-ЛТР для населённостей уровней. Новый проект получил название – NeSTELLA (неравновесная, non equilibrium STELLA).

Повторим основные этапы вывода уравнений переноса излучения, использующихся в STELLA, но немного в другом виде, чем это сделано в [18], акцентируя внимание на аспектах, важных в свете учёта эффектов флуоресценции и не-ЛТР.

2. Краткое описание радиационно-гидродинамического кода STELLA

STELLA — это одномерный (сферически-симметричный) неявный многогрупповой радиационно-гидродинамический код, реализованный в Институте теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ) С.И. Блинниковым [18; 19]. Этот код позволяет достаточно детально делать количественные расчёты SN.

Код STELLA был успешно применён ко всем типам SN: SN Ia [15; 20], SN Ib [21], SN IIP [22], SN IIb [16], SN IIIn [23]. Он особенно эффективен при моделировании выхода ударной волны на поверхность SN [17; 24] и при построении моделей сверхмощных SN (SLSNe), где происходит столкновение последовательных выбросов с образованием плотного слоя [10; 25; 26]. Адаптированный код STELLA также применялся для исследования моделей ореолов гамма-всплесков (GRB afterglow) [27; 28] и для остатков SN [29; 30].

2.1. Уравнения переноса излучения. Выпишем уравнение переноса в сопутствующей системе отсчёта для сферически-симметричного случая с точностью до членов $\mathcal{O}(u/c)$ (см. [31, ур. 14.130; 32, ур. 95.17]):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{c} \frac{DI_\nu}{Dt} + \frac{\mu}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 I_\nu) + \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \left[\frac{1}{r} + \frac{\mu}{c} \left(\frac{u}{r} - \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right] I_\nu \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu \left[(1 - \mu^2) \frac{u}{cr} + \frac{\mu^2}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \right] I_\nu \right) + \left[(3 - \mu^2) \frac{u}{cr} + \frac{(1 + \mu^2)}{c} \frac{\partial u}{\partial r} \right] I_\nu \quad (1) \\ & = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu . \end{aligned}$$

Здесь $I_\nu = I_\nu(t, r, \mu)$ — интенсивность излучения в сопутствующей системе, r — радиус лагранжего слоя, движущегося с радиальной скоростью $u(r)$ (ускорением — членами вида $\partial u / \partial t$, дающими вклад $\mathcal{O}(u/c)^2$, пренебрегают [33, стр. 111; 34, стр. 437]), $D/Dt = \partial/\partial t + u\partial/\partial r$ — лагранжева производная по времени, μ — косинус угла между радиальным направлением и направлением распространения света, η_ν — изотропный коэффициент излучения, χ_ν — изотропный коэффициент ослабления (экстинкции), остальные обозначения стандартны.

Моменты Эддингтона определяются как:

$$[J_\nu, H_\nu, K_\nu, N_\nu] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_\nu(t, r, \mu) [1, \mu, \mu^2, \mu^3] d\mu. \quad (2)$$

Им соответствуют физические величины – плотность энергии, поток, тензор давления и тензор теплового потока излучения.

Взяв нулевой момент от уравнения (1), мы получим (см. [31, ур. 14.131a]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{DJ_\nu}{Dt} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 H_\nu) - \frac{u}{cr} (3K_\nu - J_\nu) \\ + \frac{1}{cr^2} (J_\nu + K_\nu) \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \\ + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} \left(\nu \left[\frac{u}{r} (3K_\nu - J_\nu) - \frac{1}{r^2} K_\nu \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u) \right] \right) \\ = \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu. \end{aligned} \quad (3)$$

А для первого момента (см. [31, ур. 14.131б]):

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{DH_\nu}{Dt} + \frac{\partial K_\nu}{\partial r} + \frac{1}{r} (3K_\nu - J_\nu) + \frac{2}{c} \left(\frac{u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) H_\nu \\ + \frac{u}{cr} \cdot \frac{\partial}{\partial \nu} [\nu (3N_\nu - H_\nu)] - \frac{1}{c} \left(\frac{2u}{r} + \frac{\partial u}{\partial r} \right) \cdot \frac{\partial (\nu N_\nu)}{\partial \nu} \\ = -\chi_\nu H_\nu. \end{aligned} \quad (4)$$

В системе из двух уравнений (3 и 4) четыре неизвестных – моменты Эддингтона. Для исключения второго момента K_ν вводится переменный эддингтоновский фактор $f_{Edd}(r, \nu) = K_\nu/J_\nu$ (квазидиффузия [35, стр. 74; 33, стр. 260]), значение которого находится из решения стационарного уравнения переноса с учётом рассеяния один раз в несколько шагов по времени [18, стр. 89].

Если рассматривать только течения вещества со свободным разлётом $u \propto r$, то из уравнения (4) выпадет третий момент N_ν . В таком случае рассматриваемая система (3 и 4) замкнётся, и её можно будет решать для каждой выбранной частоты. Такой монохроматический подход был избран в коде SMFGEN [36; 37]. Достаточно плотная по частоте сетка позволяет этому коду разрешать линии.

STELLA же была спроектирована для произвольных гидродинамических течений, без ограничения свободного разлёта (например, выход ударной волны на поверхность SN). Анализ размерности уравнения (4) на различных

шкалах времени и для разных режимов распространения излучения показывает [32; 33; 38; 39, стр. 192], что по крайней мере для континуума (влияние смещения частоты $\delta\nu$ становится существенным когда $\delta\nu \sim \nu$) членами, содержащими производные по частоте, можно пренебречь. При этом в уравнении (3) производные по частоте должны остаться [38]. Такое приближение позволяет избавиться от момента N_ν , но в монохроматическом случае только на тех частотах, где нет линий.

Обозначим усреднение на интервале частот $b = (\nu_1, \nu_2)$ некоторой функции f_ν как:

$$\langle f \rangle_b = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \int_{\nu_1}^{\nu_2} f_{\tilde{\nu}} d\tilde{\nu}$$

и перейдём от монохроматического рассмотрения нашей системы ко многогрупповому. Проинтегрируем уравнения (3 и 4) по частотной группе b . Используя правило Лейбница дифференцирования под знаком интеграла и допуская, что производные по частоте считаются приблизительно (разность соседних групп), мы получим точно такую же систему (за исключением правых частей, о чём читай ниже в разделе 4). Однако здесь неизвестными уже станут средние моменты $\langle J \rangle_b$, $\langle H \rangle_b$, $\langle K \rangle_b$, $\langle N \rangle_b$. Производные по частоте описывают переход между группами за счёт доплеровского смещения.

Точно так же, как и в монохроматическом случае, вводится переменный эддингтоновский фактор $f_{Edd}(r, b) = \langle K \rangle_b / \langle J \rangle_b$, величина которого находится из решения стационарного уравнения переноса с учётом рассеяния в частотной группе b один раз на заданное число шагов по времени (обычно это 50).

В STELLA интервалы усреднения получаются разбиением диапазона длин волн от $\lg 1 \text{ \AA}$ до $\lg 50000 \text{ \AA}$ на 100 частей равномерно по десятичному логарифму. Более широкие интервалы будут находиться в инфракрасной зоне, где линии редки, а более узкие – в ультрафиолетовой, где содержится значительное число линий (например, линии железа в ультрафиолетовой полосе). При таком способе разбиения следует ожидать, что функции $\langle H \rangle_b$, $\langle N \rangle_b$ будут гладкими и медленно меняющимися функциями частоты, таким образом, их производными можно пренебречь.

Таким образом, уравнение (3) содержит все члены порядка $\mathcal{O}(u/c)$, следовательно, оно учитывает запаздывание, аберрацию и эффект Доплера. Уравнение же потока (4, без производных $\partial/\partial\nu$) описывает только запаздывание через производную по времени $\partial H/\partial t$.

Здесь следует отметить, что “слепое” увеличение числа энергетических зон и вследствие этого уменьшения их ширины с целью лучшего спектрального разрешения может привести к нарушению гладкости этих функций, и ошибочному результату, не учитывающему производные. В этом смысле

STELLA не может разрешать линии.

В коде STELLA в левой части уравнения гиперболического типа для потока (4) добавляется специальный стабилизирующий член (искусственная вязкость для излучения) $\dot{H}_{\nu\text{diff}}/c$ для численной устойчивости счёта [18, стр. 86, 221]. Стабилизатор важен только на переходных стадиях быстрого изменения потока (например, выход ударной волны). Если светимость вдоль радиуса постоянна, то стабилизатор обнуляется.

Полученная многогрупповая система замкнута. Для граничных условий используются величины граничных эддингтоновских факторов $h_{Edd} = \langle H \rangle_b / \langle J \rangle_b$ [18, стр. 87].

2.2. Уравнение энергии газа. Уравнение состояния идеального газа записывается как

$$P = (N_{\text{ion}} + N_e)kT,$$

где P – давление газа, T – температура, k – постоянная Больцмана, N_{ion} – полная концентрация всех нейтральных и ионизованных атомов, N_e – концентрация электронов. Предполагается одинаковая температура для ионной и электронной компоненты – одножидкостная модель.

Удельная внутренняя энергия вещества E (на грамм) – сумма кинетической энергии всех частиц и энергии возбуждения и ионизации атомов (потенциальная энергия электронов):

$$E = \frac{3}{2} \frac{kT}{\rho} (N_{\text{ion}} + N_e) + \frac{E_{\text{exc}}}{\rho} + \frac{E_{\text{ion}}}{\rho}, \quad (5)$$

$$\text{где } E_{\text{exc}} = \sum_{z,i,j} I_{z,i,j} N_{z,i,j}, \text{ а } E_{\text{ion}} = \sum_{z,i} I_{z,i} N_{z,i}.$$

Здесь ρ – плотность, $I_{z,i,j}$ – энергия возбуждения уровня j элемента z в степени ионизации i , а $N_{z,i,j}$ – населённость этого уровня, $I_{z,i}$ – ионизационный потенциал иона z в степени ионизации i , а $N_{z,i}$ – концентрация этого иона, N_z – концентрация элемента z .

Суммирование ведётся по всем элементам, их степеням ионизации и номерам уровня, что заложены в модель. Условие сохранения числа частиц:

$$\sum_{z,i,j} N_{z,i,j} = \sum_{z,i} N_{z,i} = \sum_z N_z = N_{\text{ion}}.$$

Принято работать не с концентрациями, а с относительными концентрациями – число каких-либо частиц на барион (N_b – концентрация

барионов). Относительная концентрация электронов:

$$Y_e = \frac{N_e}{N_b} = N_e \frac{m_u}{\rho},$$

где m_u – атомная единица массы. Относительные концентрации уровня j , иона i и элементы z :

$$Y_{z,i,j} = N_{z,i,j} \frac{m_u}{\rho} = \frac{X_z N_{z,i,j}}{A_z N_z}, \quad Y_{z,i} = N_{z,i} \frac{m_u}{\rho} = \frac{X_z N_{z,i}}{A_z N_z},$$

$$Y_z = N_z \frac{m_u}{\rho} = \frac{X_z}{A_z}$$

соответственно. Здесь X_z – массовая доля элемента z , A_z – масса элемента z в атомных единицах массы m_u .

Тогда условие сохранения числа частиц будет выражаться как:

$$N_{\text{ion}} \frac{m_u}{\rho} = \sum_{z,i,j} Y_{z,i,j} = \sum_{z,i} Y_{z,i} = \sum_z Y_z = \sum_z \frac{X_z}{A_z} = \frac{1}{A},$$

где определена средняя атомная масса A в атомных единицах массы.

Итоговое выражение для внутренней удельной энергии газа из (5) будет записываться как

$$E = \frac{3kT}{2m_u} \left(\frac{1}{A} + Y_e \right) + \frac{1}{m_u} \sum_{z,i,j} I_{z,i,j} Y_{z,i,j} + \frac{1}{m_u} \sum_{z,i} I_{z,i} Y_{z,i}. \quad (6)$$

Столь подробное описание уравнения (6) было необходимо, так как в коде STELLA отсутствует член E_{exc} . В NeSTELLA мы будем учитывать возбуждённые уровни.

Выпишем, наконец, без доказательства уравнение энергии (см. [18, стр. 87; 40, стр. 26]).

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_{\rho} \frac{\partial T}{\partial t} + 4\pi \frac{\partial r^2 u}{\partial m} \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_{\rho} + q \right] - \varepsilon =$$

$$- \frac{4\pi}{\rho} \int_0^{\infty} (\eta_{\nu} - \chi_{\nu} J_{\nu}) d\nu. \quad (7)$$

Здесь ε – мощность удельного локального нагрева или (при $\varepsilon < 0$) стока тепла (гамма-депозиция, теплопроводность), а q – искусственная вязкость.

Итоговая система (3, 4 и 7) дополняется уравнениями гидродинамики, которые здесь не выписываются (см. [18, стр. 86]). В качестве начальных

данных задаётся модель предсверхновой с определённым способом выделения энергии в центре такой звезды (см. например, [22; 40]). Для решения системы уравнений (3, 4 и 7) используется неявный конечно-разностный метод. В его основе лежит метод линий, или прямых [41] для уравнений радиационной гидродинамики. Пространственные производные заменяются конечными разностями, а возникающая система обыкновенных дифференциальных уравнений решается неявным методом прогноза и коррекции высокого порядка с автоматическим выбором порядка и шага по времени [42]. STELLA, решая уравнения многогруппового переноса излучения, энергии газа (3, 4 и 7) одновременно с уравнениями гидродинамики, позволяет получать как болометрические кривые блеска, так и кривые блеска в отдельных фильтрах.

Однако уравнение состояния в STELLA трактует ионизацию в равновесном приближении Саха, а при расчёте населённостей возбуждённых уровней их заполнение вычисляется по Больцману. Полный коэффициент ослабления только приближённо учитывает флуоресценцию. Обоснуем важность корректного учёта флуоресценции и эффектов не-ЛТР.

3. О флуоресценции и не-ЛТР

Вернёмся к монохроматическому способу описания переноса излучения. В правых частях системы (3, 4 и 7) стоят коэффициенты излучения и непрозрачности, непосредственно зависящие от величин населённостей. Напомним, что все рассуждения ведутся в сопутствующей системе отсчёта, а все коэффициенты рассеяния и эмиссии считаются изотропными.

При моделировании переноса излучения в оболочках SN ключевую роль играет перераспределение частот фотонов в линиях, в связанно-связанных переходах. Фотон, будучи в резонансе с каким-либо переходом, может после возбуждения атома либо излучиться на той же частоте (когерентное рассеяние), либо погибнуть – возбуждение атома будет снято электронным или ионным ударом (истинное поглощение), либо фотон каскадными переходами раздробится на более мягкие, деградируя в область частот с меньшей непрозрачностью (флуоресценция). Соотношение вероятностей этих каналов определяется величиной $\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu$. Её значение на данной частоте задаёт темп изменения плотности излучения, а интеграл по всем частотам – темп изменения внутренней энергии вещества, разогревается вещество или нет. Существенно то, что при чистом рассеянии в линиях энергия фотона не превращается в кинетическую энергию газа. Конечно, если нам известны все населённости из расчёта не-ЛТР, а значит и η_ν , χ_ν на всех частотах, то мы сразу получаем нужные нам темпы изменений J_ν и E . Но в случае ЛТР приходится прибегать к приближенным методам.

Выпишем коэффициент полной экстинкции χ_ν [см⁻¹]:

$$\chi_\nu = \chi_\nu^c + \sum_i \chi_i^l \phi(\nu - \nu_i). \quad (8)$$

Здесь χ_ν^c – полный коэффициент ослабления в континууме, который есть

$$\chi_\nu^c = \chi_\nu^a + \chi_\nu^s, \quad (9)$$

где χ_ν^a – коэффициент истинного поглощения в континууме, χ_ν^s – коэффициент когерентного монохроматического изотропного рассеяния в континууме. В (8) χ_i^l [сек⁻¹см⁻¹] – полный коэффициент поглощения в линии, а $\phi(\nu - \nu_i)$ – профиль поглощения в линии с максимумом в нуле (либо доплеровский для субординатных слабых линий, либо фойгтовский для резонансных сильных, таких как Ly α), нормированный так, что $\int \phi(\nu - \nu_i) d\nu = 1$, ν_i – частота линии. Суммирование по i ведётся по всевозможным линиям. Мы считаем, что профили узки и линии не накладываются друг на друга. Это возможно в приближении Соболева [43—45].

В дальнейшем будем предполагать полное перераспределение по частотам в профилях линий (некогерентное рассеяние в линиях) [31]. Это приближение хорошо работает для большинства линий за исключением таких сильных резонансных, как Ly α (см. [31, 2 том, стр. 49]). В случае полного перераспределения значение коэффициентов χ_i^l выражается через населённости верхних и нижних уровней линий n_u, n_l и B -коэффициенты Эйнштейна как

$$\chi_i^l = \frac{B_{lu} h \nu_{lu}}{4\pi} \left(n_l - n_u \frac{g_l}{g_u} \right).$$

Выпишем теперь уравнение для коэффициента излучения η_ν [г см сек⁻²]:

$$\eta_\nu = \eta_\nu^c + \sum_i \eta_i^l \phi(\nu - \nu_i), \quad (10)$$

где, используя закон Кирхгофа, выпишем выражение для коэффициента теплового излучения в континууме η_ν^c

$$\eta_\nu^c = \chi_\nu^a B_\nu + \chi_\nu^s J_\nu. \quad (11)$$

Здесь B_ν – интенсивность излучения чёрного тела. В (10) η_i^l [г см сек⁻³] – полный коэффициент излучения в линии i , а профиль излучения совпадает с профилем поглощения в силу предположения полного перераспределения по частотам.

Примем, что для всех линий взаимодействие верхнего и нижнего уровня с континуумом и с другими уровнями слабое. Такой подход ещё называют

классической трактовкой образования линии (см. [31, 2 том, стр. 56]), или приближением двухуровневого атома (TLA, two-level atom). Тогда функции источников этих линий можно выписать через среднюю интенсивность в линии \bar{J}_{ν_i} и B_{ν_i} как сумму теплового источника и члена, обусловленного рассеянием [31, ур. 2.41, 11.6]

$$S_{\nu_i}^l = (1 - \varepsilon)\bar{J}_{\nu_i} + \varepsilon B_{\nu_i}. \quad (12)$$

Здесь $\bar{J}_{\nu_i} = \int \phi(\nu - \nu_i) J_{\nu} d\nu$ – средняя интенсивность, усреднённая по профилю линии, а $\varepsilon \approx C_{ul}/(A_{ul} + C_{ul})$ – вероятность гибели фотона при рассеянии в линии (истинное поглощение), где A_{ul} – коэффициент Эйнштейна для перехода с u на l , C_{ul} – число ударных переходов вниз в расчёте на один атом. При строгом ЛТР $\varepsilon = 1$, и все линии становятся тепловыми.

Среднюю интенсивность в линии в приближении Соболева [43—45], можно записать как

$$\bar{J}_{\nu_i} = (1 - \beta)S_{\nu_i}^l + J_{\nu_i}\beta, \quad (13)$$

где β – вероятность локального выхода фотона из профиля за счёт градиента скоростей для рассматриваемой линии. Такое приближение грубо работает и для фойгтовского профиля [46].

Учитывая (12) и (13), можно записать

$$\begin{aligned} \eta_i^l &= S_{\nu_i}^l \chi_i^l \\ &= J_{\nu_i} \frac{\beta(1 - \varepsilon)}{\beta + \varepsilon(1 - \beta)} \chi_i^l + B_{\nu_i} \frac{\varepsilon}{\beta + \varepsilon(1 - \beta)} \chi_i^l \\ &= (1 - q_f) J_{\nu_i} \chi_i^l + q_f B_{\nu_i} \chi_i^l, \end{aligned} \quad (14)$$

где мы ввели фактор термализации

$$q_f = \frac{\varepsilon}{\beta + \varepsilon(1 - \beta)}. \quad (15)$$

Этот фактор меняется в диапазоне от 0 до 1, где 0 соответствует рассеивающим линиям, а 1 – чисто поглощающим. Промежуточные значения симулируют эффект флуоресценции.

Тогда, подставляя (11) и (14) в (10) и объединяя с (8), получаем:

$$\begin{aligned} \eta_{\nu} - \chi_{\nu} J_{\nu} &= \chi_{\nu}^a B_{\nu} + \chi_{\nu}^s J_{\nu} + \sum_i (1 - q_f) J_{\nu_i} \chi_i^l \phi(\nu - \nu_i) + \sum_i q_f B_{\nu_i} \chi_i^l \phi(\nu - \nu_i) \\ &- (\chi_{\nu}^a J_{\nu} + \chi_{\nu}^s J_{\nu} + J_{\nu} \sum_i \chi_i^l \phi(\nu - \nu_i)) \\ &\approx (B_{\nu} - J_{\nu})(\chi_{\nu}^a + \sum_i q_f \chi_i^l \phi(\nu - \nu_i)). \end{aligned} \quad (16)$$

Где в последнем приблизительно равенстве мы учли узость профилей: $J_\nu \phi(\nu - \nu_i) \approx J_{\nu_i} \phi(\nu - \nu_i)$. Отсюда видно, что полученная разница не зависит от рассеяния в континууме. В зависимости от знака $(B_\nu - J_\nu)$ вещество будет либо нагреваться, либо охлаждаться, а величина q_f будет управлять этим темпом. Чем она больше (больше чисто поглощающих линий), тем темп быстрее. Однако при большом q_f самосогласованный счёт может уменьшить значение $(B_\nu - J_\nu)$, и темп разогрева упадёт, так что последнее утверждение в этом случае неверное. Полученное выражение (16) используется в коде STELLA. Более того, в текущей реализации STELLA q_f -фактор, не рассчитывается из (15), а задаётся как свободный параметр, одинаковый для всех линий во всей оболочке SN.

В работе [16] было показано, что простое задание $q_f = 1$, когда все линии являются чисто поглощающими, позволяет получить хорошее согласие модельных кривых блеска с наблюдениями сверхновых, а также с кодом EDDINGTON. В работе [47] при помощи кода SEDONA показали, что приближение TLA хорошо описывает наблюдаемые и модельные кривые блеска, когда в атмосфере доминируют поглощающие линии. Более того, они также проанализировали более полно рассчитанные q_f -факторы, различные для каждого перехода. Значения их оказались близкими к единице. В работе [48] показали, что учёт флуоресценции в более совершенном приближении эквивалентных двухуровневых атомов (ETLA, the Equivalent TLA, [31, 2 том, стр. 137]) даёт очень близкие кривые блеска, полученные в случае чисто поглощающих переходов. Можно сделать вывод, что приближения $q_f = 1$ достаточно для описания величины $\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu$.

Однако в статье [49] проанализированы различные коды на предмет значения принятого в них термализационного параметра q_f . Где-то в трети из них линии атмосферы рассчитываются в приближении доминирования рассеяния в линиях. Ситуацию усугубляет исследование в работе [50], где показано, что другой способ усреднения коэффициентов непрозрачности в коде STELLA приводит к тому, что кривые блеска лучше описываются при q_f , близком к нулю, то есть все линии рассеивающие.

Полностью снять противоречие можно только в том случае, если мы откажемся от приближённого описания флуоресценции в пользу не-ЛТР. Тогда для линий многоуровневого атома нельзя представить функцию источников как сумму тепловой и рассеивающих частей, как мы делали в (12), и функция $\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu$ не упрощается до вида, пропорционального $B_\nu - J_\nu$. В NeSTELLA мы будем использовать выражение:

$$\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu = \chi_\nu^a (B_\nu - J_\nu) + \sum_i (\eta_i^l - J_{\nu_i} \chi_i^l) \phi(\nu - \nu_i) \quad (17)$$

и рассчитывать значение этой величины напрямую из населённостей, определённых решениями не-ЛТР уравнений. При этом полные коэффициенты излучения в линиях нужно считать не из приближённой формулы (14), а определять их как

$$\eta^l = \frac{A_{ul}h\nu_{lu}}{4\pi}n_u. \quad (18)$$

Населённости уровней будут рассчитываться в ходе самосогласованного решения уравнений нестационарной кинетики и уравнений переноса излучения в линиях в приближении Соболева. Такой расчёт реализован в коде LEVELS [51—53] и будет встроен в NeSTELLA методом расщепления по физическим процессам [54].

4. Об усреднении коэффициентов непрозрачности

В разделе 2.1 мы усредняли уравнения переноса (3 и 4) по группе частот b , получая в их правых частях величины $\langle \eta_\nu - \chi_\nu J_\nu \rangle_b$, $-\langle \chi_\nu H_\nu \rangle_b$. При этом неизвестными в этих уравнениях являются функции $\langle J_\nu \rangle_b$, $\langle H_\nu \rangle_b$. Необходимо переработать правые части (3 и 4) в функции от этих неизвестных.

В текущей реализации STELLA правые части уравнений (3 и 4) задаются как $\langle \chi_\nu \rangle_b (\langle B_\nu \rangle_b - \langle J_\nu \rangle_b)$, $-\chi_b^{EP} \langle H_\nu \rangle_b$ соответственно. Здесь χ_ν^{EP} – усреднение Френда-Кастора [55] и Истмана-Пинто [56], полученное ими независимо [33, стр. 133] (см. ещё раздел 4.4).

Предложим другие усреднения для непрозрачностей на основе [57; 18, стр. 90]. Определим средние непрозрачности так:

$$\chi_b^{J_1} = \frac{\langle \chi_\nu J_\nu \rangle_b}{\langle J_\nu \rangle_b}, \quad \chi_b^{J_2} = \frac{\langle \chi_\nu (S_\nu - J_\nu) \rangle_b}{\langle S_\nu \rangle_b - \langle J_\nu \rangle_b}, \quad \chi_b^H = \frac{\langle \chi_\nu H_\nu \rangle_b}{\langle H_\nu \rangle_b}. \quad (19)$$

Здесь $S_\nu = \eta_\nu / \chi_\nu$ – функция источников, $\chi_b^{J_1}$ – прямое среднее, $\chi_b^{J_2}$ – другой вариант задания средней непрозрачности для уравнения средней интенсивности, а χ_b^H – потоковое среднее. Тогда правые части уравнений (3 и 4) будут выглядеть как $\langle \eta_\nu \rangle_b - \chi_b^{J_1} \langle J_\nu \rangle_b$ или $\chi_b^{J_2} (\langle S_\nu \rangle_b - \langle J_\nu \rangle_b)$ и $-\chi_b^H \langle H_\nu \rangle_b$ соответственно. Если средние непрозрачности известны, то правые части (3 и 4) являются функциями неизвестных $\langle J_\nu \rangle_b$, $\langle H_\nu \rangle_b$.

Введённые средние непрозрачности (19) содержат монохроматические величины средней интенсивности и потока. Так как они неизвестны, то приходится заменить их на приближенные значения J^* и H^* . Тогда новым определением средних непрозрачностей будет:

$$\chi_b^{J_1} \approx \frac{\langle \chi_\nu J_\nu^* \rangle_b}{\langle J_\nu^* \rangle_b}, \quad \chi_b^{J_2} \approx \frac{\langle \chi_\nu (S_\nu - J_\nu^*) \rangle_b}{\langle S_\nu \rangle_b - \langle J_\nu^* \rangle_b}, \quad \chi_b^H \approx \frac{\langle \chi_\nu H_\nu^* \rangle_b}{\langle H_\nu^* \rangle_b}. \quad (20)$$

Значения J_ν^* и H_ν^* можно определить из приближённого решения уравнения переноса (1), взяв моменты (2) этого решения.

Иногда полезно использовать ещё более грубое приближение. В частности, мы будем использовать это в разделе 4.4. Заметим, что χ_c – медленная функция частоты, что верно для связанно-свободных переходов, если интервал частот b не будет включать ионизационный скачок. Подставим в (20) выражения монохроматической непрозрачности из (8) и получим новые приближительные формулы средних непрозрачностей в полосе b :

$$\begin{aligned} \chi_b^{J_1} &\approx \chi_c + \frac{\sum_i \chi_i^l \langle J_\nu^* \phi(\nu - \nu_i) \rangle_b}{\langle J_\nu^* \rangle_b}, & \chi_b^{J_2} &\approx \chi_c + \frac{\sum_i \chi_i^l \langle (S_\nu - J_\nu^*) \phi(\nu - \nu_i) \rangle_b}{\langle S_\nu \rangle_b - \langle J_\nu^* \rangle_b}, \\ \chi_b^H &\approx \chi_c + \frac{\sum_i \chi_i^l \langle H_\nu^* \phi(\nu - \nu_i) \rangle_b}{\langle H_\nu^* \rangle_b}. \end{aligned} \quad (21)$$

Опишем плюсы и минусы двух различных средних $\chi_b^{J_1}$ и $\chi_b^{J_2}$. Среднее $\chi_b^{J_1}$ проще вычислять, но при приближении к условиям ЛТР выражение $\langle \eta_\nu \rangle_b - \chi_b^{J_1} \langle J_\nu \rangle_b = \langle \chi_\nu B_\nu \rangle_b - \chi_b^{J_1} \langle B_\nu \rangle_b$ может отклоняться от нуля, а значит, может не сохраняться баланс. В случае среднего $\chi_b^{J_2}$ при стремлении к ЛТР $\chi_b^{J_2} (\langle S_\nu \rangle_b - \langle J_\nu \rangle_b) = \chi_b^{J_2} (\langle B_\nu \rangle_b - \langle B_\nu \rangle_b) = 0$, и баланс сохраняется точно. Однако надо следить за тем, чтобы знаменатель в $\chi_b^{J_2}$ не обращался в нуль.

Ниже мы рассмотрим некоторые приближения J_ν^* и H_ν^* .

4.1. И снова уравнение переноса. Для простоты мы будем предполагать свободный разлёт $u \propto r$. Моделирование показывает, что переход к гомологическому разлёту оболочки типичной SN типа II начинается примерно с 3-го дня после взрыва [58], а для SN Ia в первые минуты [59]. Поэтому рассуждения ниже будут применимы на протяжении большей части эволюции SN, и градиент $\partial u / \partial r = 1/t$, где t – время после взрыва. Однако уравнения можно обобщить и на случай течений, с градиентами отличными от $1/t$.

Уравнение (1) упростится:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \frac{\mu c + v}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} - \frac{\nu}{ct} \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} + \frac{3}{ct} I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu. \quad (22)$$

Здесь $\partial / \partial t$ – эйлерова производная по времени. Анализ размерности уравнения (22) [32; 38; 39, стр. 192] показывает, что его члены в левой части относятся друг к другу как:

$$\frac{L}{cT} : \frac{u}{c} : 1 : 1 : \frac{\nu}{\Delta\nu} \frac{u}{c} : \frac{u}{c}.$$

Здесь L – характерный размер системы, а T – характерное время, разное в разных шкалах и режимах течения [32, раз. 6.5]. Но самое быстрое изменение

первого члена будет в оптически тонком случае при свободном распространении излучения, когда $T = L/c$, а значит, его максимальный масштаб изменения порядка единицы. Отбрасывая члены порядка $\mathcal{O}(u/c)$, адвекцию и аберрацию, упростим уравнение до

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} - \frac{\nu}{ct} \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu. \quad (23)$$

Здесь уже нет различия между производной Эйлера и Лагранжа по времени.

Если мы рассматриваем области частот, густо покрытых линиями (например, линии железа в ультрафиолетовой полосе), то характерная величина $\Delta\nu = \Delta\nu_D$ – это доплеровское уширение. Следовательно,

$$\frac{\Delta\nu_D}{\nu} = \frac{u_{\text{th}}}{c},$$

где u_{th} – тепловая скорость. Значит член, содержащий производную по частоте в уравнении (23), будет относиться к другим как u/u_{th} . В течениях, характерных для SN, выполняется условие $u \gg u_{\text{th}}$, и этот член будет доминирующим. Выполняется так называемое приближение Соболева [33; 43—45].

Между отдельными линиями *разных* частот, смещённых из-за доплеровского эффекта, происходит нелокальное радиационное взаимодействие (НРВ). Рассмотрим некоторую пространственную точку. В случае свободного разлёта линия в этой точке испытывает НРВ с линиями соответствующих концентрических сферических СР-поверхностей (Common point), расположенных вокруг неё (см. [60; 61; 18, стр. 91]). К линиям дублета эту теорию применили в [62], а к линиям произвольного мультиплета в [63; 64]. С таких поверхностей долетают уже покрасневшие фотоны, испущенные более высокоэнергетическими переходами. Эти фотоны находятся в резонансе с линией в данной точке. СР-поверхность максимального радиуса определяется величиной непрозрачности в континууме, то есть её характерный размер $1/\chi_\nu^c$. Всё, что находится на большем расстоянии, чем радиус этой области, термализуется и не влияет на рассматриваемую точку.

В оптически тонком случае такая область может быть большой, по сравнению с характерными масштабами, на которых существенно изменяются параметры вещества, т.е. будут велики и пространственные градиенты. Приходится решать задачу НРВ (23) на больших масштабах [18, стр. 100]. В оптически толстом случае, напротив, такая область геометрически мала, и пространственные градиенты в таком течении невелики, так что можно говорить о диффузии излучения. СР-поверхности в этом случае как бы

“стягиваются” к центру, и все параметры атомов на них приписываются одной пространственной точке.

При рассмотрении проблемы усреднений коэффициентов непрозрачности мы будем работать с оптически толстым случаем, т.е. будем считать, что пространственные градиенты малы. Такие условия выполнены в *подфотосферных* слоях сверхновой. Что касается соотношений этих градиентов интенсивности излучения и скорости его изменения, то обычно рассматривается два случая: динамическое, когда темп изменения излучения важнее, и квазистационарное течение, когда временем пренебрегают.

4.2. Приближение, учитывающее временную производную. Так как в уравнении (23) есть доминирующий член, то к решению (23) можно применить методы теории возмущений – метод малого параметра [65, стр. 277]. В работе [57; 18, стр. 94] рассматривалась эта задача в следующем виде:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \varepsilon \left(\mu \frac{\partial I_\nu}{\partial r} + \frac{(1 - \mu^2)}{r} \frac{\partial I_\nu}{\partial \mu} \right) - \frac{\nu}{ct} \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu, \quad (24)$$

где ε – малый параметр. Решение ищется в виде $I_\nu = I_0 + \varepsilon I_1$.

Выпишем здесь формальные решения для I_0 и I_1 , полученные методом характеристик в работе [57]:

$$I_0(t, r, \mu, \nu) = I_0(t_0, r, \mu, \nu t/t_0) E(t, r, \nu, \nu t/t_0) + ct\nu \int_\nu^{\nu t/t_0} \frac{d\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}^2} \eta(t\nu/\tilde{\nu}, r, \tilde{\nu}) E(t, r, \nu, \tilde{\nu}), \quad (25)$$

$$I_1(t, r, \mu, \nu) = I_1(t_0, r, \mu, \nu t/t_0) E(t, r, \nu, \nu t/t_0) - ct\nu\mu \int_\nu^{\nu t/t_0} \frac{d\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}^2} \frac{\partial I_0(t\nu/\tilde{\nu}, r, \tilde{\nu})}{\partial r} E(t, r, \nu, \tilde{\nu}), \quad (26)$$

где

$$E(t, r, \nu_1, \nu_2) = \exp \left[-ct\nu \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\bar{\nu}}{\bar{\nu}^2} \chi(t\nu/\bar{\nu}, r, \bar{\nu}) \right]. \quad (27)$$

Итоговая интенсивность $I(t, r, \mu, \nu) = I_0 + I_1$. На формирование излучения в точке r в момент времени t на частоте ν влияет излучение, пришедшее с голубой стороны от ν с частотного диапазона $(\nu, \nu t/t_0)$, покрасневшее за счёт доплеровского смещения. Важно обратить внимание на то, что интенсивность зависит от величин, определённых в той же точке r , что верно для оптически толстого в континууме случая, и уже обсуждалось в конце раздела 4.1. В работе [57] отмечено, что начальные данные быстро “забываются”, если t

такое, что $c(t - t_0)\chi_\nu \gg 1$. В этом случае в уравнениях (25 и 26) исчезнут первые слагаемые, и I_0 станет изотропным. Таким образом, в этом приближении решение I_0 быстро сферизуется со временем.

Подставляя в решения (25 и 26) выражения для η и χ из (10) и (8) и используя (2), мы получим следующее:

$$J_\nu^*(t, r) = I_0(t, r, \nu), \quad H_\nu^*(t, r) = \frac{1}{3\mu} I_1(t, r, \mu, \nu). \quad (28)$$

Однако полученные выражения будут чрезвычайно громоздкими.

Если линии считать чисто *тепловыми*, то в (25) вместо η_ν надо писать $B_\nu\chi_\nu$, и выражение для I_0 немного упростится. В этом случае среднюю непрозрачность для уравнения средней интенсивности естественнее искать как:

$$\chi_b^J = \frac{\langle \chi_\nu (B_\nu - J_\nu^*) \rangle_b}{\langle B_\nu \rangle_b - \langle J_\nu^* \rangle_b}. \quad (29)$$

В работе [66] было проведено детальное исследование (29). Считалось что профиль линий $\phi_i(\nu - \nu_i)$ прямоугольный, а населённости определялись в ЛТР. В качестве средней непрозрачности для потока бралось $\chi_b^H = \chi_b^{EP}$. Для SN Ia такая модификация в коде STELLA изменила итоговые кривые блеска незначительно по сравнению со стандартным усреднением [18].

4.3. Квазистационарное приближение. Рассмотрим теперь квазистационарное приближение в оптически толстом случае. В первом приближении отбросим все остальные слагаемые в левой части (23), кроме доминирующего $\partial/\partial\nu$. Тогда мы придём к уравнению Соболева в сопутствующей системе отсчёта [33, стр. 123]:

$$-\frac{\nu}{ct} \frac{\partial I_\nu}{\partial \nu} = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu. \quad (30)$$

Решением этого уравнения будет выражение

$$I(t, r, \mu, \nu) = I(t, r, \mu, \nu_0) E(t, r, \nu, \nu_0) + ct \int_\nu^{\nu_0} \frac{d\tilde{\nu}}{\tilde{\nu}} \eta(t, r, \tilde{\nu}) E(t, r, \nu, \tilde{\nu}), \quad (31)$$

где

$$E(t, r, \nu_1, \nu_2) = \exp \left[-ct \int_{\nu_1}^{\nu_2} \frac{d\bar{\nu}}{\bar{\nu}} \chi(t, r, \bar{\nu}) \right]. \quad (32)$$

Важным отличием от случая (25) является то, что здесь неизотропность граничных данных $I(t, r, \mu, \nu_0)$, где $\nu_0 > \nu$, остается в решении со временем, а

значит, поток определяется уже в первом приближении. В динамическом случае область НРВ расширялась по частоте, учитывая с каждым разом всё большее число новых линий более жёстких частот. В квазистационарном же случае, мы рассматриваем влияние всегда одного диапазона частот, а значит и одного числа линий. Беря последовательно моменты от решения (31), мы получим значения $J_\nu^*(t, r)$ и $H_\nu^*(t, r)$. Выражения будут громоздкими, как и в динамическом случае. Даже для одной изолированной линии, наложенной на континуум, конечные формулы очень громоздки [67].

4.4. Приближение изолированных линий. Полезно рассмотреть ещё один способ усреднения. Будем считать, что все линии *изолированы*, и между различными линиями не будет происходить НРВ. Также не будем учитывать влияние континуума на линию. В этом случае применимо классическое решение Соболева [33, ур. 6.92].

Возьмём малую область частот $\Delta\nu_D \ll \delta\nu \ll \Delta\nu$ из группы b в голубом крыле некоторой изолированной линии i , при этом $\Delta\nu$ – ширина всей группы b . Зададим на частоте $\nu_i + \delta\nu$ граничные условия для интенсивности падающего излучения – I_ν^{inc} . Пусть оно будет в общем случае анизотропно, и его моменты мы обозначим как J_ν^{inc} , H_ν^{inc} . Будем предполагать, что I_ν^{inc} одинакова для всех линий в частотной группе b . Тогда решением (30) для одной линии будет

$$I_i(\nu) = I_\nu^{\text{inc}} e^{-y(\nu)\tau_i} + S_{\nu_i}^l (1 - e^{-y(\nu)\tau_i}), \quad (33)$$

где $y(\nu) = \int_{\nu}^{\infty} \phi(\tilde{\nu} - \nu_i) d\tilde{\nu}$, а

$$\tau_i = \frac{ct}{\nu_i} \chi_i^l \quad (34)$$

– соболевская толщина линии в условиях свободного разлёта, а все остальные обозначения такие же как в разделе 3. Каждая линия в b будет изменять входящую интенсивность I_ν^{inc} на $I_i(\nu)$ на своём отрезке $\delta\nu$. Новые приближённые J^* и H^* будут определяться из моментов этой кусочно-непрерывной функции.

Для вычисления средних непрозрачностей мы будем использовать (21). Заметим, что выполняются равенства

$$\int_{\delta\nu} e^{-y(\nu)\tau_i} d\nu \approx \delta\nu + (e^{-\tau_i} - 1)\Delta\nu_D \approx \delta\nu,$$

$$\int_{\delta\nu} e^{-y(\nu)\tau_i} \phi(\nu - \nu_i) d\nu = \beta,$$

где

$$\beta_i = \frac{1 - e^{-\tau_i}}{\tau_i} \quad (35)$$

– соболевская вероятность выхода фотона из профиля линии. Тогда можно выписать выражения

$$\int_{\delta\nu} I_i(\nu) \approx I_\nu^{\text{inc}} \delta\nu, \quad \int_{\delta\nu} I_i(\nu) \phi(\nu - \nu_i) d\nu = I_\nu^{\text{inc}} \beta_i + S_{\nu_i}^l (1 - \beta_i),$$

$$\int_{\delta\nu} (S_{\nu_i}^l - I_i(\nu)) \phi(\nu - \nu_i) d\nu = (S_{\nu_i}^l - I_\nu^{\text{inc}}) \beta_i. \quad (36)$$

Взяв моменты от уравнений (36) и учтя изотропность всех функций, кроме I_ν^{inc} , из (21) мы получим

$$\chi_b^{J_1} \approx \chi_c + \frac{1}{\Delta\nu} \sum_i \chi_i^l \left(\beta_i + \frac{S_{\nu_i}^l}{J_\nu^{\text{inc}}} (1 - \beta_i) \right),$$

$$\chi_b^{J_2} \approx \chi_c + \frac{1}{\Delta\nu} \sum_i \chi_i^l \beta_i \frac{S_{\nu_i}^l - J_\nu^{\text{inc}}}{\sum_j S_{\nu_j}^l - J_\nu^{\text{inc}}}, \quad (37)$$

$$\chi_b^H \approx \chi_c + \frac{1}{\Delta\nu} \sum_i \chi_i^l \beta_i \frac{H_\nu^{\text{inc}}}{H_\nu^{\text{inc}}}.$$

Средняя непрозрачность для потока не зависит от падающей интенсивности. Оказывается, того же можно добиться и от непрозрачности $\chi_b^{J_1}$, если рассматривать чисто *рассеивающие* линии. В этом случае $S_{\nu_i}^l = J_\nu^{\text{inc}}$, и из (34, 35 и 37) следует итоговое

$$\chi_b^{J_1} \approx \chi_c + \frac{1}{\Delta\nu} \sum_i \chi_i^l, \quad \chi_b^H \approx \chi_c + \frac{\nu}{\Delta\nu} \frac{1}{ct} \sum_i (1 - e^{-\tau_i}), \quad (38)$$

где ν – средняя частота группы b . Того же следует ожидать и в диффузионном пределе $J_\nu^{\text{inc}} \approx S_{\nu_i}^l \approx B_\nu$ для всех типов линий. Важно заметить, что в рассмотренных случаях $\chi_b^{J_2}$ неопределён.

Можно заметить, что $\chi_b^H = \chi_b^{EP}$, то есть выражения совпадают с приближением Френда-Кастора [55] и Истмана-Пинто [56]. Формула χ_b^{EP} в этих работах была получена из стохастических соображений. Сличению различных видов усреднений непрозрачности из этой статьи с приближением χ_b^{EP} посвящено множество работ [18; 50; 57; 66]. Сейчас в STELLA используются усреднения $\chi_b^{J_1}$ и χ_b^H из (38).

Из этого раздела видно, что приближение Истмана-Пинто верно только в том случае, когда влияние НРВ и континуума на линию мало. В следующем разделе 4.5 мы рассмотрим, как будут выглядеть усреднения в диффузионном пределе в случае учёта НРВ.

4.5. Диффузионное приближение. В NeSTELLA мы предполагаем использовать другое приближение, предложенное в работе [57; 18, стр. 97]. Вернёмся к разделу 4.2. Будем считать, что в (25) $I_0 \approx B_\nu$, что соответствует диффузионному приближению в сопутствующей системе [33, стр. 117], характерному для оптически толстых подфотосферных слоёв. Так как B_ν и её градиент медленно изменяющиеся функции частоты, то в (26) член $\partial/\partial r$ достают из-под интеграла, заменяя его средним $\langle \frac{\partial B_\nu}{\partial r} \rangle$ по интервалу частот $\Delta\nu \sim \nu/(\chi_c ct)$, или же оценивают его выражением $\partial B_\nu/\partial r$. Тогда для (28) мы получаем

$$J_\nu^*(t, r) = B_\nu(t, r), \quad H_\nu^*(t, r) = -\frac{1}{3\chi_\nu^{\text{exp}}} \frac{\partial B_\nu}{\partial r}. \quad (39)$$

Здесь вводится понятие χ_ν^{exp} – монохроматической непрозрачности при расширении. (см. [18, ур. 2.37; 50, ур. 2]).

Заметим, что скорость распространения излучения $|H_\nu^*|/E$, где E – это плотность энергии излучения, и в нашем случае $E = 4\pi B/c$. Из (39) следует

$$\frac{|H_\nu^*|}{E} \approx \frac{\lambda_p B}{3L E} = \frac{1}{12\pi} \frac{\lambda_p}{L} c,$$

где $\lambda_p = 1/\chi_\nu^{\text{exp}}$ – длина свободного пробега фотона, а L – характерный масштаб системы. В оптически тонком случае $\lambda_p \gg L$, и скорость распространения начинает превышать скорость света. Весь наш вывод предполагал большую оптическую толщину. Но чтобы во время счёта избежать превышения скорости света, в оптически тонком случае обычно вводятся ограничители потока [39, стр. 231; 33, стр. 265]. Вопрос о конкретном виде ограничителя потока не обсуждается в этой статье.

Подставляя (39) в (20), получим итоговые средние непрозрачности, которые предполагается использовать в коде NeSTELLA.

5. Благодарности

Авторы благодарны Андрею Юдину и Владимиру Гасилову. Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, проект № 21-11-00362.

Список литературы

1. *Hamuy M., Folatelli G., Morrell N. I.* [и др.]. The Carnegie Supernova Project: The Low-Redshift Survey // The Publications of the Astronomical Society of the Pacific. — 2006. — Янв. — Т. 118, № 839. — С. 2—20. — DOI: [10.1086/500228](https://doi.org/10.1086/500228). — arXiv: [astro-ph/0512039](https://arxiv.org/abs/astro-ph/0512039) [astro-ph]. — (Цит. на с. 3).

2. *Chambers K. C., Magnier E. A., Metcalfe N.* [и др.]. The Pan-STARRS1 Surveys // arXiv e-prints. — 2016. — Дек. — arXiv: [1612.05560](https://arxiv.org/abs/1612.05560) [[astro-ph.IM](#)]. — (Цит. на с. 3).
3. *Lipunov V., Kornilov V., Gorbovskey E.* [и др.]. Master Robotic Net // Advances in Astronomy. — 2010. — ЯНВ. — Т. 2010. — С. 349171. — DOI: [10.1155/2010/349171](https://doi.org/10.1155/2010/349171). — arXiv: [0907.0827](https://arxiv.org/abs/0907.0827) [[astro-ph.HE](#)]. — (Цит. на с. 3).
4. *DES Collaboration, Abbott T. M. C., Aguena M.* [и др.]. Dark Energy Survey Year 3 Results: Cosmological Constraints from Galaxy Clustering and Weak Lensing. — 2021. — Май. — arXiv: [2105.13549](https://arxiv.org/abs/2105.13549) [[astro-ph.CO](#)]. — (Цит. на с. 3).
5. *LSST Science Collaboration, Abell P. A., Allison J.* [и др.]. LSST Science Book, Version 2.0. — 2009. — Дек. — arXiv: [0912.0201](https://arxiv.org/abs/0912.0201) [[astro-ph.IM](#)]. — (Цит. на с. 3).
6. *Kirshner R. P., Kwan J.* Distances to extragalactic supernovae // The Astrophysical Journal. — 1974. — Окт. — Т. 193. — С. 27. — DOI: [10.1086/153123](https://doi.org/10.1086/153123). — (Цит. на с. 3).
7. *Baron E., Nugent P. E., Branch D., Hauschildt P. H.* Type IIP Supernovae as Cosmological Probes: A Spectral-fitting Expanding Atmosphere Model Distance to SN 1999em // The Astrophysical Journal. — 2004. — Дек. — Т. 616, № 2. — С. L91—L94. — DOI: [10.1086/426506](https://doi.org/10.1086/426506). — arXiv: [0410153](https://arxiv.org/abs/0410153) [[astro-ph](#)]. — (Цит. на с. 3).
8. *Blinnikov S. I., Potashov M. S., Baklanov P. V., Dolgov A. D.* Direct determination of the hubble parameter using type II_n supernovae // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2012. — Авг. — Т. 96, № 3. — С. 167—171. — (Цит. на с. 3).
9. *Potashov M. S., Blinnikov S. I., Baklanov P. V., Dolgov A. D.* Direct distance measurements to SN 2009ip // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters. — 2013. — Февр. — Т. 431, № 1. — С. L98—L101. — DOI: [10.1093/mnrasl/slt016](https://doi.org/10.1093/mnrasl/slt016). — arXiv: [1212.6893](https://arxiv.org/abs/1212.6893). — (Цит. на с. 3).
10. *Бакланов П. В., Блинников С. И., Поташов М. Ш., Долгов А. Д.* Изучение сверхновых, важных для космологии // Письма в Журнал экспериментальной и теоретической физики. — 2013. — Т. 98, № 7. — С. 489. — DOI: [10.7868/S0370274X13190156](https://doi.org/10.7868/S0370274X13190156). — arXiv: [/arxiv.org/abs/1502.06798](https://arxiv.org/abs/1502.06798). — (Цит. на с. 3, 4).

11. *Riess A. G., Casertano S., Yuan W.* [и др.]. Milky Way Cepheid Standards for Measuring Cosmic Distances and Application to Gaia DR2: Implications for the Hubble Constant // *The Astrophysical Journal*. — 2018. — Апр. — Т. 861, № 2. — С. 126. — DOI: [10.3847/1538-4357/aac82e](https://doi.org/10.3847/1538-4357/aac82e). — arXiv: [1804.10655](https://arxiv.org/abs/1804.10655). — (Цит. на с. 3).
12. *Mörtsell E., Dhawan S.* Does the Hubble constant tension call for new physics? // *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*. — 2018. — Сент. — Т. 2018, № 09. — С. 025—025. — DOI: [10.1088/1475-7516/2018/09/025](https://doi.org/10.1088/1475-7516/2018/09/025). — arXiv: [1801.07260](https://arxiv.org/abs/1801.07260). — (Цит. на с. 3).
13. *Ezquiaga J. M., Zumalacárregui M.* Dark Energy in Light of Multi-Messenger Gravitational-Wave Astronomy // *Frontiers in Astronomy and Space Sciences*. — 2018. — Дек. — Т. 5. — С. 1—36. — DOI: [10.3389/fspas.2018.00044](https://doi.org/10.3389/fspas.2018.00044). — arXiv: [1807.09241](https://arxiv.org/abs/1807.09241). — (Цит. на с. 3).
14. *Taubenberger S., Suyu S. H., Komatsu E.* [и др.]. The Hubble Constant determined through an inverse distance ladder including quasar time delays and Type Ia supernovae // *Astronomy & Astrophysics*. — 2019. — Авг. — Т. 628. — С. L7. — DOI: [10.1051/0004-6361/201935980](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201935980). — arXiv: [1905.12496](https://arxiv.org/abs/1905.12496). — (Цит. на с. 3).
15. *Blinnikov S. I., Röpke F. K., Sorokina E. I.* [и др.]. Theoretical light curves for deflagration models of type Ia supernova // *Astronomy & Astrophysics*. — 2006. — Июль. — Т. 453, № 1. — С. 229—240. — DOI: [10.1051/0004-6361:20054594](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20054594). — (Цит. на с. 3, 4).
16. *Blinnikov S. I., Eastman R. G., Bartunov O. S.* [и др.]. A Comparative Modeling of Supernova 1993J // *The Astrophysical Journal*. — 1998. — Март. — Т. 496, № 1. — С. 454—472. — DOI: [10.1086/305375](https://doi.org/10.1086/305375). — arXiv: [9711055](https://arxiv.org/abs/9711055) [[astro-ph](https://arxiv.org/abs/9711055)]. — (Цит. на с. 3, 4, 12).
17. *Blinnikov S. I., Lundqvist P., Bartunov O. S.* [и др.]. Radiation Hydrodynamics of SN 1987A. I. Global Analysis of the Light Curve for the First 4 Months // *The Astrophysical Journal*. — 2000. — Апр. — Т. 532, № 2. — С. 1132—1149. — DOI: [10.1086/308588](https://doi.org/10.1086/308588). — (Цит. на с. 3, 4).
18. *Блинников С. И.* Нестационарные радиационные и гидродинамические процессы в сверхновых звездах : диссертация / Блинников Сергей И. — 2000. — (Цит. на с. 3—5, 7, 8, 13, 15—17, 19, 20).
19. *Blinnikov S. I., Bartunov O. S.* Non-equilibrium radiative transfer in supernova theory : models of linear type II supernovae. // *Astronomy and Astrophysics*. — 1993. — Июнь. — Т. 273. — С. 106. — (Цит. на с. 4).

20. *Blinnikov S. I., Sorokina E. I.* Type Ia Supernova models: Latest developments // *Astrophysics and Space Science*. — 2004. — Т. 290, № 1/2. — С. 13—28. — DOI: [10.1023/B:ASTR.0000022161.03559.42](https://doi.org/10.1023/B:ASTR.0000022161.03559.42). — (Цит. на с. 4).
21. *Tolstov A. G.* Simulations of multigroup relativistic radiative transfer for shock waves in supernovae // *Astronomy Letters*. — 2010. — Февр. — Т. 36, № 2. — С. 109—115. — DOI: [10.1134/S1063773710020039](https://doi.org/10.1134/S1063773710020039). — (Цит. на с. 4).
22. *Baklanov P. V., Blinnikov S. I., Pavlyuk N. N.* Parameters of the classical type-II supernova SN 1999em // *Astronomy Letters*. — 2005. — Июль. — Т. 31, № 7. — С. 429—441. — DOI: [10.1134/1.1958107](https://doi.org/10.1134/1.1958107). — (Цит. на с. 4, 9).
23. *Chugai N. N., Blinnikov S. I., Cumming R. J.* [и др.]. The Type II_n supernova 1994W: evidence for the explosive ejection of a circumstellar envelope // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2004. — Авг. — Т. 352, № 4. — С. 1213—1231. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2004.08011.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2004.08011.x). — arXiv: [0405369](https://arxiv.org/abs/0405369) [astro-ph]. — (Цит. на с. 4).
24. *Tolstov A. G., Blinnikov S. I., Nadyozhin D. K.* Coupling of matter and radiation at supernova shock breakout // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2013. — Т. 429, № 4. — С. 3181—3199. — DOI: [10.1093/mnras/sts577](https://doi.org/10.1093/mnras/sts577). — arXiv: [arXiv:1212.3662v1](https://arxiv.org/abs/1212.3662v1). — (Цит. на с. 4).
25. *Woosley S. E., Blinnikov S. I., Heger A.* Pulsational pair instability as an explanation for the most luminous supernovae // *Nature*. — 2007. — Ноябрь. — Т. 450, № 7168. — С. 390—392. — DOI: [10.1038/nature06333](https://doi.org/10.1038/nature06333). — (Цит. на с. 4).
26. *Baklanov P. V., Sorokina E. I., Blinnikov S. I.* Hydrogenless superluminous supernova PTF12dam in the model of an explosion inside an extended envelope // *Astronomy Letters*. — 2015. — Т. 41, № 3/4. — С. 95—103. — DOI: [10.1134/S1063773715040027](https://doi.org/10.1134/S1063773715040027). — arXiv: [1505.05372](https://arxiv.org/abs/1505.05372). — (Цит. на с. 4).
27. *Blinnikov S. I., Postnov K. A.* A mini-supernova model for optical afterglows of gamma-ray bursts // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 1998. — Янв. — Т. 293, № 1. — С. L29—L32. — DOI: [10.1046/j.1365-8711.1998.01251.x](https://doi.org/10.1046/j.1365-8711.1998.01251.x). — (Цит. на с. 4).
28. *Badjin D. A., Blinnikov S. I., Postnov K. A.* Thermal emission in gamma-ray burst afterglows // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2013. — Т. 432, № 3. — С. 2454—2462. — DOI: [10.1093/mnras/stt603](https://doi.org/10.1093/mnras/stt603). — arXiv: [1304.2793](https://arxiv.org/abs/1304.2793) [astro-ph.HE]. — (Цит. на с. 4).

29. *Sorokina E. I., Blinnikov S. I., Kosenko D. I., Lundqvist P.* Dynamics and radiation of young type-Ia supernova remnants: Important physical processes // *Astronomy Letters*. — 2004. — Ноябрь. — Т. 30, № 11. — С. 737—750. — DOI: [10.1134/1.1819492](https://doi.org/10.1134/1.1819492). — (Цит. на с. 4).
30. *Kosenko D., Blinnikov S. I., Vink J.* Modeling supernova remnants: effects of diffusive cosmic-ray acceleration on the evolution and application to observations // *Astronomy & Astrophysics*. — 2011. — Август. — Т. 532. — A114. — DOI: [10.1051/0004-6361/201116630](https://doi.org/10.1051/0004-6361/201116630). — arXiv: [1105.5966](https://arxiv.org/abs/1105.5966). — (Цит. на с. 4).
31. *Михалас Д.* Звёздные атмосферы: В 2-х частях. — Москва : Мир, 1982. — (Цит. на с. 4, 5, 10—12).
32. *Mihalas D., Mihalas B. W.* Foundations of radiation hydrodynamics. — 1984. — (Цит. на с. 4, 6, 14).
33. *Castor J. I.* Radiation hydrodynamics. — Cambridge University Press, 2004. — С. 355. — (Цит. на с. 4—6, 13, 15, 17, 18, 20).
34. *Hubeny I., Mihalas D.* Theory of Stellar Atmospheres. — Princeton University Press, 2014. — С. 923. — (Цит. на с. 4).
35. *Четверушкин Б.* Математическое моделирование задач динамики излучающего газа. — Наука, 1985. — С. 303. — (Цит. на с. 5).
36. *Hillier D. J., Dessart L.* Time-dependent radiative transfer calculations for supernovae // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2012. — Июль. — Т. 424, № 1. — С. 252—271. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21192.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21192.x). — (Цит. на с. 5).
37. *Li C., Hillier D. J., Dessart L.* Non-thermal excitation and ionization in supernovae // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2012. — Окт. — Т. 426, № 2. — С. 1671—1686. — DOI: [10.1111/j.1365-2966.2012.21198.x](https://doi.org/10.1111/j.1365-2966.2012.21198.x). — arXiv: [1206.0215](https://arxiv.org/abs/1206.0215). — (Цит. на с. 5).
38. *Buchler R. J.* Radiation transfer in the fluid frame // *Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer*. — 1983. — Ноябрь. — Т. 30, № 5. — С. 395—407. — DOI: [10.1016/0022-4073\(83\)90102-4](https://doi.org/10.1016/0022-4073(83)90102-4). — (Цит. на с. 6, 14).
39. *LeVeque R. J., Mihalas D., Muller M. E., Dorfi E.A.* Computational Methods for Astrophysical Fluid Flow. — Berlin: Springer Verlag, 1998. — (Цит. на с. 6, 14, 20).
40. *Бакланов П. В.* Радиационно-гидродинамические модели сверхновых для целей космологии и нелТЭР эффекты : дис. ... канд. / Бакланов Пётр В. — 2014. — (Цит. на с. 8, 9).

41. *Hyman J. M.* The Method of Lines Solution of Partial Differential Equations. — Sagwan Press, 2015. — С. 116. — (Цит. на с. 9).
42. *Gear C. W.* Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations. — Prentice Hall, 1971. — С. 253. — (Цит. на с. 9).
43. *Соболев В. В.* Движущиеся оболочки звёзд. — Ленинград : Издательство Ленинградского государственного ордена Ленина университета, 1947. — С. 113. — (Цит. на с. 10, 11, 15).
44. *Sobolev V. V.* Moving envelopes of stars. — 1960. — (Цит. на с. 10, 11, 15).
45. *Castor J. I.* Spectral Line Formation in Wolf-Rayet Envelopes* // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 1970. — Июль. — Т. 149, № 2. — С. 111—127. — DOI: [10.1093/mnras/149.2.111](https://doi.org/10.1093/mnras/149.2.111). — (Цит. на с. 10, 11, 15).
46. *Chugai N. N.* Scattering of Lyman- α photons in expanding envelopes of large optical depth // Soviet Astronomy Letters. — 1980. — Т. 6. — С. 91—93. — (Цит. на с. 11).
47. *Kasen D., Thomas R. C., Nugent P.* Time-dependent Monte Carlo Radiative Transfer Calculations for Three-dimensional Supernova Spectra, Light Curves, and Polarization // The Astrophysical Journal. — 2006. — Ноябрь. — Т. 651, № 1. — С. 366—380. — DOI: [10.1086/506190](https://doi.org/10.1086/506190). — (Цит. на с. 12).
48. *Pinto P. A., Eastman R. G.* The Physics of Type Ia Supernova Light Curves. II. Opacity and Diffusion // The Astrophysical Journal. — 2000. — Февр. — Т. 530, № 2. — С. 757—776. — DOI: [10.1086/308380](https://doi.org/10.1086/308380). — (Цит. на с. 12).
49. *Kozyreva A., Shingles L., Mironov A.* [и др.]. The influence of line opacity treatment in stella on supernova light curves // Monthly Notices of the Royal Astronomical Society. — 2020. — Окт. — Т. 499, № 3. — С. 4312—4324. — DOI: [10.1093/mnras/staa2704](https://doi.org/10.1093/mnras/staa2704). — arXiv: [2009.01566](https://arxiv.org/abs/2009.01566). — (Цит. на с. 12).
50. *Potashov M. S., Blinnikov S. I., Sorokina E. I.* Непрозрачность разлетающегося вещества в расчетах кривых блеска сверхновых // Письма в астрономический журнал: Астрономия и космическая астрофизика. — 2021. — Т. 47, № 04. — С. 239—249. — DOI: [10.31857/S0320010821030062](https://doi.org/10.31857/S0320010821030062). — (Цит. на с. 12, 19, 20).
51. *Potashov M. S., Blinnikov S. I., Utrobin V. P.* Time-dependent ionization in the envelopes of type II supernovae at the photospheric phase // Astronomy Letters. — 2017. — Янв. — Т. 43, № 1. — С. 36—49. — DOI: [10.1134/S1063773717010030](https://doi.org/10.1134/S1063773717010030). — arXiv: [1707.02177](https://arxiv.org/abs/1707.02177). — (Цит. на с. 13).

52. *Potashov M. S., Yudin A. V.* A simple model of time-dependent ionization in Type II supernova envelopes // *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*. — 2020. — Янв. — Т. 491, № 2. — С. 2674—2687. — DOI: [10 . 1093/mnras/stz3152](https://doi.org/10.1093/mnras/stz3152). — arXiv: [1906.11206](https://arxiv.org/abs/1906.11206). — (Цит. на с. 13).
53. *Поташов М. Ш.* Эффекты неравновесности и нестационарности в оболочках сверхновых : дис. ... канд. / Поташов М. Ш. — 2020. — (Цит. на с. 13).
54. *Федоренко Р.* Введение в вычислительную физику. — 1994. — (Цит. на с. 13).
55. *Friend D. B., Castor J. I.* Stellar winds driven by multiline scattering // *The Astrophysical Journal*. — 1983. — Сент. — Т. 272. — С. 259. — DOI: [10 . 1086/161289](https://doi.org/10.1086/161289). — (Цит. на с. 13, 19).
56. *Eastman R. G., Pinto P. A.* Spectrum formation in supernovae - Numerical techniques // *The Astrophysical Journal*. — 1993. — Авг. — Т. 412. — С. 731. — DOI: [10.1086/172957](https://doi.org/10.1086/172957). — (Цит. на с. 13, 19).
57. *Blinnikov S. I.* The opacity of an expanding medium // *Astronomy Letters*. — 1996. — Т. 22. — С. 79—84. — (Цит. на с. 13, 16, 19, 20).
58. *Utrobin V. P.* An optimal hydrodynamic model for the normal type II supernova 1999em // *Astronomy and Astrophysics*. — 2007. — Янв. — Т. 461, № 1. — С. 233—251. — DOI: [10 . 1051/0004 - 6361 : 20066078](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20066078). — arXiv: [0609642 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0609642). — (Цит. на с. 14).
59. *Röpke F. K.* Following multi-dimensional type Ia supernova explosion models to homologous expansion // *Astronomy & Astrophysics*. — 2005. — Март. — Т. 432, № 3. — С. 969—983. — DOI: [10 . 1051/0004 - 6361 : 20041700](https://doi.org/10.1051/0004-6361:20041700). — arXiv: [0408296 \[astro-ph\]](https://arxiv.org/abs/0408296). — (Цит. на с. 14).
60. *Grachev S. I., Grinin V. P.* Analysis of line profiles for the quasar PHL 5200 // *Astrofizika*. — 1975. — Т. 11, № 1. — С. 33—47. — DOI: [10 . 1007 / BF01018859](https://doi.org/10.1007/BF01018859). — (Цит. на с. 15).
61. *Rybicki G. B., Hummer D. G.* A generalization of the Sobolev method for flows with nonlocal radiative coupling // *The Astrophysical Journal*. — 1978. — Янв. — Т. 219. — С. 654. — DOI: [10.1086/155826](https://doi.org/10.1086/155826). — (Цит. на с. 15).
62. *Olson G. L.* An escape probability treatment of doublet resonance lines in expanding stellar winds // *The Astrophysical Journal*. — 1982. — Апр. — Т. 255. — С. 267. — DOI: [10.1086/159825](https://doi.org/10.1086/159825). — (Цит. на с. 15).

63. *Bartunov O. S., Mozgvoi A. L.* Formation of multicomponent blends in envelopes of supernovas. I. Effects of nonlocal radiative coupling // *Astrophysics*. — 1987. — Т. 26, № 2. — С. 136—147. — DOI: [10.1007/BF01005551](https://doi.org/10.1007/BF01005551). — (Цит. на с. 15).
64. *Andronova A. A.* Theoretical profiles of Ca II lines in supernova shell spectra // *Astrophysics*. — 1991. — Т. 32, № 3. — С. 235—243. — DOI: [10.1007/BF01005505](https://doi.org/10.1007/BF01005505). — (Цит. на с. 15).
65. *Березин И., Жидков Н.* Методы вычислений 2. — Москва : Государственное издательство физико-математической литературы, 1959. — С. 620. — (Цит. на с. 16).
66. *Сорокина Е. И.* Кривые блеска и газовые остатки термоядерных сверхновых : дис. ... канд. / Сорокина Елена И. — 2004. — (Цит. на с. 17, 19).
67. *Hummer D. G., Rybicki G. B.* The Sobolev approximation for line formation with continuous opacity // *The Astrophysical Journal*. — 1985. — Июнь. — Т. 293. — С. 258. — DOI: [10.1086/163232](https://doi.org/10.1086/163232). — (Цит. на с. 18).