ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 73 за 2021 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ю.Г. Рыков

Технология использования нечетких когнитивных карт с математической точки зрения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рыков Ю.Г. Технология использования нечетких когнитивных карт с математической точки зрения // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 73. 22 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2021-73
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-73

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.Г. Рыков

Технология использования нечетких когнитивных карт с математической точки зрения

Москва — 2021

Рыков Ю.Г.

Технология использования нечетких когнитивных карт с математической точки зрения

Описан более широкий взгляд на технологию нечетких когнитивных карт, при котором когнитивная карта рассматривается в качестве носителя вычислительных процедур. Данный подход можно охарактеризовать как обобщенную системную динамику. В данной интерпретации облегчается получение теоретических результатов, которые могут характеризовать поведение сложных систем. В частности, в случае простых вычислительных процедур выяснена связь степени влияния факторов и структурой системы, а именно, показана важность, как связывающих путей, так и циклов в соответствующем орграфе.

Ключевые слова: сложная система, когнитивное моделирование, взвешенный орграф, аддитивная свертка, разбиение графа на циклы, пути в графе

Yuri Germanovich Rykov

The technology of using fuzzy cognitive maps from a mathematical point of view

A broader view of the technology of fuzzy cognitive maps is described, in which the cognitive map is considered as a carrier of computational procedures. This approach can be described as a generalized system dynamics. This interpretation makes it easier to obtain theoretical results that can characterize the behavior of complex systems. In particular, in the case of simple computational procedures, the relationship between the degree of influence of factors and the structure of the system, namely, the presence of connecting paths and cycles in the corresponding digraph, is clarified.

Key words: complex system, cognitive simulation, weighted digraph, additive convolution, graph partitioning by cycles, paths in a graph

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 20-04-60160_Вирусы.

Оглавление

Введение 3
1. Взгляд на НКК с точки зрения структуры сложной системы 5
2. Математическое представление сложной системы 9
3. Иллюстративные примеры использования полученной характеристики степени влияния 14
4. Заключение 20

Введение

Когда говорят о нечетких множествах и технологиях, с ними связанных, например о технологии когнитивных карт, то обычно имеют в виду особенности логических категорий и правил мышления и вывода, вытекающих из возможности невыполнения закона исключенного третьего. То есть в той или иной форме предполагается одновременное выполнение утверждений A есть B и A есть $\overline{B}$ (черта означает операцию отрицания). Указанное допущение приводит к возникновению «размытых» понятий, которые, как утверждается, больше соответствуют реальному миру. Создателем нечеткой логики и связанной с ней теории нечетких множеств является Л. Заде, опубликовавший основополагающие работы в этой области [1, 2]. Позднее Б. Коско также написал знаковые работы в отношении нечеткого мышления, а также ввел понятие нечетких когнитивных карт (НКК) [3, 4]. К настоящему моменту литература, посвященная НКК, как в теоретическом аспекте, так и в области практического применения, огромна. Упомянем для примера только два недавних обзора, посвященных теории [5] и практике [6] НКК. Понятие нечеткой когнитивной карты продолжает развиваться, так появилось понятие серых НКК, где нечеткая переменная может к тому же быть неоднозначно определенной, см., например, [7, 8].

Указанная линия развития теоретических представлений о «нечетком» мире оперирует математическими построениями и именно посредством их интерпретирует все понятия, связанные с предположением о несправедливости закона исключенного третьего. Однако отметим, что при этом используется та математика, которая сама основана на справедливости этого закона. Поэтому возникает некоторое логическое если и не противоречие, то неудобство, на котором, с нашей точки зрения, стоит остановиться подробнее.

Как известно, одним из главных открытий древнегреческой цивилизации было создание теоретического знания, то есть открытия «мира идей», который имел собственную структуру и мог развиваться по своим законам. Конечно, все это могло происходить только посредством человеческого мышления. В отличие от модного сейчас утверждения о том, что научное (теоретическое) знание имеет ценность, только если оно может приводить к практическим результатам, древние рассматривали (естественно, с некоторой долей условности, можно сказать, нечеткости) «мир практики» и «мир идей» как в целом параллельные реальности, которые, правда, иногда могут «пересекаться». То есть, по большому счету, теоретическое знание представляет ценность само по себе, а если его жестко пытаться привязать к практике, то оно хиреет и разрушается. На природе этой ценности в рамках данной публикации мы останавливаться не будем, поскольку это увело бы нас далеко в сторону от преследуемых целей. Со времен Аристотеля конструктивное теоретическое знание (в достаточно завершенной форме) представляет собой механизм, который из одних понятий производит другие.

Ярким примером, на котором сделан основной акцент в данном препринте, является математическое знание. Конструктивность знания строится на законах Аристотелевой логики, т.к. только тогда возможно точные и проверяемые умозаключения. А для того, чтобы как-то привязать теоретические категории к фактам (процесс формирования понятия факта здесь также обсуждать не будем) реального мира, используется процесс «интерпретации». Это как раз и является следствием параллельности «мира идей» и «мира практики», упомянутой выше. «Интерпретация» осуществляет возможное «пересечение» этих миров.

Поясним сделанное замечание несколько более подробно. Рассмотрим понятие «случайность». Основой теоретического знания в этой области являются теория вероятности и вытекающие из нее дисциплины, как теоретические (например, теория случайных процессов), так и практические (например, теория надежности). Однако человеческий мозг (более точный английский термин – mind) не может непосредственно иметь дело со «случайностью». В этом круге явлений он, по существу, оперирует с разделом математики – теорией меры – а все остальное является «интерпретацией», в некотором смысле «насильственной привязкой» математики к практическим фактам и потребностям. Мы изучаем функцию распределения, например, при помощи дифференциальных уравнений и делаем выводы и расчеты на основе детерминированной логики – где нет никакой «случайности», а затем интерпретируем функцию, как «силу» возможности объекта находиться в том или ином состоянии. И только здесь возникает «случайность» и возможность дискуссий на эту тему (математическое утверждение либо верно, либо нет – если результат получен, тут нечего обсуждать в отношении его верности). Аналогичная ситуация наблюдается и при использовании термина «нечеткость». Чтобы отразить вполне жизненную ситуацию на примере Б. Коско [5]: является ли яблоком яблоко, наполовину съеденное, где та грань, когда поедаемое яблоко перестает им быть, – вводится понятие «нечеткости», которое как бы позволяет оперировать ситуацией, когда яблоко одновременно и есть, и его нет. Но это, с нашей точки зрения, иллюзия. Просто рассматриваемый объект теперь характеризуется не числом, а так называемой функцией принадлежности, с которой производятся различные операции, но опять же в рамках привычной логики Аристотеля. Пока нет твердо установленных фактов того, что человеческое мышление может напрямую работать вне логики Аристотеля (вопросы интуиции, прозрений и т.п. здесь мы не рассматриваем). Поэтому применение теоретического (математического) знания к реальным явлениям основано на процессе «интерпретации». В этом лежит и корень универсальности математического подхода в естествознании. Этот корень прост – у человека нет другого инструмента, кроме классической логики, конструктивное и концентрированное выражение этого инструмента – математика. Дальше вступает в дело «интерпретация», которая может «привязать» данный инструмент к любым явлениям в мире. «Правильность»

привязки определяется относительной простотой теоретических конструкций и практическим удобством, а также традициями данного сообщества.

Данный подход, в принципе, достаточно хорошо известен. Но к чему он приводит в отношении использования НКК? С этой точки зрения первичной является необходимость изучения очень сложных систем, находящихся к тому же в условиях высокой неопределенности и возможного недостатка данных. Поэтому акцент следует делать не на природе и характере причинно-следственных связей, как, например, у Б. Коско, а на математической структуре взаимосвязей элементов системы – это является базисом. А «интерпретаций» может быть много, как традиционных, то есть принятых в научном сообществе, так и альтернативных. Если говорить кратко, то при анализе НКК предлагается акцентировать внимание на используемых математических конструкциях, а такие понятия, как нечеткое множество, функция принадлежности и т.п., рассматривать как вторичные понятия, относящиеся к области интерпретации. (Например, понятие серой НКК будет, с этой точки зрения, возникать естественным образом, как математическая конструкция.) Таким образом, НКК рассматривается с позиций более широкой точки зрения, что придает этому понятию большую гибкость.

Более подробно об этом и пойдет речь в основном тексте препринта.

Заканчивая вводный раздел, автор выражает благодарность Б.Н. Четверушкину и В.П. Осипову за поддержку и стимулирование данной работы.

1. Взгляд на НКК с точки зрения структуры сложной системы

Сложной системой традиционно называется система, состоящая из большого числа элементов (объектов), между которыми установлены связи той или иной природы. Математически такую конструкцию удобно представлять себе в виде ориентированного, вообще говоря, мультиграфа (наличие петель, в том числе и кратных, также допускается). Однако в рамках данного препринта кратные ребра рассматриваться не будут. При своем появлении конструкция НКК предполагала в качестве объектов понятия (concepts), связи между которыми представляли когнитивные функции мышления – отсюда в названии этой конструкции появилось слово «когнитивные». В данном исследовании мы будем рассматривать НКК как отражение структуры сложных систем, поэтому слово «когнитивная» здесь, вообще говоря, не очень уместно, но мы сохраним название НКК в силу традиционности.

Рассмотрим вначале простейшую составляющую любой когнитивной карты: два элемента A_1 и A_2, соединенных связью с некоторым весом a_{12} от A_1 к A_2. Рассматриваемые элементы принадлежат некоторой предметной области (англ.: Universe of discourse) и принимают заданный набор качественных значений, которые выражаются, вообще говоря, соответствующими функциями

принадлежности (то есть нечеткими величинами). При этом связь интерпретируется как причинно-следственная, а сила связи характеризует степень связи функций принадлежности, см. соответствующую интерпретацию в [4]. Поясним. Концепты A_1 и A_2 выражены нечеткими множествами, характеризующимися функциями предпочтения $A_1(x), A_2(x): X \to [-1,1]$, где $x \in X$ – данная предметная область. Множество нечетких подмножеств множества A_2 определяется как $\mathbb{F}(A_2) = \{B(x), x \in X : B(x) \le A_2(x), x \in X\}$. Однако, пока само это множество еще четкое, и из концепта B, чьей характеристикой будет $B(x)$, будет «четко» следовать A_2. То есть, если $A_1 \in \mathbb{F}(A_2)$, то две нечеткие концепции будут четко следовать одна из другой. Однако, как отмечено, например, в [4], причинная связь не является напрямую операцией следования, причинность является нечетким следованием. То есть $A_1 \notin \mathbb{F}(A_2)$, точнее принадлежит, но с некоторой степенью. Это наблюдение является основой для введения понятия нечеткого множества всех подмножеств нечеткого множества A_2 – $\Pi(A_2)$. А именно, $\Pi(A_2)$ определяется как функция на пространстве $\mathbb{F}(X)$, то есть $\Pi(A_2): \mathbb{F}(X) \to [0,1]$, при этом $\Pi(A_2)(A_1)$ определяется как некоторая мера того, насколько A_1 является нечетким подмножеством A_2. Конкретные меры могут быть различными, что определяет неоднозначность этого понятия. На практике вводятся различные меры того, насколько график $A_1(x)$ «лежит ниже» графика $A_2(x)$. Конечная характеристика соотношения $A_1(x)$ и $A_2(x)$ выражается, как правило, числом, которое и является весом a_{12}. Это соотношение причинного следования имеет и различные обоснования с точки зрения формальной логики, но останавливаться здесь на этом не будем.

С точки зрения структуры сложной системы имеет значение только наличие концептов, связей между ними и приписанных этим объектам весов, которые, вообще говоря, могут иметь не только числовую, но и функциональную форму. Природа связей не так важна. Чаще всего используются числовые значения, методы получения которых представляют собой отдельное направление исследований. Описанная выше теоретическая конструкция на практике напрямую, как правило, не используется. Широко применяются экспертные методы или методы, связанные с выделением лингвистических переменных и нечетких правил вывода с соответствующими процедурами фаззификации и дефаззификации. Другое направление, близкое к проблематике нейронных сетей, предполагает получение весов при помощи алгоритмов обучения как с учителем (при наличии входных и выходных датасетов), так и без учителя (алгоритмы адаптации весов). Более подробно на этом вопросе останавливаться не будем.

В литературе НКК изучаются с точки зрения статических характеристик и динамического поведения.

Для статического исследования постулируется так называемый «поток причинности», т.е., по существу, воздействие концептов друг на друга, вследствие причинных связей, на основе имеющихся весов. Например, если два концепта соединяются набором путей, то воздействие одного концепта на другой можно определить, например, как сумму весов этих путей. При этом вес пути определяется как произведение весов всех связей, входящих в путь (что, например, отражает рост уровня нечеткости при росте количества предшествующих причин). Это понятие можно обобщать, как это предложено Коско в [4], на основе замены операций сложения и умножения через специальные S – нормы и T – нормы (так называемая причинная, или каузальная, алгебра), а также через операции с матрицей смежности когнитивной карты, см., например, [9], а также [10], [11]. При этом ввод причинной алгебры скорее не связан со структурой системы, а со свойствами отношения причинности. Дополнительно используются также понятия теории графов.

Динамическая сторона НКК состоит в том, что данный подход в настоящее время развился в отдельную методологию моделирования, которая рассматривает набор концептов (которые могут выражать собой не только понятия, но и любые характеристики системы, в том числе и физические) и взвешенные связи между ними как дискретную динамическую систему. В некотором смысле такая система подобна системе ОДУ со специфическим поведением траекторий (точки равновесия, предельные циклы, хаос и т.п.), см., например, раннюю работу [12] и более современные сборники статей [13 – 15]. В последнее время усилился интерес к более сложным НКК, где как концепты, так и отношения между концептами сохраняют нечеткий характер на всех этапах моделирования. То есть значения концептов являются функциями принадлежности, и связь концептов выражается при помощи нечетких отношений со своими функциями принадлежности, определенных на декартовом произведении предметных областей (Universes of discourse) концептов, см., например, [16, 17]. Для социально-технических систем введение НКК в сочетании с нечеткой логикой позволили перейти от необходимости детального моделирования множества параметров к нечеткому моделированию основных параметров. Этого оказалось достаточно для управления социально-техническими процессами, что предопределило большой успех данного направления. С нашей точки зрения, именно попытки создать замену ОДУ при анализе инженерных систем породили интерес к нечеткости и динамическим НКК.

Однако социальные системы, как правило, состоят из большого количества элементов (порядка сотен), даже при «обобщенном» представлении в виде концептов. Причиной этого, по нашему мнению, является то, что социальные системы по своей природе сильно разнородны. То есть, чтобы более-менее

верно отражать реальность, модель должна одновременно учитывать, например, экономическую, социальную, общественно-политическую, техническую и др. составляющие. Складывающийся комплекс проблем при изучении социальных систем хорошо иллюстрируется, например, недавно возникшими мировыми тенденциями «энергетического перехода», «цифровизации», «возникновения пандемий», «взрывного роста частной космонавтики» и т.п. Кроме того, современные социальные системы отличаются высоким уровнем неопределенности, как в отношении своих наблюдаемых характеристик, так и в отношении своего состава. В этих условиях динамический анализ таких систем затруднен, и, с нашей точки зрения, вперед выходят структурные аспекты, которые могут характеризовать, например, стабильность системы или основные тенденции ее эволюции. То есть в рамках данной работы основное внимание уделяется статическому анализу структуры НКК в рамках несколько более широкого взгляда на них, о чем уже упоминалось во Введении.

Вследствие сказанного посмотрим на НКК с точки зрения ее математической структуры, которая отражает структуру сложной системы. Вопрос о том, представляет ли данная НКК набор причинных связей или воздействие технических объектов друг на друга или какие-либо другие отношения, отнесем к области интерпретации, которой сейчас заниматься не будем. С этой точки зрения рассмотренную выше связь концептов A_1 и A_2 будем рассматривать как взаимосвязь, выраженную в соотношении значений этих концептов. Пусть пока, для простоты, это будут некоторые числовые значения. Тогда отношение влияния в самом простом виде можно записать как $A_2 = a_{12} A_1$. В отличие от предыдущего единичное влияние концепта A_1 на концепт A_2 можно представить и как влияние A_2 на A_1 – просто коэффициент связи будет равен $1/a_{12}$, то есть связь двух концептов вне системы не имеет смысла. Если имеется несколько концептов, то возникает система, которую будут определять структура и веса связей, а также метод вычисления значений концептов. В такой системе необходимо выделять набор входных концептов (или управляющих параметров) и набор выходных концептов (целевые параметры). Эти два набора концептов можно рассматривать как причинно связанные, то есть входные концепты влияют на выходные, влияние рассматривается как одномоментное. Причинность реализуется посредством системы промежуточных концептов, которые связаны лишь заданной вычислительной процедурой для значений концептов. Будем считать, что и концепты, и связи характеризуются либо множествами числами, либо множествами функций над пространствами своих предметных областей (Universes of discourse), одно число и одна функция являются частным случаем. Однако никакой интерпретации этим значениям, например, вероятность или функция принадлежности, подразумевать не будем. Заметим, что в данной постановке, вообще говоря, можно использовать аппарат функционального

анализа (например, рассматривать не только непрерывные функции) и, например, понятие серых НКК возникает естественным образом, как ситуация, когда одному концепту сопоставляется некоторое подмножество функций, а не одна функция – функция принадлежности.

Ниже этому представлению будет придана более строгая математическая форма. На ее основе будут выделены структурные свойства систем в наиболее простом случае, когда веса и концептов, и связей являются числами, а вычислительная процедура имеет линейный характер.

2. Математическое представление сложной системы

Приводимое ниже описание в целом соответствует широко представленному в литературе описанию строения и получения НКК, но акцентирует внимание на некоторых нюансах, о которых было сказано в предыдущем разделе.

Как правило, сложная система (СС) представляет собой совокупность объектов на разных уровнях детализации, кроме того, такая совокупность формируется различными экспертами или специалистами по моделированию, которые могут иметь представление лишь о частях системы и не представлять ее в целом. Поэтому будем предполагать, что СС строится на основе иерархической структуры.

Обозначим рассматриваемую систему через $\boldsymbol{S}$ и будем считать ее состоящей из совокупности проекций $\boldsymbol{S}_r$ на некотором количестве N_R уровней детализации (которые, вообще говоря, строятся различными группами экспертов), т.е. $\boldsymbol{S} = \{\boldsymbol{S}_r, r = 1,...,N_R\}$. Описание множества проекций $\boldsymbol{S}_r$ проведем с помощью математической индукции. А именно, каждая проекция $\boldsymbol{S}_r$ представляет собой совокупность компонент сложной системы (КСС) $\boldsymbol{A}_r = \{A_{rj}, j = 1,...,J_r\}$, которые связаны собой некоторыми отношениями зависимости (напомним, что мы не предполагаем, что связь обязательно имеет характер причинно-следственной). То есть $\boldsymbol{S}_r$ можно представить в виде ориентированного графа $(\boldsymbol{A}_r, \boldsymbol{E}_r)$, узлы которого $\{A_{rj}\}$ соответствуют КСС, а дуги – отношениям зависимости. Дуги представлены, вообще говоря, подмножеством $\boldsymbol{E}_r$ множества упорядоченных пар узлов. Обозначим через $e_{r,ij} \equiv (A_{ri}, A_{rj})$ элемент множества пар всех узлов из $\boldsymbol{A}_r$; $e_{r,ij} \in \boldsymbol{E}_r$, если существует дуга, соединяющая A_{ri} и A_{rj}. Пусть узлам и дугам приписаны характеристики A_{ri} и $a_{r,ij}$ соответственно, которые, вообще говоря, являются некоторыми множествами функций на соответствующих узлам и дугам универсальных множествах (предметных областях или Universes of discourse); эти характеристики будут обозначаться теми же буквами. В целях ясности настоящего изложения (т.к. вопросы, связанные с понятием о серых НКК и

обобщений затрагиваться не будут) далее можно считать, что характеристикой узла A_{ri} является функция $A_{ri}\left(x_i\right)$ на соответствующем универсальном множестве X_{ri}, а характеристикой дуги $e_{r,ij}$ – функция $a_{r,ij}\left(x_i, x_j\right)$ на декартовом произведении универсальных множеств $X_{ri} \times X_{rj}$. Функции $A_{ri}\left(x_i\right)$, $a_{r,ij}\left(x_i, x_j\right)$ могут быть и постоянными, что соответствует числовым характеристикам узлов и дуг. Отметим здесь, что, вообще говоря, не требуется, чтобы рассматриваемые функции были функциями принадлежности, то есть были по модулю ограничены единицей. Такая постановка подразумевает обобщение, при котором узлы могут характеризоваться некоторыми подмножествами в функциональных пространствах, а дуги представлять собой соответствующие операторы. Эта постановка позволяет в принципе использовать методы функционального анализа для построения НКК, но в рамках данного препринта мы останавливаться на этом широком обобщении не будем.

Далее обозначим через $V_{A_{rj}} = \left\{ i : e_{r,ij} \in \boldsymbol{E}_r \right\}$. И каждой вершине графа поставим в соответствие функционал $A_{rj} = \Phi_{rj}\left(\left\{A_{rk}, a_{r,kj}\right\}\right), k \in V_{A_{rj}}$. Функционал Φ_{rj} позволяет вычислить значение КСС A_{rj}, если известны значения тех КСС, от которых A_{rj} зависит, и значения входящих дуг. В качестве дальнейшего усложнения модели на КСС могут быть наложены дополнительные ограничения в виде связей $B_{rq}\left(A_{rj}\right) = 0, j = 1,...,J_r; q = 1,...,Q_r$. В то же время часть КСС может быть выделена и интерпретирована как множество целевых показателей (выходных переменных) $\boldsymbol{P}_r = \left\{P_{rm}, m = 1,...,M_r\right\} \subset \boldsymbol{A}_r$. На этом описание проекции $\boldsymbol{S}_r$ завершается.

Пусть проекция $\boldsymbol{S}_r$ известна, тогда проекция $\boldsymbol{S}_{r+1}$ получается из проекции $\boldsymbol{S}_r$ с помощью процесса детализации, а именно следующим образом. В проекции $\boldsymbol{S}_r$ выделяется некоторое подмножество КСС $\boldsymbol{G}_r = \left\{G_{ri}, i = 1,...,I_r\right\} \subset \boldsymbol{A}_r$. Каждый КСС из $\boldsymbol{G}_r$ заменяется ориентированным графом из дополнительных (детализирующих) КСС $G_{ri} = \left\{A_{r+1,j}, j = J_{i-1,r+1},...,J_{i,r+1}\right\}, J_{0,r+1} = 1, J_{I_r,r+1} = J_{r+1}$ с собственным набором дуг. Отметим, что возможно установить дополнительные дуги между КСС $A_{r+1,j}$, которые относятся к различным детализациям G_{ri}. В результате полная СС представляется в виде объединения набора проекций с некоторым, достаточно большим, числом элементов N.

Свойства полученной структуры и уровень ее целостности априорно оценить практически невозможно. Для этого необходимо разработать набор

инструментов: один из возможных инструментов будет подробно рассмотрен в следующих разделах.

Далее индекс r будем опускать, предполагая, что всегда имеем дело с совокупной моделью СС. Теперь рассмотрим наиболее простую ситуацию, когда характеристики и узлов, и дуг графа являются числовыми величинами. Традиционно для НКК считается, что $-1 \le a_{ij} \le 1$, а функции Φ_i содержат в себе так называемую функцию активации, которая нормирует значения A_i так, чтобы они лежали в границах фиксированного множества, например в границах отрезка $[0,1]$. В данном препринте мы таких априорных ограничений рассматривать не будем, то есть $A_i, a_{ij} \in \mathbb{R}$, а Φ_i может представлять собой, вообще говоря, любую непрерывно дифференцируемую функцию (возможность Φ_i принадлежать к другим классам функций, в том числе и разрывным, здесь пока не рассматривается). Итак, при сделанных выше предположениях связь между КСС осуществляется на основе вычисления соответствующих числовых функций $A_i = \Phi_i\left(\left\{A_k, a_{ki}\right\}\right), k \in V_{A_i}, i = 1,...,N$.

На этой основе введем строгие определения согласованности элементов СС и степени влияния КСС в СС. Пусть существуют такие $j = \omega_1,...,\omega_\Omega$, что $V_{A_j} = \varnothing$. Это означает, что КСС $A_{\omega_1},...,A_{\omega_\Omega}$ являются входными параметрами и значения других КСС в принципе могут быть выражены через значения этих входных КСС, то есть $A_j = F_j\left(A_{\omega_1},...,A_{\omega_\Omega}\right), j \ne \omega_1,...,\omega_\Omega$, где F_j – некоторая, вообще говоря, непрерывно-дифференцированная функция.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. СС является согласованной, если функции F_j определены для всех j.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Степенью влияния входного КСС с номером ω_k на КСС с номером j называется величина $\left|\partial F_j / \partial A_{\omega_k}\right|$.

Теперь еще упростим ситуацию и исследуем случай, когда Φ_i представляют собой линейные функции, то есть предположим, что для вычисления значений КСС используется операция аддитивной свертки.

Пусть $A_i, i = 1,...,N$ представляют собой набор КСС некоторой СС, которая организована в виде орграфа $\boldsymbol{A}$. Для этих КСС рассмотрим матрицу смежности $\left\{a_{ij}\right\}$, где a_{ij} являются весами дуг $\boldsymbol{A}$, идущих от КСС с номером i, к КСС с номером j. Если $a_{ij} = 0$, то КСС в данную сторону не связаны. Для удобства интерпретации также предположим, что если выполнено условие $a_{ij} \ge 0$, то $\sum_i a_{ij} = 1 \, \forall j$. Сразу отметим, что все последующие выкладки справедливы и без этого условия, которое введено в рамках данного препринта исключительно в целях удобства и наглядности иллюстраций при демонстрации работы предлагаемых инструментов изучения СС. Поскольку мы

предположили, что для вычисления значений A_i используется механизм аддитивной свертки, то вычислительная система на графе $\boldsymbol{A}$ задается соотношениями:

$$A_j = \sum_{i=1}^{N} a_{ij} A_i \ , \ j = 1,...,N \ . \qquad (1)$$

Пусть для $j = 1,...,n_1 \quad a_{ij} = 0 \ \forall i$. То есть для КСС A_j , $j = 1,...,n_1$ нет входящих дуг, и эти КСС являются входными для СС, и значения которых можно задать произвольно. Выделим эти КСС и получим из (1)

$$A_j = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i + \sum_{i=n_1+1}^{N} a_{ij} A_i \ , \ j = n_1 + 1,...,N \ . \qquad (2)$$

Перенеся второе слагаемое в правой части равенства (2) в левую часть, получим

$$\sum_{i=n_1+1}^{N} \left(\delta_{ij} - a_{ij} \right) A_i = \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i \ , \ j = n_1 + 1,...,N \ , \qquad (3)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

Введем обозначения $\alpha_{ij} \equiv \delta_{ij} - a_{ij}$, $\left\{ \alpha_{ij} \right\} \equiv \Lambda$, $i, j = n_1 + 1,...,N$; $R_j \equiv \sum_{i=1}^{n_1} a_{ij} A_i$, $j = n_1 + 1,...,N$; $m \equiv N - n_1$. Тогда (3) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^{m} \tilde{\alpha}_{ij} A_i = \tilde{R}_j \ , \ j = 1,...,m \ . \qquad (4)$$

Значок волны возникает из-за перенумерации, в дальнейшем его будем опускать для упрощения записи.

Отметим, что система (4), а значит, и исходная система (1) разрешима, если $\det \Lambda \neq 0$. В случае, когда оказывается, что данный определитель равен нулю или близок к нулю, если подходить к вопросу с точки зрения практики, построенная система существовать не может. Тогда возникает задача поиска алгоритма, в том числе, возможно, и с учетом каких-либо требований оптимальности, изменения весов соответствующих дуг, или алгоритма расширения набора КСС. Последняя операция предполагает определение скрытых факторов в СС, которые не учла первоначальная модель. То есть не нулевой $\det \Lambda$ определяет согласованность СС в соответствии с Определением 1. Далее всюду будем предполагать, что $\det \Lambda \neq 0$.

Введем несколько известных естественных определений, которые помогут сформулировать выводы о том, как вычислять степень влияния входных КСС на другие КСС в соответствии с Определением 2 с учетом структуры СС.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Одинарным циклом длины K назовем последовательность КСС $A_{i_k}, k=1,...,K+1$ с различными i_k при $k \neq K+1$, $\{i_k\} \subset \{1,...,N\}$, такую что $a_{i_k i_{k+1}} \neq 0$, $k=1,...,K$ и $i_{K+1}=i_1$.

Будем рассматривать матрицу $\{\alpha_{ij}\}$ как матрицу смежности графа $\hat{\boldsymbol{A}}$, полученного из $\boldsymbol{A}$. А именно, граф $\hat{\boldsymbol{A}}$ состоит из КСС $\{A_i, i=1,...,m\}$, то есть из тех КСС исходного графа $\boldsymbol{A}$, которые не являются входными. Соответствующие дуги графа $\boldsymbol{A}$ сохраняются и в $\hat{\boldsymbol{A}}$ и, кроме того, вследствие соотношений (3) значения $\alpha_{ii}, i=1,...,m$, вообще говоря, не равны нулю, так что $\hat{\boldsymbol{A}}$ имеет связь каждого элемента с самим собой, т.е. петли.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Разбиением множества $\{1,...,m\}$ на циклы по отношению к графу $\hat{\boldsymbol{A}}$ назовем такой набор множеств $I_l \subset \{1,...,m\}, l=1,...,L$; $I_{l_1} \cap I_{l_2} = \varnothing, l_1 \neq l_2$; $\bigcup_{l=1}^{L} I_l = \{1,...,m\}$; L – число циклов в разбиении, что $\forall l \{A_i, i \in I_l\}$ является циклом в $\hat{\boldsymbol{A}}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Весом пути от КСС A_i до КСС A_j в графе $\hat{\boldsymbol{A}}$ (то есть последовательности ориентированных дуг, не содержащей внутренних циклов и соединяющей A_i и A_j) называется произведение весов всех дуг графа $\hat{\boldsymbol{A}}$, входящих в путь. Если $i=j$, то вес такого пути называется весом получившегося одинарного цикла (cycle or simple circuit).

Далее необходимо определить функции F_j для вычисления степени влияния в соответствии с Определением 2, то есть решить систему уравнений (4). Решение системы (4) можно определить по формулам Крамера $A_i = \det \Lambda_i / \det \Lambda$, $i=1,...,m$, где Λ_i представляет собой матрицу Λ, в которой строка i заменена вектором $\{R_j\}$. Вектор $\{R_j\}$ содержит линейную комбинацию значений КСС, являющихся входными для исходного графа $\boldsymbol{A}$, будем обозначать их $\bar{A}_l, l=1,...,n_1$. В соответствии с формулами Крамера можно записать, что

$$A_i = \frac{\det \Lambda_i}{\det \Lambda} = \sum_{l=1}^{n_1} \frac{F_{il}}{\det \Lambda} \bar{A}_l, \qquad (5)$$

где F_{il} являются некоторыми коэффициентами, зависящими от значений элементов матрицы смежности $\{a_{ij}\}$ исходного графа $\boldsymbol{A}$.

То есть в соответствии с Определением 2 $|F_{il} / \det \Lambda|$ определяет степень влияния входного КСС $\bar{A}_l$ на КСС A_i. Вследствие того, что в (5) $\det \Lambda$ входит в коэффициент влияния для всех i, при сравнении степени влияния его можно не учитывать. Тем более что ниже мы, как правило, будем использовать

нормированный коэффициент влияния, а именно отношение $|F_{il}| / \max_{(i,l)} |F_{il}|$ – в этом случае величина $\det \Lambda$ также не важна. Ниже мы сформулируем правило вычисления коэффициента F_{il} в зависимости от топологии графа $\boldsymbol{A}$. Получение этого правила на математическом уровне строгости и детальное описание его применения изложены в [18]. Здесь ограничимся эвристическим уровнем изложения.

Рассмотрим граф $\hat{\boldsymbol{A}}_{i+}$, отличающийся от $\hat{\boldsymbol{A}}$ тем, что элемент A_i связывается со всем другими КСС, если такой связи не было в графе $\hat{\boldsymbol{A}}$. Из дальнейшего будет ясно, что веса этих новых дуг не важны, важно только наличие связи.

Для определения коэффициента F_{il}, характеризующего степень влияния входного КСС $\overline{A}_l$ на другой КСС A_i необходимо применить следующее Правило.

ПРАВИЛО. Построим граф $\hat{\boldsymbol{A}}_{i+}$ из графа $\boldsymbol{A}$. Найдем все разбиения на циклы графа $\hat{\boldsymbol{A}}_{i+}$. Хотя бы одно разбиение всегда существует, т.к. в соответствии со структурой графа $\hat{\boldsymbol{A}}$ каждая его вершина образует петлю. Коэффициент F_{il} вычисляется как сумма мономов весов, каждый из которых соответствует одному разбиению на циклы. Вес монома конструируется в два этапа: 1) перемножаются веса всех дуг, входящих в данное разбиение на циклы и вычисляется знак, равный $(-1)^{m+L}$, где m – количество КСС в графе $\hat{\boldsymbol{A}}_{i+}$, а L – количество циклов в рассматриваемом разбиении; 2) в полученном мономе определяется цикл, содержащий КСС A_i, и величина α_{is} заменяется на величину a_{ls} из матрицы смежности первоначального графа $\boldsymbol{A}$. КОНЕЦ ПРАВИЛА.

Теперь перейдем к анализу нескольких простых систем на основе описанного инструмента «степень влияния».

3. Иллюстративные примеры использования полученной характеристики степени влияния

В данном разделе будут рассмотрены три простые системы (toy models), которые посвящены важным современным аспектам мирового развития и которые будут иллюстрировать выделение характерных структурных особенностей систем на основе инструмента «степень влияния».

Условимся называть всегда существующее разбиение на циклы – множество петель каждого узла графа $\hat{\boldsymbol{A}}$ – тривиальным разбиением. Входные КСС будем обозначать при помощи кругов, а остальные КСС – прямоугольников. При этом будем интерпретировать значения КСС, и входных, и выходных, как некоторый уровень значимости соответствующего фактора в рассматриваемой ситуации. С этой точки зрения положительность или

отрицательность влияния не имеют значения – важен качественный анализ того, насколько значим тот или иной фактор в данной ситуации. Поэтому будем считать, что все $a_{ij} \geq 0$, $\sum_i a_{ij} = 1 \forall j$, и будем интерпретировать веса как меру передачи значимости от фактора к фактору. Также отметим, что в соответствии с (5) при данном анализе сама величина значимости нам не нужна – оценка степени влияния проводится только с помощью весов.

Предложенный в предыдущем разделе способ расчета степени влияния учитывает структуру СС, а именно наличие циклов. Для того чтобы оттенить это свойство, в рассматриваемых ниже примерах будет приводиться также расчет степени влияния как просто сумма весов всех путей, ведущих от одного КСС к другому. Все результаты в таблицах ниже представлены в нормированном на величину максимального влияния виде.

Вначале рассмотрим систему, посвященную мировой энергетике, рис. 1. Обозначения: ВВП – фактор развития экономики, характеризующийся ростом ВВП; СПЭ – спрос на первичную (непосредственно извлекаемую из природы) энергию; ППЭ – потребление первичной энергии; ЧН – фактор численности населения; ФК – факторы качества, т.е. возникший в последнее время запрос на пользование «зеленой», чистой, энергией; ВШ – внешний шок, например, появление коронавируса, приведшее к краткосрочному резкому снижению спроса на первичную энергию.

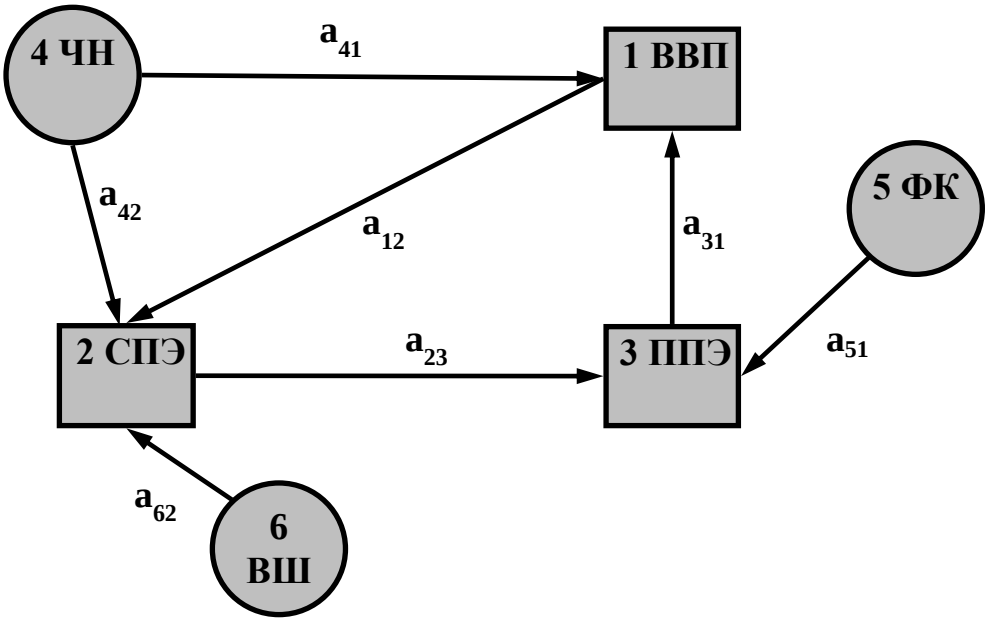

Рис. 1. Основные факторы (КСС) системы мировой энергетики

Система на рис. 1 является достаточно простой, у соответствующего графа $\hat{\boldsymbol{A}}$, кроме тривиального, существует только еще одно разбиение на циклы, которое содержит один цикл, охватывающий все КСС $\hat{\boldsymbol{A}}$. Поэтому для этой системы оба метода расчета степени влияния совпадают. В табл. 1 рассмотрено

несколько вариантов весов дуг, которые характеризуют различные состояния системы.

Таблица 1

Степень влияния факторов (КСС) в системе энергетики

Метод, изложенный в препринте				Традиционный метод по сумме весов путей			
Энергетика конца XX века: a_{31}=0,5; a_{41}=0,5; a_{12}=0,7; a_{42}=0,3; a_{62}=0; a_{23}=0,9; a_{53}=0,1							
	04 ЧН	05 ФК	06 ВШ		04 ЧН	05 ФК	06 ВШ
01 ВВП	0.977	0.077	0	01 ВВП	0.977	0.077	0
02 СПЭ	1.000	0.054	0	02 СПЭ	1.000	0.054	0
03 ППЭ	0.900	0.154	0	03 ППЭ	0.900	0.154	0
«Зеленая» энергетика: a_{31}=0,5; a_{41}=0,5; a_{12}=0,7; a_{42}=0,3; a_{62}=0; a_{23}=0,5; a_{53}=0,5							
	04 ЧН	05 ФК	06 ВШ		04 ЧН	05 ФК	06 ВШ
01 ВВП	0.885	0.385	0	01 ВВП	0.885	0.385	0
02 СПЭ	1.000	0.269	0	02 СПЭ	1.000	0.269	0
03 ППЭ	0.500	0.769	0	03 ППЭ	0.500	0.769	0
«Зеленая» энергетика и внешний шок: a_{31}=0,5; a_{41}=0,5; a_{12}=0,2; a_{42}=0,3; a_{62}=0,5; a_{23}=0,5; a_{53}=0,5							
	04 ЧН	05 ФК	06 ВШ		04 ЧН	05 ФК	06 ВШ
01 ВВП	1.000	0.435	0.217	01 ВВП	1.000	0.435	0.217
02 СПЭ	0.696	0.087	0.870	02 СПЭ	0.696	0.087	0.870
03 ППЭ	0.348	0.870	0.435	03 ППЭ	0.348	0.870	0.435

КОММЕНТАРИЙ к табл. 1. Для «Энергетики конца XX века» основное влияние на внутренние составляющие системы оказывает фактор 04 ЧН, т.е. необходимость удовлетворять потребности растущего населения в энергии. Степень влияния на все три внутренних фактора примерно равны, что обеспечивает баланс системы, в частности баланс спроса и предложения энергии. В современных условиях заметно усиливается фактор 05 ФК, который отражает тренд усиленного развития новой, в частности возобновляемой, энергетики. В этой ситуации баланс спроса и предложения энергии нарушается. Рост численности населения как таковой не обеспечивает предложения, эквивалентного спросу. Необходимо подключение фактора качества, который имеет более сильное влияние на спрос, чем численность населения. То есть возможна ситуация как превышения спроса над предложением, так и наоборот, что может порождать заметные колебания цен. В целом система оказывается неустойчивой, но с возможностью регулирования ее поведения путем поиска нужной комбинации воздействия входных факторов. При добавлении в систему внешнего шока численность населения наиболее сильно влияет на необходимость развития экономики в целом (фактор 01 ВВП). Спрос и предложение в отношении энергии опять находятся в дисбалансе. И для

уравновешивания этих факторов необходимо воздействовать на внешний шок (фактор 06 ВШ) для коррекции спроса и на развитие «новой» энергетики (фактор 05 ФК) для коррекции предложения. В то же время становится желательным тормозить рост численности населения (фактор 04 ЧН).

Далее изучим чуть более структурно сложную систему, описывающую влияние распространения вирусных инфекций на производственный процесс, рис. 2. Обозначения: ПА – фактор производства товаров народного потребления; ПБ – фактор производства средств производства; НА – население, занятое на производстве типа А; НБ – население, занятое на производстве типа Б; ВИ – фактор распространения вирусной инфекции; МП – меры противодействия распространению вирусной инфекции (например, карантинные мероприятия).

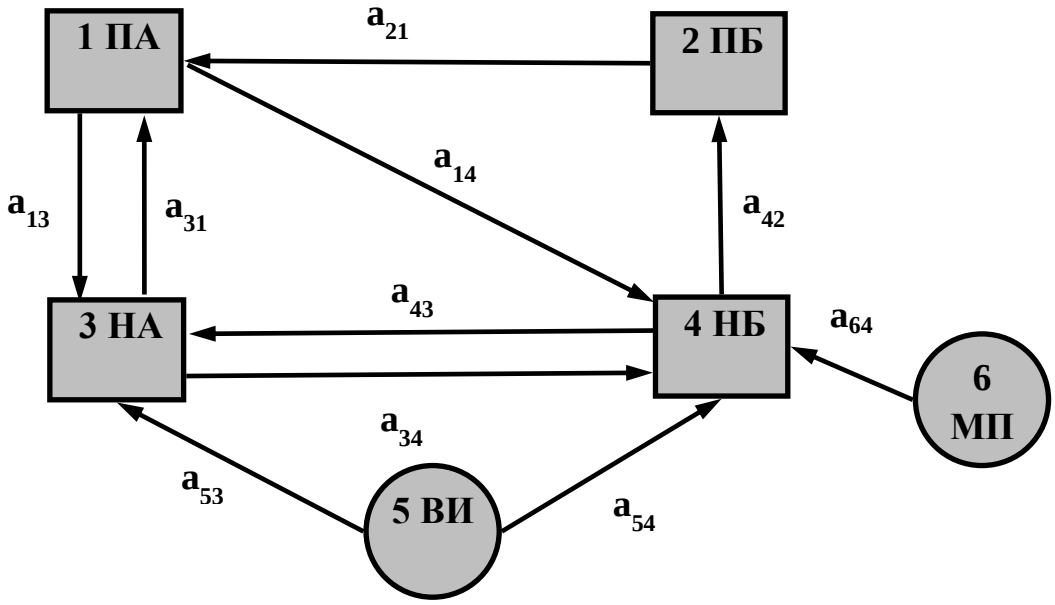

Рис. 2. Схема влияния вирусных инфекций на производственный процесс

Система на рис. 2 структурно содержит три разбиения на циклы соответствующего графа $\hat{\boldsymbol{A}}$, кроме тривиального. А именно, [1-3, 2, 4]; [1, 2, 3-4]; [1-4-2, 3] (мы учитываем тот факт, что в $\hat{\boldsymbol{A}}$ каждый элемент содержит петлю, т.е. образует цикл). При расчете влияния циклы, не связанные с КСС, влияние на который рассчитывается, будут уменьшать это влияние по сравнению с методом расчета по сумме весов путей. Например, влияние фактора 6 МП на фактор 4 НБ теперь не будет определяться только величиной a_{64}, но будет меньше на вес цикла 1-3. Можно сказать, что наличие циклических структур в системе способствует выравниванию степени влияния, то есть способствует ее стабилизации. Указанное отличие приводит к заметной разнице расчетов силы влияния, выполненных в соответствии с алгоритмом настоящей статьи, и расчетов, основанных на методе суммы весов путей. При этом выводы об устойчивости системы могут кардинально измениться. Система

на рис. 2 была рассмотрена ранее в [19]. Ниже, в табл. 2 также представлено несколько вариантов весов дуг, которые характеризуют различные состояния системы.

Таблица 2

Степень влияния факторов (КСС) в системе взаимодействия процесса производства и распространения вирусной инфекции

Метод, изложенный в препринте			Традиционный метод по сумме весов путей		
Потенциальность вирусной инфекции: a_{21}=0,6; a_{31}=0,4; a_{42}=1; a_{13}=0,6; a_{43}=0,2; a_{53}=0,2; a_{14}=0,6; a_{34}=0,1; a_{54}=0,2; a_{64}=0,1					
	05 ВИ	06 МП		05 ВИ	06 МП
01 ПА	0.950	0.283	01 ПА	0.731	0.218
02 ПБ	0.917	0.317	02 ПБ	0.859	0.321
03 НА	1.000	0.233	03 НА	1.000	0.179
04 НБ	0.917	0.317	04 НБ	0.859	0.321
Начало вирусной инфекции, слабые меры противодействия: a_{21}=0,6; a_{31}=0,4; a_{42}=1; a_{13}=0,1; a_{43}=0,2; a_{53}=0,7; a_{14}=0,1; a_{34}=0,1; a_{54}=0,7; a_{64}=0,1					
	05 ВИ	06 МП		05 ВИ	06 МП
01 ПА	0.950	0.081	01 ПА	0.905	0.077
02 ПБ	0.917	0.114	02 ПБ	0.905	0.113
03 НА	1.000	0.031	03 НА	1.000	0.029
04 НБ	0.917	0.114	04 НБ	0.905	0.113
Развитие вирусной инфекции, включение мер противодействия: a_{21}=0,6; a_{31}=0,4; a_{42}=1; a_{13}=0,4; a_{43}=0; a_{53}=0,6; a_{14}=0,1; a_{34}=0,1; a_{54}=0,4; a_{64}=0,4					
	05 ВИ	06 МП		05 ВИ	06 МП
01 ПА	0.782	0.364	01 ПА	0.741	0.345
02 ПБ	0.636	0.509	02 ПБ	0.695	0.575
03 НА	1.000	0.145	03 НА	1.000	0.138
04 НБ	0.636	0.509	04 НБ	0.695	0.575

КОММЕНТАРИЙ к табл. 2. При потенциальном распространении вирусной инфекции наиболее уязвимым является кластер А (производство и соответствующее занятое в нем население). Меры противодействия, которые сводятся к профилактическим мерам, находятся на примерно одинаковом уровне влияния, который, однако, недостаточен. Заметим, что метод вычислений, предложенный в настоящем препринте, четко разделяет кластеры А и Б (что и было заложено в модель), в то время как метод суммы весов путей «смешивает» кластеры. При реальном возникновении вирусной инфекции (резком росте воздействия фактора 05 ВИ) дисбаланс между влиянием факторов 05 ВИ и 06 МП резко растет (поскольку влияние 05 ВИ на оба кластера А и Б выросло одинаково, то при нормировке получились такие же

величины, как и в случае потенциальной вирусной инфекции). Теперь включим меры противодействия, направленные на кластер Б, и одновременно ограничим переток людей из Б в А. Расчет показывает, что в то время как ситуация в кластере Б стабилизировалась – влияние как вируса, так и мер противодействия находится примерно на одном уровне – ситуация с населением кластера А (03 НА) близка к катастрофе: влияние вируса почти в семь раз выше влияния мер противодействия. При усилении мер противодействия, направленных на кластер Б, ситуация в кластере А стала даже хуже, чем в отсутствие мер противодействия в начальном сценарии потенциального распространения вирусной инфекции (соответствующая разница была только в четыре раза). То есть необходимо повсеместное введение мер противодействия (влияние фактора 06 МП), а не точечное. Отметим, что расчет по методу суммы весов путей дает гораздо более смазанную картину (текущая ситуация и ситуация в начальном сценарии потенциального распространения вируса отличаются не так сильно) и не располагает к принятию решения о повсеместных мерах противодействия.

Наконец, рассмотрим систему геополитического равновесия, рис. 3. Здесь важной особенностью является наличие петель у игроков, вес петель характеризует уровень самодостаточности игрока в проведении собственной политики. Наличие петель с высоким весом резко меняет картину распределения влияния по сравнению с расчетом по методике суммы весов путей. Обозначения: 01 СИ – фактор сильного геополитического игрока (высокий уровень самодостаточности – вес a_{11} близок к 1); 02 СР – фактор геополитического игрока средней силы; 03 СЛ – слабый геополитический игрок; 04 ЭБ – фактор наличия режима экономического благоприятствования; 05 СЫ – фактор доступности сырьевых ресурсов.

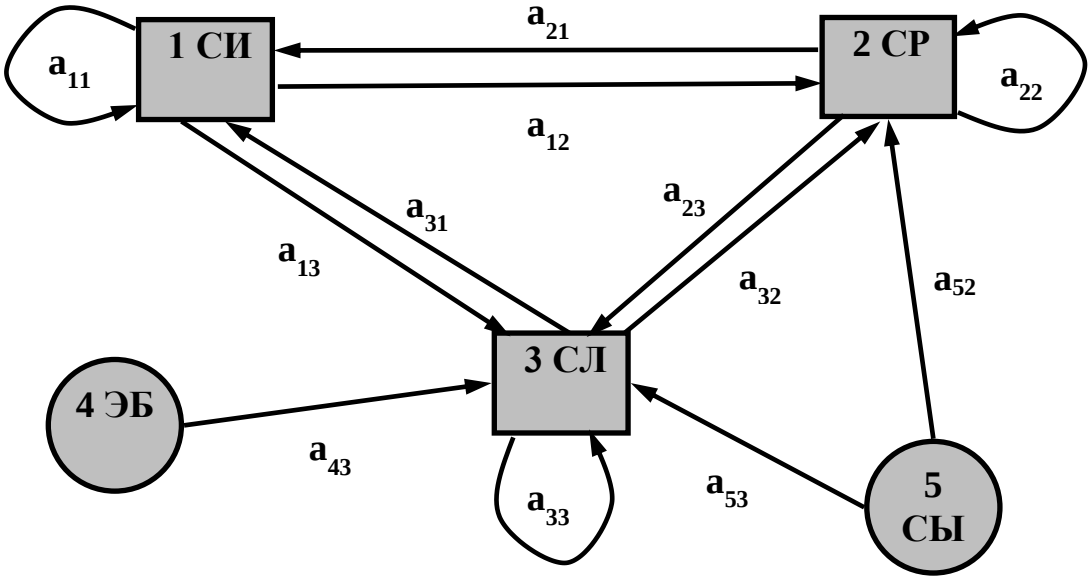

Рис. 3. Схема противоборства трех геополитических сил

Граф $\hat{\boldsymbol{A}}$ системы на рис. 3 является полным графом из трех элементов и содержит три разбиения на циклы, помимо тривиального разбиения. Наличие петель с высоким весом еще более (т.е. дополнительно к уменьшению, связанному с наличием циклов, не включающих рассматриваемый КСС) уменьшает величину степени влияния по сравнению с расчетом по сумме весов путей. Ниже в табл. 3 представлен вариант весов дуг, который характеризует обобщенную геополитическую систему.

Таблица 3

Степень влияния факторов (КСС) в системе противоборства трех геополитических сил

Метод, изложенный в препринте			Традиционный метод по сумме весов путей		
a_{11}=0,85; a_{21}=0,1; a_{31}=0,05; a_{22}=0,15; a_{12}=0,2; a_{32}=0,05; a_{52}=0,6; a_{33}=0,05; a_{13}=0,1; a_{23}=0,05; a_{43}=0,4; a_{53}=0,4					
	04 ЭБ	05 СЫ		04 ЭБ	05 СЫ
01 СИ	0.212	0.866	01 СИ	0.035	0.134
02 СР	0.078	1.000	02 СР	0.038	1.000
03 СЛ	0.480	0.598	03 СЛ	0.641	0.699

КОММЕНТАРИЙ к табл. 3. Метод расчета, описанный в настоящем препринте, рисует следующую картину состояния системы. И сильный и слабый игроки существенно зависят от баланса обоих входных факторов, у сильного игрока зависимость от фактора экономического благоприятствования (04 ЭБ) заметно меньше, чем у слабого игрока. Наиболее устойчивая позиция у среднего игрока, который зависит в основном только от сырьевого фактора (05 СЫ), наименее устойчивая позиция у слабого игрока, для которого обрушение каждого из рассматриваемых входных факторов может привести к серьезным последствиям. Метод расчета, основанный на сумме весов путей, приводит к совершенно другой картине. На сильного игрока рассматриваемые входные факторы практически не влияют. На среднего игрока практически не влияет фактор 04 ЭБ, а слабый игрок вынужден удерживать равновесие между рассматриваемыми двумя факторами. То есть при таком расчете система рис. 3 теряет свою целостность: сильного игрока можно исключить.

4. Заключение

В данном исследовании рассмотрен процесс построения НКК на более свободных и общих принципах, чем это допускается в большинстве современных исследований. Данный взгляд на НКК только начинает развиваться автором, поэтому рассмотрена только одна из многих возможных характеристик – степень влияния входного КСС – и только в относительно простой ситуации линейности основных соотношений. Такой подход имеет

свои плюсы и минусы. Плюсом является то, что становится возможным получать определенные теоретические результаты, не прибегая к вычислительным технологиям. Также появляется большая свобода интерпретаций, которые декларируются как основной инструмент связи математического знания и практики. С другой стороны, такая свобода интерпретации является также и минусом, требующим в каждой области применения развивать свою систему понятий, связывающих математический результат и наблюдаемые факты. Кроме того, пока в предлагаемом взгляде на НКК отсутствует динамический аспект, и представляется неясным, будет ли получено какое-либо новое качество, если его каким-нибудь образом ввести.

Тем не менее представляется, что для рассмотрения сложных систем, содержащих сотни, а может, и тысячи элементов, такое более свободное толкование НКК окажется полезным.

Библиографический список

[1] Zadeh L.A. Fuzzy sets // Inform. Control. — 1965. — V.8. — No. 3. — P. 338 – 353.

[2] Zadeh L.A. The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning – I // Information sciences. — 1975. — V.8. — No. 3. — P. 199 – 249.

[3] Kosko B. Fuzzy cognitive maps // Int. J. Man-Mach. Studies. — 1986. — V.24. — P. 65 – 75.

[4] Kosko B. Fuzzy thinking: The new science of fuzzy logic. Hyperion, 1993, 336 P.

[5] Felix G., Nápoles G. et all. A review on methods and software for fuzzy cognitive maps // Artif. Intell. Rev. — 2019. — V.52. — P. 1707 – 1737.

[6] Bakhtavar E., Valipour M. et all. Fuzzy cognitive maps in systems risk analysis: a comprehensive review // Complex & Intelligent Systems. — 2021. — V.7. — P. 621 – 637.

[7] Salmeron J.L. Modelling grey uncertainty with Fuzzy Grey Cognitive Maps // Expert Systems with Applications. — 2010. — V.37. — P. 7581–7588.

[8] Salmeron J.L., Palos-Sanchez P.R. Uncertainty propagation in fuzzy grey cognitive maps with Hebbian-like learning algorithms // IEEE Trans. Cybern. — 2017. — V.49. — № 1. — P. 211 – 220.

[9] Силов В.Б. Принятие стратегических решений в нечеткой обстановке. М.: ИНПРО-РЕС. — 1995. — 228 С.

[10] Четверушкин Б.Н., Судаков В.А. Факторная модель для исследования сложных процессов // ДАН. — 2019. — Т.489. — № 1. — С. 17 – 21.

[11] Четверушкин Б.Н., Судаков В.А. Факторное моделирование для инновационно-активных предприятий // Матем. Моделирование. — 2020. — Т.32. — № 3. — С. 115 – 126.

[12] Kosko B. Neural Networks and Fuzzy Systems. Prentice-Hall, Englewood

Cliffs. — 1992. — 575 P.

[13] Glykas M. (ed.) Fuzzy cognitive maps: Advances in theory, methodologies, tools and applications // Studies in Fuzziness and Soft Computing. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. — 2010. — V.247. — 435 P.

[14] Papageorgiou E. I. (ed.) Fuzzy cognitive maps for applied sciences and engineering // Intell. Syst. Ref. Library. — 2014. — V. 54. — 411 p.

[15] Yepes V., Moreno-Jimenez J.M. (eds.) Optimization for decision making // MDPI. Basel. — 2020. — 292 P.

[16] Федулов А.С., Борисов В.В. Модели системной динамики на основе нечетких реляционных когнитивных карт // Системы управления, связи и безопасности. — 2016. — №1. — С. 66 – 80.

[17] Liu X., Wang Z., Zhang S., Liu J. A novel approach to fuzzy cognitive map based on hesitant fuzzy sets for modeling risk impact on electric power system // Intern. J. Comput. Intell. Syst. — 2019. — V.12. — No.2. — P. 842 – 854.

[18] Osipov V. P, Rykov Yu. G. On mathematical aspects of analyzing the structure of complex systems using weighted digraphs // Lobachevskii Journal of Mathematics. — 2020. — 41. — No.11. — P. 2231 – 2238.

[19] Осипов В.П., Рыков Ю.Г., Четверушкин Б.Н. Математические аспекты понятия влияния в концепции когнитивного моделирования // Искусственный интеллект и принятие решений. — 2021. — № 2. — С. 3 – 10.