ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

**В.Ф. Масыгин, Р.В. Жалнин,
М.Е. Ладонкина, О.Н. Терехина,
В.Ф. Тишкин**

Применение энтропийного
лимитера для решения
уравнений газовой динамики
с использованием неявной
схемы разрывного метода
Галеркина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Применение энтропийного лимитера для решения уравнений газовой динамики с использованием неявной схемы разрывного метода Галеркина / В.Ф. Масыгин [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 7. 18 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-7>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-7>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**В.Ф. Масягин, Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина,
О.Н. Терехина, В.Ф. Тишкин**

**Применение энтропийного лимитера
для решения уравнений газовой
динамики с использованием неявной
схемы разрывного метода Галеркина**

Москва — 2021

В.Ф. Масыгин, Р.В. Жалнин, М.Е. Ладонкина, О.Н. Терехина, В.Ф. Тишкин

Применение энтропийного лимитера для решения уравнений газовой динамики с использованием неявной схемы разрывного метода Галеркина

В работе применяется энтропийный ограничитель наклонов для решения уравнений газовой динамики с использованием неявной схемы разрывного метода Галеркина. Он гарантирует монотонность численного решения, неотрицательность давления и производства энтропии в каждом конечном элементе. Численный метод успешно верифицирован с использованием некоторых известных модельных газодинамических задач.

Ключевые слова: метод Галеркина с разрывными базисными функциями, неструктурированные сетки, уравнения газовой динамики, неявная схема, NVIDIA AmgX, энтропийное неравенство, ограничитель наклона

Victor Fedorovich Masyagin, Ruslan Viktorovich Zhalnin, Marina Evgenyevna Ladonkina, Olga Nikolaevna Terekhina, Vladimir Fedorovich Tishkin

Application of the entropic slope limiter for solving gas dynamics equations using the implicit scheme of the discontinuous Galerkin method

The paper presents the entropic slope limiter for solving gas dynamics equations using the implicit scheme of the discontinuous Galerkin method. It guarantees monotonicity of the numerical solution, non-negativity of pressure and entropy production for each finite element. The numerical method has been successfully verified using some well-known model gas-dynamic problems.

Key words: discontinuous Galerkin method, unstructured grids, gas dynamics equations, implicit scheme, NVIDIA AmgX, entropic inequality, tilt limiter

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 19-71-00131).

Введение

На сегодняшний день одним из перспективных направлений исследований в области численных методов является разработка эффективных неявных алгоритмов для решения уравнений газовой динамики с помощью метода Галеркина с разрывными базисными функциями (РМГ) на неструктурированных сетках. Данный подход, несмотря на снятие существенных ограничений с шага по времени, требует значительных ресурсов для работы со СЛАУ огромных размерностей, в связи с чем встает вопрос о максимально эффективном использовании всех возможностей вычислительной техники [1].

Данная работа посвящена разработке неявной схемы РМГ для решения уравнений газовой динамики на тетраэдральных неструктурированных сетках. Численный алгоритм решения при таком подходе сводится к решению СЛАУ на каждом шаге по времени. Для параллельного исполнения этой операции на сегодняшний день разработано много эффективных решений для различных архитектур параллельного программирования. Но при этом стоит отметить, что неявная схема, при всех её достоинствах, имеет значительную сложность в реализации. Это связано с тем, что неявная схема требует существенно более сложного численного алгоритма, эффективного подхода при работе с памятью и особого внимания к матричным структурам, возникающим при выполнении расчётов.

На сегодняшний день в России и за рубежом активно ведется работа по созданию эффективных неявных схем для РМГ. Разработка неявной схемы для РМГ применительно к решению уравнений Эйлера и Навье–Стокса на неструктурированных гексаэдральных сетках с использованием r -многосетевого метода рассмотрена в работе Волкова А.В. [2]. Применение неявной схемы РМГ для решения нестационарных сжимаемых уравнений Навье–Стокса рассмотрено в работе [3]. Серия работ посвящена построению явно-неявных схем РМГ для решения уравнений конвекции-диффузии [4,5].

В предлагаемой работе для решения уравнений газовой динамики строится численный алгоритм на основе неявной схемы РМГ. Для решения СЛАУ применяется библиотека NVIDIA AmgX [7]. Показателем актуальности и эффективности используемой библиотеки является тот факт, что на данный момент она используется в качестве стандарта для сравнения эффективности и скорости работы новых численных алгоритмов для решения систем линейных уравнений, наряду с библиотекой HYPRE [8].

Ранее авторы в работах [9,10] разработали численную методику для неявной схемы РМГ применительно к решению двумерных задач газовой динамики. Неявная схема записывалась в так называемой «дельта-форме», когда рассматриваются не сами искомые функции, а их приращения на каждом шаге по времени [11]. Для решения итоговой СЛАУ применялись решатели из библиотеки HYPRE.

В данной работе рассматривается модифицированная численная схема применительно к трехмерным уравнениям газовой динамики. В численной схеме для нахождения элементов матрицы от значений на границах элементов используется потоковая функция Годунова вместо процедуры осреднения по P_{0y} . Для решения полученной на каждом шаге по времени СЛАУ применяются решатели из библиотеки NVIDIA AmgX.

Для монотонизации решения применяется энтропийный ограничитель наклонов, который обеспечивает выполнение дискретных аналогов законов сохранения и энтропийного неравенства для приближенных решений [12,13].

Математическая модель

Будем рассматривать систему уравнений Навье-Стокса, записанную в консервативной форме:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2 + p)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2 + p)}{\partial z} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} + \frac{\partial((\rho E + p)u)}{\partial x} + \frac{\partial((\rho E + p)v)}{\partial y} + \frac{\partial((\rho E + p)w)}{\partial z} = 0,$$

где $E = e + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}$ – удельная полная энергия, e – удельная внутренняя энергия, ρ – плотность смеси, p – давление, $\mathbf{v} = (u, v, w)$ – вектор скорости. Система замыкается уравнением состояния $p = \rho e(\gamma - 1)$, где γ – показатель адиабаты, и дополняется начальными и граничными условиями, соответствующими постановке конкретной задачи.

Для удобства дальнейших рассуждений введем следующие обозначения:

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho E \end{pmatrix}, \mathbf{F} = (\mathbf{F}^{(1)}, \mathbf{F}^{(2)}, \mathbf{F}^{(3)}), \mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho E + p)u \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho E + p)v \end{pmatrix}, \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho uw \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ (\rho E + p)w \end{pmatrix}.$$

С учетом введенных обозначений система запишется в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}) = 0. \quad (1)$$

Для применения метода Галеркина с разрывными базисными функциями покроем расчетную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ сеткой $\Omega_h = \{K_j \mid j=1, \dots, N_h\}$, состоящей из тетраэдральных элементов, таких, что $\Omega = \bigcup_{j=1}^{N_h} K_j$, $\dim(K_i \cap K_j) < 3$, $i, j=1, \dots, N_h, i \neq j$.

Введем пространство кусочно-полиномиальных функций

$$V_h^K = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v|_{K_j} \in P_K(K_j), j=1, \dots, N_h \right\},$$

где $P_K(K_j)$ – пространство полиномов степени не выше чем K на элементе K_j .

Зададим в V_h^K базис

$$\varphi_{jk}(x, y, z) = \begin{cases} \left(\frac{x - x_{cj}}{\Delta x_j} \right)^{\alpha_k} \left(\frac{y - y_{cj}}{\Delta y_j} \right)^{\beta_k} \left(\frac{z - z_{cj}}{\Delta z_j} \right)^{\gamma_k}, & \text{если } (x, y, z) \in K_j, \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $\alpha_k + \beta_k + \gamma_k \leq K, k=1, \dots, N_\varphi, N_\varphi = (K+1)(K+2)(K+3)/6$.

Дискретный аналог системы (1) получаем, полагая, что внутри каждого элемента K_i сетки приближенное решение $\mathbf{U}_{ih}$ будем искать в виде

$$\mathbf{U}_{ih}(t, x, y, z) = \sum_{k=1}^{N_\varphi} \mathbf{U}_{ik}(t) \varphi_{ik}(x, y, z).$$

Далее, подставив формально приближенное решение в систему (1) и потребовав выполнения ортогональности невязки функциям из V_h^K , получим:

$$\int_{K_i} \frac{d\mathbf{U}_{ih}}{dt} \varphi_{im} dV + \int_{K_i} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{U}_{ih}) \varphi_{im} dV = 0, m = 1, \dots, N_\varphi.$$

Применяя формулу интегрирования по частям, получаем:

$$\int_{K_i} \frac{d\mathbf{U}_{ih}}{dt} \varphi_{im} dV + \oint_{\partial K_i} \hat{\mathbf{F}}_n^\sigma \varphi_{im} dS - \int_{K_i} \mathbf{F}(\mathbf{U}_{ih}) \nabla \varphi_{im} dV = 0, m = 1, \dots, N_\varphi.$$

С учетом введенных ранее обозначений получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{d\mathbf{U}_{ik}}{dt} \varphi_{ik} \varphi_{im} dV + \oint_{\partial K_i} \hat{\mathbf{F}}_n^\sigma \varphi_{im} dS - \\ & - \int_{K_i} \left(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{U}_{ih}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial x} + \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{U}_{ih}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial y} + \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{U}_{ih}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial z} \right) dV = 0, m = 1, \dots, N_\varphi. \end{aligned}$$

Заменим производную $\frac{d\mathbf{U}_{ik}}{dt}$ дискретным аналогом и с учетом шага по времени Δt перепишем систему в следующем виде:

$$\begin{aligned} & \int_{K_i} \sum_{k=1}^{N_\varphi} \frac{\mathbf{U}_{ik}^{m+1} - \mathbf{U}_{ik}^m}{\Delta t} \varphi_{ik} \varphi_{im} dV + \oint_{\partial K_i} \left(\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma \right)^{m+1} \varphi_{im} dS - \int_{K_i} \left(\mathbf{F}^{(1)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \mathbf{F}^{(2)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial y} + \mathbf{F}^{(3)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) \frac{\partial \varphi_{im}}{\partial z} \right) dV = 0, m = 1, \dots, N_\varphi, \end{aligned} \quad (2)$$

где верхние индексы указывают шаг по времени, на котором берется значение соответствующего поля.

Далее рассмотрим нахождение элементов результирующей матрицы от конвективных слагаемых в системе (2).

$$\mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{U}_{ih}^{m+1}) = \mathbf{F}^{(\alpha)}(\mathbf{U}_{ih}^m) + \frac{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m), \alpha = 1, 2, 3.$$

Введем обозначения:

$$\mathbf{A} = \left(\frac{\partial \mathbf{F}^{(\alpha)}}{\partial \mathbf{U}} \right)^m \bigg|_{\mathbf{U}=\mathbf{U}}, \quad \mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{\Lambda} \mathbf{R},$$

$$\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^- + \mathbf{\Lambda}^+, \quad \mathbf{\Lambda}^- = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda} - |\mathbf{\Lambda}|), \quad \mathbf{\Lambda}^+ = \frac{1}{2}(\mathbf{\Lambda} + |\mathbf{\Lambda}|),$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^- + \mathbf{A}^+, \quad \mathbf{A}^- = \mathbf{L} \mathbf{\Lambda}^- \mathbf{R}, \quad \mathbf{A}^+ = \mathbf{L} \mathbf{\Lambda}^+ \mathbf{R},$$

$$\mathbf{A}^{(1)} = \mathbf{A}|_{\mathbf{n}=(1,0,0)}, \mathbf{A}^{(2)} = \mathbf{A}|_{\mathbf{n}=(0,1,0)}, \mathbf{A}^{(3)} = \mathbf{A}|_{\mathbf{n}=(0,0,1)},$$

где $\mathbf{L}, \mathbf{R}$ – матрицы, составленные из правых и левых собственных векторов матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{\Lambda}$ – диагональная матрица, составленная из собственных значений матрицы $\mathbf{A}$, $\hat{\mathbf{U}}$ соответствует решениям задачи о распаде разрыва.

Потоковые значения от конвективных и диффузионных слагаемых с учетом введенных ранее обозначений находятся в виде:

$$\left(\mathbf{F}_n^\sigma\right)^{m+1} = \left(\mathbf{F}_n^\sigma\right)^m + \mathbf{A}^+ \left(\mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m\right) + \mathbf{A}^- \left(\mathbf{U}_{jh}^{m+1} - \mathbf{U}_{jh}^m\right).$$

Для нахождения значения $\left(\mathbf{F}_n^\sigma\right)^m$ в работе используется потоковая функция Годунова [16]. Нормаль $\mathbf{n}$ к ребру σ направлена из ячейки с индексом i в ячейку с индексом j .

Обозначим за Γ_{ij} границу между ячейками i и j . Обозначим приращение за шаг по времени от решения $\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1}$ как

$$\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1} = \mathbf{U}_{ih}^{m+1} - \mathbf{U}_{ih}^m.$$

Приращения искомых функций будем искать в том же пространстве базисных функций, что и сами функции:

$$\Delta \mathbf{U}_{ih}^{m+1} = \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \phi_{ik}.$$

Перепишем систему в «дельта-форме»:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{N_\phi} \frac{\Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1}}{\Delta t} \int_{\kappa_i} \phi_{ik} \phi_{im} dV + \sum_j \oint_{\Gamma_{ij}} \mathbf{A}^+ \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \phi_{ik} \phi_{im} dS + \\ & + \sum_j \oint_{\Gamma_{ij}} \mathbf{A}^- \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{jk}^{m+1} \phi_{jk} \phi_{im} dS - \int_{\kappa_i} \left(\mathbf{A}^{(1)} \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \phi_{ik} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x} + \right. \\ & + \mathbf{A}^{(2)} \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \phi_{ik} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial y} + \mathbf{A}^{(3)} \sum_{k=1}^{N_\phi} \Delta \mathbf{U}_{ik}^{m+1} \phi_{ik} \frac{\partial \phi_{im}}{\partial z} \left. \right) dV = \quad (3) \\ & \int_{\kappa_i} \left(\mathbf{F}^{(1)} \left(\Delta \mathbf{U}_{ik}^m \right) \frac{\partial \phi_{im}}{\partial x} + \mathbf{F}^{(2)} \left(\Delta \mathbf{U}_{ik}^m \right) \frac{\partial \phi_{im}}{\partial y} + \mathbf{F}^{(3)} \left(\Delta \mathbf{U}_{ik}^m \right) \frac{\partial \phi_{im}}{\partial z} \right) - \\ & - \oint_{\partial \kappa_i} \left(\hat{\mathbf{F}}_n^\sigma \right)^m \phi_{im} dS, m = 1, \dots, N_\phi. \end{aligned}$$

Энтропийный ограничитель наклона

Согласно современным представлениям, реалистичная модель газодинамического течения должна в обобщенном смысле удовлетворять энтропийному неравенству [17]:

$$\frac{\partial(\rho s)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho su)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho sv)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho sw)}{\partial t} \geq 0, \quad (4)$$

в котором безразмерная удельная энтропия определяется как

$$s = \ln \frac{P}{P_*} - \gamma \ln \frac{\rho}{\rho_*},$$

где в качестве стандартных значений P_* и ρ_* можно выбрать любые постоянные положительные величины, имеющие размерности давления и плотности.

С использованием обозначений

$$S(\mathbf{U}) = \rho s, H_x = \rho su, H_y = \rho sv, H_z = \rho sw,$$

энтропийное неравенство (4) перепишем в дифференциальной форме

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(\mathbf{U})}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} &= \sum_{i=1}^5 \frac{S(\mathbf{U})}{\partial U_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial H_x}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} \geq 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Для каждой ячейки K_i дискретный аналог энтропийного неравенства (5) можно записать в виде:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{K_i} S(\mathbf{U}(x, y, z, t)) dV + \oint_{\partial K_i} \left(H_x(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_x + \right. \\ \left. + H_y(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_y + H_z(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_z \right) dS \geq 0, \end{aligned} \quad (6)$$

где $\mathbf{U}(x, y, z, t)$ соответствует решениям задачи распада разрыва.

Проинтегрируем (6) по временному промежутку $[t, t + \tau]$ и разделим результат на τ :

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\tau} \int_{K_i} [S(\mathbf{U}(x, y, z, t + \tau)) - S(\mathbf{U}(x, y, z, t))] dV + \\
& + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} \left[\oint_{\partial K_i} \left(H_x(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_x + H_y(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_y + \right. \right. \\
& \left. \left. + H_z(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_z \right) dS \right] dt' \geq 0.
\end{aligned} \tag{7}$$

Полученную интегральную форму (7) дискретного аналога энтропийного неравенства можно переписать в виде:

$$\int_{K_i} S(\mathbf{U}(x, y, z, t + \tau)) dV \geq C_s,$$

где

$$\begin{aligned}
C_s = & \int_{K_i} S(\mathbf{U}(x, y, z, t)) dV + \int_t^{t+\tau} \left[\oint_{\partial K_i} \left(H_x(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_x + \right. \right. \\
& \left. \left. + H_y(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_y + H_z(\mathbf{U}(x, y, z, t')) n_z \right) dS \right] dt'.
\end{aligned} \tag{8}$$

Второй интеграл в правой части (8) будем аппроксимировать с использованием схемы Эйлера. Получаем следующее выражение для C_s :

$$\begin{aligned}
C_s = & \int_{K_i} S(\mathbf{U}(x, y, z, t)) dV + \tau \oint_{\partial K_i} \left(H_x(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_x + \right. \\
& \left. + H_y(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_y + H_z(\mathbf{U}(x, y, z, t)) n_z \right) dS.
\end{aligned}$$

Рассмотрим одну ячейку K_i и сохраним обозначения $\mathbf{U}_{i0}, \mathbf{U}_{i1}, \mathbf{U}_{i2}$ и $\mathbf{U}_{i3}$ для значений коэффициентов разрывного метода Галеркина, соответствующих найденной точке условного минимума. Вычислим значение следующих функций

$$\Phi_{jkz}(\lambda) = p(\mathbf{U}_{i0}\varphi_{i0} + (-1)^j \lambda \mathbf{U}_{i1}\varphi_{i1} + (-1)^k \lambda \mathbf{U}_{i2}\varphi_{i2} + (-1)^z \lambda \mathbf{U}_{i3}\varphi_{i3}), \quad j, k, z = 0, 1,$$

где $p(\mathbf{U}) = (\gamma - 1) \left(E - \frac{(\rho u)^2 + (\rho v)^2 + (\rho w)^2}{2\rho} \right)$ – давление в консервативных

переменных. Если $\min[\Phi_{jkz}(1)] \geq p_{\min}, j, k, z = 0, 1$, ($p_{\min}$ – заранее выбранное малое положительное число), то полагаем $\lambda_p = 1$. В противном случае принимаем в качестве λ_p ближайший к 1 слева и снизу корень уравнения

$$\min [\Phi_{jkz}(\lambda)] = p_{\min}, j, k, z = 0, 1. \quad (9)$$

Далее вычисляем функцию

$$\Psi(\mu) = \int_{K_i} S(U_{i0}\varphi_{i0} + \lambda_p \mu U_{i1}\varphi_{i1} + \lambda_p \mu U_{i2}\varphi_{i2} + \lambda_p \mu U_{i3}\varphi_{i3}) dV$$

при значении $\mu = 1$. Если $\Psi(1) \geq C_s$, то полагаем $\mu_s = 1$. В противном случае принимаем в качестве μ_s ближайший к 1 слева и снизу корень уравнения

$$\Psi(\mu) = C_s. \quad (10)$$

После определения значений числовых параметров λ_p и μ_s описанным выше способом полагаем значения коэффициентов разрывного метода Галеркина в ячейке K_i равными

$$U_{i0}^* = U_{i0}, U_{i1}^* = \lambda_p \mu_s U_{i1}, U_{i2}^* = \lambda_p \mu_s U_{i2}, U_{i3}^* = \lambda_p \mu_s U_{i3}.$$

Данная процедура исключает возможность получения отрицательных давлений в любой ячейке на новом временном слое и обеспечивает выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства в консервативной форме [12,13]. Благодаря выпуклости вверх функций $\Phi_{jkz}(\lambda)$, $j, k, z = 0, 1$, и $\Psi(\mu)$ решение уравнений (9) и (10) искалось с помощью метода Ньютона, полагая начальное значение аргумента равным 1.

Результаты вычислительного эксперимента

Используемые вычислительные средства и библиотеки

Для проведения вычислительных экспериментов использовался компьютер с процессором Intel Core i5-8265U и видеокартой NVIDIA GeForce MX250. Для создания геометрии и генерации расчетных сеток использовался конечно-элементный генератор сетки Gmsh версии 4.6.0. Расчеты были произведены с использованием решателя PBICGSTAB из библиотеки AmgX версии 2.1.0.131-opensource. Были выполнены расчеты с использованием лимитера Кокбуерна [18] и с использованием лимитера, обеспечивающего выполнение дискретного аналога энтропийного неравенства [12].

Течение невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином

Был выполнен расчет течения невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином при $M = 2$ и числом Куранта, равным 5. Угол клина в канале равен 10° . Моделировалась конфигурация системы скачков уплотнения, возникающих при обтекании начального клина и многократного отражения начального скачка от стенок канала при условиях: $p_\infty = 10^5$ Па, $T_\infty = 300$ К, $c_v = 724,4$ Дж/(кг К) [19]. Расчетная сетка состояла из 17096 ячеек.

На рис. 1 представлены картины распределения полей числа Маха в расчетной области с использованием обоих лимитеров. На рис. 2 представлены картины распределения полного давления. Результаты согласуются с результатами, полученными с использованием метода конечных объемов на блочно-структурированных [19,20] и неструктурированных сетках [21]. Видно, что все решатели дают схожие результаты.

Рис. 1. Распределение числа Маха:
(а) энтропийный лимитер, (б) лимитер Кокбурна

Рис. 2. Распределение полного давления:
(а) энтропийный лимитер, (б) лимитер Кокбурна

На рис. 3 представлен график зависимости полного давления, отнесенного к полному давлению невозмущенного потока от координаты x на боковой стенке в сечении $y = 850$ для обоих рассматриваемых лимитеров.

Обтекание симметричного профиля NACA0012 дозвуковым потоком газа

Был выполнен расчет течения вязкого сжимаемого газа в окрестности аэродинамического профиля NACA0012 с числом Маха $M = 0,7$ под углом атаки $1,49^\circ$ с числом Куранта, равным 10. Использовалась треугольная сетка, состоящая из 9902 ячеек.

Выполнены расчеты с использованием решателей FGMRES PBICGSTAB. На рис. 4 представлено распределение поля давления возле профиля, а на рис. 5 представлено распределение числа Маха.

Рис. 3. Зависимость полного давления от координаты x на боковой стенке в сечении $y = 850$

Рис. 4. Распределение давления:
(а) энтропийный лимитер, (б) лимитер Кокбурна

Рис. 5. Распределение числа Маха:
(а) энтропийный лимитер, (б) лимитер Кокбурна

Рис. 6. Распределения коэффициента давления на поверхности профиля в неявной схеме разрывного метода Галеркина с использованием энтропийного лимитера (Entropic), лимитера Кокбурна (Cockburn) и в эксперименте (Experiment)

На рис. 6 представлено распределение коэффициента давления на поверхности профиля. Расхождение численных результатов и эксперимента на

концах профиля можно объяснить тем фактом, что в численной схеме не учитываются турбулентные эффекты.

Заключение

В данной работе представлен численный алгоритм на основе неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для моделирования динамики невязкого газа.

Проведено численное моделирование течения невязкого сжимаемого газа в плоском канале с клином и решена задача об обтекании симметричного профиля NASA0012. Проведено сравнение полученных результатов с известными численными решениями и экспериментальными данными. Полученные результаты демонстрируют хорошую согласованность. Построенный алгоритм можно использовать для решения трехмерных задач газовой динамики.

Библиографический список

1. Краснов М.М. [и др.]. Разрывный метод Галёркина на трёхмерных тетраэдральных сетках. Использование операторного метода программирования // Математическое моделирование. 2017. Т. 29, № 2. С. 3-22. doi: 10.1134/S2070048217050064
2. Волков А.В. Применение многосеточного подхода к решению 3D уравнений Навье–Стокса на гексаэдральных сетках методом Галеркина с разрывными базисными функциями // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2010. Т. 50, № 3. С. 517-531. doi: 10.1134/S0965542510030103
3. Luo H., Segawa H., Visbal M.R. An implicit discontinuous Galerkin method for the unsteady compressible Navier–Stokes equations // Computers & Fluids. 2012. Vol. 53. P. 133-144. doi: 10.1016/j.compfluid.2011.10.009
4. Wang H., Zhang Q., Shu C.-W. Third order implicit–explicit Runge–Kutta local discontinuous Galerkin methods with suitable boundary treatment for convection–diffusion problems with Dirichlet boundary conditions // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2018. Vol. 342. P. 164-179. doi: 10.1016/j.cam.2018.04.004
5. Wang H., Zhang Q., Shu C.-W. Implicit–Explicit Local Discontinuous Galerkin Methods with Generalized Alternating Numerical Fluxes for Convection–Diffusion Problems // Journal of Scientific Computing. 2019. Vol. 80. P. 2080-2114. doi: 10.1007/s10915-019-01072-4
6. Брагин М.Д., Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Обеспечение энтропийной устойчивости разрывного метода Галеркина в газодинамических задачах // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. 2019, № 051. 22 с.
URL: <https://doi.org/10.20948/prepr-2019-51>

7. Simoncini V., Szvld D.B. Flexible inner-outer Krylov subspace methods // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2003. Vol. 40. Issue 6. P. 2219-2239. doi: 10.1137/S0036142902401074
8. Naumov M. [et al.]. AmgX: a library for GPU accelerated algebraic multigrid and preconditioned iterative methods // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 2015. Vol. 37. Issue 5. P. 602-626. doi: 10.1137/140980260
9. Жалнин Р.В., Масягин В.Ф. [и др.]. Исследование порядка точности неявной схемы для метода Галеркина с разрывными базисными функциями для решения задач газовой динамики // *Журнал СВМО*. 2015. Т. 17, № 1. С. 48-54.
10. Жалнин Р.В., Масягин В.Ф. [и др.]. Об использовании WENO-ограничителя в неявной схеме для метода Галеркина с разрывными базисными функциями // *Журнал СВМО*. 2015. Т. 17, № 3. С. 75-81.
11. Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2 томах. М.: Мир, 1990. 728 с.
12. Криксин Ю.А., Тишкин В.Ф. Вариационная энтропийная регуляризация разрывного метода Галеркина для уравнений газовой динамики // *Математическое моделирование*. 2019. Т. 31, № 5. С. 69-84. doi: 10.1134/S0234087919050058
13. Богданов П.Б., Горобец А.В., Суков С.А. Адаптация и оптимизация базовых операций газодинамического алгоритма на неструктурированных сетках для расчетов на массивно-параллельных ускорителях // *Журнал вычислительной математики и математической физики*. 2013. Т. 53, № 8. С. 1360-1373. doi: 10.7868/S0044466913080048
14. Cockburn B., Shu C.-W. The Local Discontinuous Galerkin Method for Time-Dependent Convection-Diffusion Systems // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. 1998. Vol. 35. Issue 6. P. 2440-2463. doi: 10.1137/S0036142997316712
15. Bassi F.A., Rebay S. A High-Order Accurate Discontinuous Finite Element Method for the Numerical Solution of the Compressible Navier–Stokes Equations // *Journal of Computational Physics*. 1997. Vol. 131. Issue 2. P. 267-279. doi: 10.1006/jcph.1996.5572
16. Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976, 400 с.
17. Годунов С.К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики // *Математический сборник*. 1959. Т. 47, № 3. С. 271-306.
18. Cockburn B. An Introduction to the Discontinuous Galerkin Method for Convection-Dominated Problems, Advanced Numerical Approximation of Nonlinear Hyperbolic Equations // *Lecture Notes in Mathematics*. 1998. Vol. 1697. P. 151-268. doi: 10.1007/BFb0096353
19. Жалнин Р.В. [и др.] Пакет программ ЛОГОС. Методика повышенного порядка точности на блочно-структурированных сетках с использованием

- реконструкции типа WENO // Современные проблемы науки и образования. 2012. № 6. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=7329>
20. Веселова Е.А. [и др.]. Пакет программ ЛОГОС. Методики расчета течения вязкого сжимаемого газа на блочно-структурированных сетках // Современные проблемы науки и образования. 2014. №2. URL: <http://science-education.ru/ru/article/view?id=12601>
21. Волков К.Н., Дерюгин Ю.Н. [и др.]. Реализация параллельных вычислений на графических процессорах в пакете вычислительной газовой динамики ЛОГОС // Вычислительные методы и программирование. 2013, Т. 14, № 3. С. 334-342.
URL: https://elibrary.ru/download/elibrary_21014484_17146279.pdf
22. Harris C.D. Two-dimensional Aerodynamic Characteristics of the NACA0012 Airfoil in the Langley 8-Foot Transonic Pressure Tunnel. NACA Technical Memorandum 81927. Langley Research Center, 1981.
URL: <https://ntrs.nasa.gov/api/citations/19810014503/downloads/19810014503.pdf>

Оглавление

Введение	3
Математическая модель.....	4
Энтропийный ограничитель наклона	8
Результаты вычислительного эксперимента	10
Заключение.....	14
Библиографический список.....	14