ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Е.Н. Быковская, А.В. Шапранов,
В.И. Мажукин

Анализ погрешности
аппроксимации двухслойных
разностных схем для
уравнения Кортевега
де-Вриза

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Быковская Е.Н., Шапранов А.В., Мажукин В.И. Анализ погрешности аппроксимации двухслойных разностных схем для уравнения Кортевега де-Вриза // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2021. № 1. 17 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2021-1>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2021-1>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Е. Н. Быковская, А. В. Шапранов, В. И. Мажукин

**Анализ погрешности аппроксимации
двухслойных разностных схем
для уравнения Кортевега де-Вриза**

Москва — 2021

Быковская Е. Н., Шапранов А. В., Мажукин В. И.

Анализ погрешности аппроксимации двухслойных разностных схем для уравнения Кортевега де-Вриза

Представлено семейство двухслойных конечно-разностных схем с весами. На примере численного решения модельных задач о распространении одиночного солитона и взаимодействии двух солитонов показано высокое качество явно-неявных схем типа Кранка-Николса с весовым параметром 0.5 и вторым порядком аппроксимации по временной и пространственной переменным. Для полностью неявных двухслойных разностных схем с весовым параметром 1, первым порядком по времени и вторым по пространству характерны абсолютная устойчивость с невысокой точностью решения из-за высокой погрешности аппроксимации. Семейство явно-неявных разностных схем абсолютно неустойчиво в случае преобладания параметра явности менее, чем 0.5. Анализ структуры погрешности аппроксимации, выполненный с использованием метода модифицированного уравнения, подтвердил результаты численного моделирования.

Ключевые слова: двухслойные разностные схемы, погрешность аппроксимации, уравнение Кортевега де-Вриза, солитонное решение.

Elena Nikolaevna Bykovskaya, Alexander Viktorovich Shapranov, Vladimir Ivanovich Mazhukin

Analysis of the error of approximation of two-layer difference schemes for the Korteweg de Vries equation

A family of weighted two-layer finite-difference schemes is presented. Using the example of the numerical solution of model problems on the propagation of a single soliton and the interaction of two solitons, the high quality of explicit-implicit schemes of the Crank-Nichols type with a weight parameter of 0.5 and a second order of approximation in the time and space variables is shown. Absolute stability with a low accuracy of the solution due to a large approximation error is characteristic of completely implicit two-layer difference schemes with a weight parameter of 1, first order in time and second in space. A family of explicitly implicit difference schemes is absolutely unstable if the explicitness parameter less than 0.5 prevails. Analysis of the structure of the approximation error, performed using the modified equation method, confirmed the results of numerical simulation.

Key words: Two-layer finite-difference schemes, Korteweg-de Vries equation, Euler variables, Soliton solutions

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 19-07-01001.

1. Введение

Теория нелинейных волн изначально была связана с исследованиями задач газо- и гидродинамики, включающими в себя ряд разнообразных и ярких проблем прикладного и фундаментального характера [1], которые приводят к необходимости анализа огромных и растущих данных, связанных с многомерной нелинейной динамикой.

Первоначально уравнение Кортевега де-Вриза (KdV) возникло из потребностей гидродинамики [2, 3], связанных с распространением нелинейных уединенных волн на мелкой воде [4, 5], закончившихся открытием солитона [6]. Уравнение KdV было первым нелинейным волновым уравнением, имеющим солитонные решения. Отметим, что открытие солитона [6] было осуществлено на основе вычислительного эксперимента. Как оказалось, солитоны, представляющие собой устойчивое образование, обладают рядом удивительных свойств. Так, распространение солитона в виде нелинейной уединенной волны позволяет ему при своём движении сохранять форму и скорость. Кроме того, для солитонов характерно упругое взаимодействие друг с другом. В процессе столкновения они вначале деформируются, а затем восстанавливают свои исходные параметры и свою первоначальную форму. Учитывая, что распространение солитона описывается нелинейным уравнением, то принцип суперпозиции, как он понимается в линейных системах, согласно которому сумма частных решений также является решением, для него не выполняется. Солитоны именно взаимодействуют между собой, вначале деформируясь, а затем восстанавливая свои исходные параметры в отличие от линейных систем решения, которые проходят друг сквозь друга. Единственным результатом взаимодействия солитонов может быть некоторый сдвиг фаз. Это служит подтверждением того, что солитоны являются именно нелинейными решениями.

Благодаря быстрому развитию высокопроизводительной вычислительной технике, вычислительных алгоритмов и методов современного математического моделирования стали возможными исследования все более сложных проблем гидродинамики [7], нелинейной оптики [8], физика плазмы [9, 10] и твердого тела [11]. Однако, поскольку сложность исследуемых проблем опережает развитиеиспользуемой вычислительной техники, проблема увеличения эффективности математических методов и подходов остаётся актуальной.

Активное использование солитонов в исследовании и решении нелинейных волновых уравнений [12], описывающих физические явления во многих областях [13], стимулировало интерес к методам решения уравнения KdV. Уравнение KdV решалось численно различными методами, такими как метод Галеркина [14 - 16], метод коллокаций [17, 18], метод конечных элементов [19 - 21], конечно-разностный метод [22 - 30] и др. Выбор того или иного метода численного решения во многом определяет качество численного

моделирования. Необходимо также иметь в виду, что далеко не безразлично, за счет каких затрат достигается конечный результат моделирования. Поэтому вполне естественно на вычислительные алгоритмы наложить требование не только устойчивости и экономичности, но и простоты реализации. В наибольшей степени совокупностью этих свойств обладают конечно-разностные методы.

Ранее в работах [24, 25] сообщалось о результатах анализа двухслойных разностных схем для уравнения KdV с точки зрения интегральных законов сохранения. Использовалось понятие L_2 -консервативности разностной схемы как способности ее решения удовлетворять сеточным аналогом законам сохранения [31, 32]. Принцип L_2 -консервативности позволяет при построении эффективных алгоритмов следить за тем, чтобы в них выполнялись сеточные аналоги основных свойств дифференциальной задачи.

На основе принципа L_2 -консервативности для уравнения Кортевега-де Вриза было показано, что явные двухслойные разностные схемы не удовлетворяют условию L_2 -консервативности и, более того, являются абсолютно неустойчивыми даже в наиболее слабой норме L_2 . Этот принцип в этих же работах был применён для построения семейства трехслойных полностью консервативных (консервативных и L_2 -консервативных) разностных схем с весами.

В данной работе численно и аналитически исследуется семейство двухслойных разностных схем для уравнения KdV, включающее в себя как явные, так и неявные схемы.

2. Постановка задачи

Уравнение KdV в дивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \alpha \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u^2}{2} \right) + \beta \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

включает в себя нелинейный и дисперсионный члены, конкуренция которых и определяет поведение решения. Решение уравнения (1) представляется в виде движущегося солитона.

Солитон представляет собой стационарный однополярный импульс, бегущий в положительном направлении оси X со скоростью Q

$$u(x, t) = \frac{A}{\operatorname{ch}[(x - x_0 - Qt)/\delta]^2} \quad (2)$$

где $A = 3Q/\alpha$ – амплитуда и $\delta = \sqrt{4\beta/Q}$ – полуширина (на уровне $0.42A$) солитона. Аналитическое представление солитона будет использовано для тестирования вычислительного метода.

Для завершения формулировки задачи Коши необходимо задать краевые условия. В качестве начального условия задаётся сеточное представление солитона (2). Для уравнения (1) требуется задание трех граничных условий на двух границах конечной расчетной области $[0, L]$.

$$\text{На левой границе: } \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=0} = 0. \quad \text{На правой границе: } u|_{x=L} = 0, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \quad (3)$$

3. Конечно-разностная аппроксимация

В пространстве переменных $\Omega_{(x,t)}$ строим разностную равномерную по x сетку

$$\omega_{\Delta x}^{\Delta t} = \left\{ (x_m, t^k) : x_{m+1} = x_m + \Delta x, \quad t^{k+1} = t^k + \Delta t^k, \quad m = 0, \dots, M, \quad k = 0, \dots, K \right\}, \quad (4)$$

на которой определяется сеточная функция $u_m^k \equiv u(x_m, t^k)$.

Используя (4), представим семейство конечно-разностных схем для аппроксимации уравнения (1):

$$\frac{u_m^{k+1} - u_m^k}{\Delta t} + \frac{\alpha}{\Delta x} \left(\frac{(u_{m+1}^{k+\sigma} + u_m^{k+\sigma})^2}{8} - \frac{(u_m^{k+\sigma} + u_{m-1}^{k+\sigma})^2}{8} \right) + \beta \frac{u_{m+2}^{k+\sigma} - 2u_{m+1}^{k+\sigma} + 2u_{m-1}^{k+\sigma} - u_{m-2}^{k+\sigma}}{2\Delta x^3} = 0, \quad (5)$$

где $u_m^{k+\sigma} = (1-\sigma)u_m^k + \sigma u_m^{k+1}$, σ – весовой коэффициент, значения которого $\sigma \in [0 - 1]$ определяют степень “неявности” разностной схемы. Значению $\sigma = 0$ соответствует полностью явная, а значению $\sigma = 1$ – полностью неявная разностная схема.

Во всех конечно-разностных схемах (5) реализован 2-й порядок аппроксимации по пространственной x для производных, как 1-го порядка, так и 3-го. По временной переменной t для всех значений $\sigma \neq 0.5$ схемы (5) имеют 1-й порядок аппроксимации. При $\sigma = 0.5$ выражение (5) представляет собой неявную разностную схему типа Кранка-Николса со вторым порядком аппроксимации по времени. На рис. 1. показаны сеточные шаблоны для разных значений σ .

4. Вычислительный алгоритм

Разностная аппроксимация (5), примененная к внутренним точкам расчетной области, порождает систему нелинейных уравнений относительно величин $\tilde{u}$ на новом временном слое. Эта система решается на каждом шаге по времени итерационным методом Ньютона, для чего выполняется процедура ее линеаризации, после которой она преобразуется в линейную систему уравнений с 5-диагональной (ленточной) матрицей. В единственном случае $\sigma = 0$ матрица вырождается в единичную, а схема становится явной.

Рис. 1. Сеточные шаблоны, реализуемые схемой (5), для разных значений σ .

(a) $\sigma=0$, т.е. $u^{k+\sigma} = u^k$ (явная р.с.); (b) $0 < \sigma < 1$, полые кружки представляют фиктивные узлы на промежуточном временном слое ($k+\sigma$);

(c) $\sigma=1$, т.е. $u^{k+\sigma} = u^{k+1}$.

5. Вычислительный эксперимент

Для численного тестирования использовались следующие параметры уравнения $\alpha=6$, $\beta=1$ и солитона (2), представленного на рис. 2(a): $x_0=10$, $Q=4 \Rightarrow A=2$, $\delta=1$.

В расчетной области с размером $L = 420$ строилась расчетная сетка, содержащая $M = 2100$ интервалов с величиной пространственного шага $\Delta x = 0.2$. Полная ширина солитона 2δ содержала 10 интервалов.

Для неявных схем $\sigma \neq 0$ был реализован механизм автоматического выбора шага по времени, основанный на следующих параметрах: максимально допустимое число итераций на каждом шаге по времени равнялось 3-4, критерий сходимости итерационного процесса включает в себя относительную и абсолютную ошибки, значения которых принимались равными 10^{-9} . Для явной схемы ($\sigma = 0$) шаг по времени обсуждается ниже.

Рис. 2 (a). Пространственный профиль солитона в начальный момент времени $t=0$

Рис. 2 (b). Сравнение численного решения, получаемого схемой типа Кранка-Николса ($\sigma=0.5$), с аналитическим на момент времени $t=100$.

Рис. 3. Сравнение численного решения с использованием полностью неявной схемы ($\sigma=1$) с аналитическим на момент времени $t=100$.

Рис. 4. Амплитуда солитона от времени (a) и автоматически выбираемый шаг интегрирования (b) для двух неявных схем: $\sigma=0.5$ и 1.

На рис. 2(b) показано решение с использованием схемы типа Кранка-Николса ($\sigma=0.5$) на момент времени $t=100$, когда солитон сместился из начального положения на расстояние 400δ .

Скорость переноса, определенная из численного решения, оказалась на 1.1% меньше аналитического значения (т.е. отставание составило примерно 4δ). При этом амплитуда солитона колеблется вокруг среднего значения со стандартным отклонением 0.3%, а само среднее значение всего на 0.011% больше аналитического (Рис. 4(а)). То есть можно утверждать, что численное решение с хорошей точностью сохраняет амплитуду солитона в течение всего процесса счёта.

Шаг по времени в течение всего вычислительного процесса колебался с малой амплитудой вокруг постоянного значения $\Delta t = 0.0174$ (Рис. 4(б)). Эти малые колебания были связаны с организацией механизма автоматического выбора шага.

Решение с использованием полностью неявной схемы ($\sigma = 1$) приводит к существенно худшим результатам (Рис. 3). Это обусловлено большой схемной вязкостью, которая в этом случае является причиной сильного падения амплитуды солитона со временем, что, в свою очередь, уменьшает его скорость (Рис. 4(а)). При этом по мере падения амплитуды шаг интегрирования растёт (Рис. 4(б)). Однако в начальные моменты времени, когда амплитуда еще не сильно отличается от начального значения, шаг по времени оказывается примерно в 2 раза меньше, чем для схемы типа Кранка-Николса.

Рис. 5. Численное решение с использованием явной разностной схемы ($\sigma=0$) с отличающимися на порядок шагами интегрирования

На Рис. 5 показано численное решение с использованием явной разностной схемы ($\sigma = 0$). На рисунке (а) представлено решение с шагом по времени $\Delta t = 0.0001$. К моменту времени $t = 3$ происходит потеря устойчивости, и дальнейшее решение становится невозможным. Отметим, что уменьшение шага интегрирования отодвигает во времени момент потери устойчивости. Так, уменьшение шага в 2 раза до $\Delta t = 5 \cdot 10^{-5}$ приводит к тому, что разрушение решения наступает ко времени примерно $t = 6$. А на рисунке (б) показана потеря устойчивости ко времени $t = 30$ при интегрировании с шагом $\Delta t = 1 \cdot 10^{-5}$. Согласно результатам, полученным в теоретических работах [24,

25], явные двухслойные разностные схемы для уравнения КдВ являются абсолютно неустойчивыми. Наши результаты полностью согласуются с этим выводом.

6. Аналитическое исследование

При использовании метода конечных разностей численно решается не исходное уравнение в частных производных, а некоторое модифицированное уравнение, называемое дифференциальным приближением разностной схемы [33-35]. Правая часть этого приближения является погрешностью аппроксимации и равна разности между исходным уравнением в частных производных и его конечно-разностным аналогом. Исследование правых частей дифференциальных приближений позволяет установить преобладающий вклад в погрешность аппроксимации старших производных и связанных с ними таких свойств разностных схем, как диссипация и дисперсия. Известно, что если главный член в выражении для погрешности аппроксимации содержит производные четного порядка, то преобладающими свойствами разностных схем будут диссипативные, а если производные нечетного порядка – то дисперсионные.

Рис. 6. Численное решение задачи о столкновении солитонов: (а) начальное условие, (б) сравнение с аналитическим решением в момент $t=1$.

Выполним анализ семейства схем (5) с использованием метода модифицированного уравнения [33-35]. Для этого вначале заменим искомую функцию $u(x,t)$ на $f(x,t) = a \cdot u(x,t)$. Это позволяет избавиться от коэффициента α как в исходном уравнении

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{f^2}{2} \right) + \beta \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = 0, \quad (6)$$

так и в конечно-разностной аппроксимации

$$\frac{f_m^{k+1} - f_m^k}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} \left(\frac{(f_{m+1}^{k+\sigma} + f_m^{k+\sigma})^2}{8} - \frac{(f_m^{k+\sigma} + f_{m-1}^{k+\sigma})^2}{8} \right) + \beta \frac{f_{m+2}^{k+\sigma} - 2f_{m+1}^{k+\sigma} + 2f_{m-1}^{k+\sigma} - f_{m-2}^{k+\sigma}}{2\Delta x^3} = 0. \quad (7)$$

То есть коэффициент α является просто масштабирующим ось ординат.

Далее разложим двумерную функцию $f(x, t)$ в ряд Тейлора в точке $(x_m, t^{k+1/2})$ и подставим в схему (7). Оставляя в полученном выражении члены не выше второго порядка малости, можем написать

$$\begin{aligned} f'_t + f \cdot f'_x + \beta f'''_{xxx} = & - \left[f \cdot f_{xt}^{(III)} + f'_t f'_x + \beta f_{xxx}^{(IV)} \right] \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \Delta t - \\ & - \left[\frac{1}{8} f \cdot f_{xtt}^{(III)} + f'_t f_{xt}^{(III)} \left(\sigma - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{8} f''_{tt} f'_x + \frac{f'''_{ttt}}{24} + \frac{\beta}{8} f_{xxx}^{(V)} \right] \Delta t^2 - \left[\frac{2}{3} f \cdot f'''_{xxx} + f'_x f''_{xx} + \beta f_{xxxx}^{(V)} \right] \frac{\Delta x^2}{4} \end{aligned} \quad (8)$$

В этом выражении (8) для упрощения записи опущены индексы m и $k+1/2$ для функции f и всех ее производных. Сосредоточим внимание на слагаемом 1-го порядка по Δt . С помощью исходного уравнения (6) избавимся от производных по времени:

$$\begin{aligned} f'_t &= -f \cdot f'_x - \beta f'''_{xxx} \\ f''_{xt} &= \frac{\partial}{\partial x} (-f \cdot f'_x - \beta f'''_{xxx}) = -(f'_x)^2 - f \cdot f''_{xx} - \beta f_{xxxx}^{(IV)} \\ f_{xxx}^{(IV)} &= -3(f''_{xx})^2 - 4f'_x f'''_{xxx} - f \cdot f_{xxxx}^{(IV)} - \beta f_{xxxxxx}^{(VI)} \end{aligned} \quad (9)$$

Кроме того, для упрощения воспользуемся ограниченностью функции f и всех ее производных в области определения, и заменим коэффициенты при слагаемых 2-го порядка на константы K_1 K_2 . В результате окончательно получаем:

$$\begin{aligned} f'_t + f \cdot f'_x + \beta f'''_{xxx} &= K_1 \Delta x^2 + K_2 \Delta t^2 + \\ &+ \Delta t \left(\sigma - \frac{1}{2} \right) \left[\left\{ f^2 f''_{xx} + 2\beta f \cdot f_{xxx}^{(IV)} + \beta^2 f_{xxxxxx}^{(VI)} + 3\beta (f''_{xx})^2 \right\} + \left\{ 2f \cdot (f'_x)^2 + 5\beta f'_x f'''_{xxx} \right\} \right] \end{aligned} \quad (10)$$

Теперь проанализируем полученное выражение (10). В слагаемом 1-го порядка по Δt квадратные скобки содержат две группы членов: в 1-й фигурной скобке четные производные по x , во 2-й – нечетные. Т.е. 1-я фигурная скобка отвечает за схемную вязкость, а 2-я – за схемную дисперсию. При этом знак коэффициента перед дисперсионными членами не существен, в то время как

перед диффузионными – очень важен. Этот знак определяется разностью $(\sigma - 1/2)$.

Когда $\sigma > 1/2$, коэффициент перед диффузионными членами 1-го порядка положителен и схема (7) реализует уравнение (6) с дополнительной вязкостью, пропорциональной 1-й степени шага по времени. Это обеспечивает, с одной стороны, устойчивое поведение в процессе решения, с другой стороны – искажение решения, со временем начальное возмущение размазывается. Именно этот эффект мы наблюдали при численном решении с использованием полностью неявной схемы $\sigma = 1$ (см. Рис. 3).

Когда $\sigma < 1/2$, коэффициент перед диффузионными членами 1-го порядка отрицателен. То есть уравнение (10) получает отрицательную вязкость. А это означает, что схема (7) становится абсолютно неустойчивой. И поскольку абсолютное значение коэффициента по-прежнему пропорционально 1-ой степени шага по времени, то разрушение решения происходит тем раньше, чем больше шаг по времени. Именно это мы наблюдали при экспериментировании с явной разностной схемой (см. Рис. 5).

Кроме того, теперь утверждение теоретических работ [24,25] об абсолютной неустойчивости явных двухслойных разностных схем для уравнения КдВ может быть расширено для семейства схем (7): абсолютно неустойчивы все схемы (7) при $\sigma < 1/2$, т.е. при “любом преобладании явности”.

Выделенным значением σ является $\sigma=0$. При этом единственном значении слагаемое 1-го порядка в (10) обращается в ноль, и, таким образом, схема (7) получает 2-й порядок аппроксимации по обеим переменным, $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. Кроме того, зануляются эффекты схемной вязкости и дисперсии 1-го порядка. Именно благодаря этому при численном решении на несколько грубоватой сетке удавалось получать перенос солитона практически без искажений на значительные расстояния (см. Рис. 2).

Итак, схема (5) при $\sigma = 0.5$ показала наилучшие результаты при моделировании задачи о переносе солитона.

Снова делаем расчет, оставив шаг Δt_0 без изменения, но уменьшив шаг по пространству в 2 раза: $\Delta x_{(II)} = \Delta x_{(I)}/2 = 0.1$. Получаем

$$1) E_{L2}(\Delta x_{(I)}/2) = 0.05356903839,$$

$$2) E_C(\Delta x_{(I)}/2) = 0.22397163990.$$

Таким образом, с хорошей точностью

$$\frac{E_{L2}(\Delta x_{(I)})}{E_{L2}(\Delta x_{(I)}/2)} = 3.99, \quad \frac{E_C(\Delta x_{(I)})}{E_C(\Delta x_{(I)}/2)} = 4.00.$$

Т.е. при уменьшении шага по пространству в 2 раза связанная с ним ошибка аппроксимации уменьшилась в 4 раза. Это означает, что схема имеет 2-й порядок аппроксимации по пространству и ошибку $O(\Delta x^2)$.

Для определения порядка аппроксимации по времени найдем отношение:

$$\frac{E_{\Delta t}(\Delta t_{\max})}{E_{\Delta t}(\Delta t_{\max}/2)} = \frac{\varepsilon(\Delta t_{\max}, \Delta x_{(I)}) - E_{\Delta x}(\Delta x_{(I)})}{\varepsilon(\Delta t_{\max}/2, \Delta x_{(I)}) - E_{\Delta x}(\Delta x_{(I)})}. \quad (15)$$

В качестве пространственной части ошибки $E_{\Delta x}(\Delta x_{(I)})$ можем воспользоваться ранее полученными значениями (14). А полную ошибку снова посчитаем:

- 1) $\varepsilon_{L2}(\Delta t_{\max}, \Delta x_{(I)}) = 0.21931557047$, $\varepsilon_{L2}(\Delta t_{\max}/2, \Delta x_{(I)}) = 0.2150291787$,
- 2) $\varepsilon_C(\Delta t_{\max}, \Delta x_{(I)}) = 0.91958522470$, $\varepsilon_C(\Delta t_{\max}/2, \Delta x_{(I)}) = 0.90208673036$.

Подставляя все численные значения в (15), получаем

$$\frac{E_{L2}(\Delta t_{\max})}{E_{L2}(\Delta t_{\max}/2)} = 3.99, \quad \frac{E_C(\Delta t_{\max})}{E_C(\Delta t_{\max}/2)} = 3.94.$$

Это означает, что схема имеет 2-й порядок аппроксимации по времени и ошибку $O(\Delta t^2)$.

7. Заключение

В работе исследовалось семейство двухслойных разностных схем с весами для уравнения Кортевега-де Вриза на эйлеровой разностной сетке.

Численно показано, что наилучшие результаты получаются при использовании явно-неявной разностной схемы типа Кранка-Николса 2-го порядка аппроксимации $O(\Delta t^2 + \Delta x^2)$. Эта схема способна устойчиво воспроизводить стационарное решение с хорошей точностью продолжительное время. Второй порядок аппроксимации по обоим переменным численно подтвержден на примере задачи о столкновении солитонов.

Полностью неявная двухслойная схема 1-го порядка по времени $O(\Delta t + \Delta x^2)$ и 2-го по пространству, хотя и является абсолютно устойчивой, тем не менее из-за большой схемной вязкости существенно искажает решение.

Решение с использованием явной двухслойной схемы ни разу не удалось довести до конца, т.к. всегда наступал момент потери устойчивости, даже при очень малом шаге по времени. Хотя до этого момента решение было вполне приемлемым.

Аналитическое исследование семейства конечно-разностных схем (5) с использованием метода модифицированного уравнения полностью

подтвердило результаты численных экспериментов. Анализ структуры погрешности аппроксимации семейства двухслойных конечно-разностных схем позволил в явной форме показать причины успешности явно- неявных схем типа Кранка-Николса с $O(\Delta t + \Delta x^2)$ и абсолютной неустойчивости семейства схем (5) в случае “преобладания явности” с параметром $\sigma < 0.5$. Большая схемная вязкость абсолютно устойчивых полностью неявных двухслойных схем 1-го порядка $O(\Delta t + \Delta x^2)$ свидетельствует о необходимости повышения точности пространственно-временной аппроксимации.

Библиографический список

- [1] Zeytounian R.Kh. Nonlinear long waves on water and solitons // *Phys. Usp.*, **38** (12), 1333–1381 (1995).
- [2] Boussinesq J. Théorie de l'intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire // *Comptes Rendus l'Académie des Sci*, **72**, 755-759 (1871).
- [3] Burgers J.M. A mathematical model illustrating the theory of turbulence // *Adv. Appl. Mech.*, **1**, 171–199 (1948).
- [4] Lord Rayleigh D.C.L., F.R.S. On waves. (1876) XXXII. The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science, 1:4, 257-79, DOI: [10.1080/14786447608639037](https://doi.org/10.1080/14786447608639037)
- [5] Korteweg D. J. and G. de-Vries. On the change of form of long waves achancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves // *Philos. Mag.*, **39**, 422-443 (1895).
- [6] Zabusky N.J. and Kruskal M.D. Interaction of “solitons” in a collisionless plasma and the recurrence of initial states // *Phys. Rev. Lett.*, **15**, 240-243 (1965).
- [7] Su C.H. and Gardner C.S. Korteweg–de Vries equation and generalizations: III. Derivation of the Korteweg– de Vries equation and Burgers equation // *J. Math. Phys.*, **10**, 536–539 (1969).
- [8] Kivshar Y. Dark optical solitons with reverse-sign amplitude // *Phys. Rev. A*, **44**, R1446–9 (1991).
- [9] Berezin Y. A., Karpman V. I. Nonlinear evolution of disturbances in plasma and other dispersive media // *Soviet Physics JETP*, **24**, 1049-1056 (1967).
- [10] Gurevich A. V. and Pitaevski L. P. Nonstationary structure of a collision less shock wave // *Zh. Eksp. Teor. Fiz.*, **65**, 590-604 (1973).
- [11] Kivshar Yu.S., Agrawal G.P. Optical Solitons: From Fibers to Photonic Crystals // 2nd ed. Academic Press, (2008).
- [12] Dodd R.K., Eilbeck J.C., Gibbon J.D. and Morris H.C. Solitons and Nonlinear Wave Equations. London: Academic, (1982).
- [13] Whitham G.B. Linear and Nonlinear Waves, Wiley, New York, NY (1974).

- [14] Yi N., Huang Y., and Liu H., A direct discontinuous Galerkin method for the generalized Korteweg–de Vries equation: Energy conservation and boundary effect // *J. Comput. Phys.*, **242**, 351–366 (2013).
- [15] Bona J., Chen H., Karakashian O., and Xing Y. Conservative, discontinuous-Galerkin methods for the generalized Korteweg–de Vries equation // *Mathematics of Computation*, **82**(283), 1401–1432 (2013). <https://www.jstor.org/stable/42002703>
- [16] Zhang Q., Xia Y. Conservative and Dissipative Local Discontinuous Galerkin Methods for Korteweg-de Vries Type Equations // *Commun. Comput. Phys.*, **25**(2), 532–563 (2019). doi: 10.4208/cicp.OA-2017-0204
- [17] Kalisch H. and Raynaud X. On the rate of convergence of a collocation projection of the KdV equation // *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **41**(1), 95–110 (2007).
- [18] Geyikli Turabi. Collocation Method for Solving the Generalized KdV Equation // *J.Appl. Math. Phys.*, **8**, 1123–1134 (2020). <https://www.scirp.org/journal/jamp>.
- [19] Karczewska Anna, Rozmej Piotr, Szczeciński Maciej, Boguniewicz Bartosz. A Finite Element Method for Extended KdV Equations // *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, **26**(3), 555–567 (2016). <https://doi.org/10.1515/amcs-2016-0039>
- [20] Karczewska A., Szczeciński M., Rozmej P., and Boguniewicz B. Finite element method for stochastic extended KdV equations // *Computational Methods in Science and Technology*, **22**(1), 19–29 (2016).
- [21] Amein N.K., Ramadan M.A. A small time solutions for the KdV equation using Bubnov-Galerkin finite element method // *J. Egyptian Math. Society*, **19**(3), 118–125 (2011). <https://doi.org/10.1016/j.joems.2011.10.005>
- [22] Vliegthart A.C. On finite-difference methods for the Korteweg-de Vries equation // *J Eng Math*, **5**, 137–155 (1971). <https://doi.org/10.1007/BF01535405>
- [23] Goda K. On stability of some finite difference schemes for the korteweg-de vries equation // *Journal of the Physics Society of Japan*, **39**(1), 229–236 (1975). <http://dx.doi.org/10.1143/JPSJ.39.229>
- [24] Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Михайлик И. А. L2-консервативные схемы для уравнения Кортевега-де Фриса // *Доклады академии наук*, **357**(4), 458–461 (1997).
- [25] Mazhukin V.I., Matus P.P., Mikhailyuk I.A. Finite-difference schemes for the korteweg—de vries equation // *Differential Equations*, **36**(5), 789–797 (2000). doi:10.1007/bf02754240
- [26] Головизин В.М., Карабасов С.А., Суходулов Д.А. Вариационный подход к получению разностной схемы с пространственно расщепленной временной производной для уравнения Кортвега-де // *Матем. моделирование*, **12** (4), (2000).
- [27] Zhu S.H. A scheme with a higher-order discrete invariant for the KdV equation // *Appl. Math. Let.*, **14**(1), 17–20 (2001).

- [28] Hui-Ping Wang, Yu-Shun Wang, and Ying-Ying Hu. An Explicit Scheme for the KdV Equation // Chinese Phys. Lett., **25**, 2335 (2008). DOI: <https://doi.org/10.1088/0256-307X/25/7/002>
- [29] Holden H., Koley U., Risebro N.H. Convergence of a fully discrete finite difference scheme for the Korteweg–de Vries equation // IMA Journal of Numerical Analysis, **35**(3), 1047–1077 (2014). doi:10.1093/imanum/dru040
- [30] Kolebaje Olusola, Oyewande Emmanuel Oluwole. Numerical Solution of the Korteweg De Vries Equation by Finite Difference and Adomian Decomposition Method // [International Journal of Basic and Applied Sciences](#), **1**(3), (2012). DOI: [10.14419/ijbas.v1i3.131](https://doi.org/10.14419/ijbas.v1i3.131).
- [31] Akrivis G. D. Finite difference discretization of the cubic Schrödinger equation // IMA Journal of Numerical Analysis, **13**(1), 115–124 (1993). doi:10.1093/imanum/13.1.115
- [32] Akrivis Georgios, Dougalis Vassilios A., Karakashian Ohannes. Solving the systems of equations arising in the discretization of some nonlinear P.D.E.'s by implicit Runge-Kutta methods // ESAIM Mathematical Modelling and Numerical Analysis - Modélisation Mathématique et Analyse Numérique, **31**(2), 251-287 (1997).
- [33] Warming R.E., Hyett B.J. The Modified Equation Approach to the Stability and Accuracy Analysis of finite-difference Methods // J. Comput. Phys., **14**, 159-179 (1974).
- [34] Шокин Ю.И. Первое дифференциальное приближение // Новосибирск: Наука, (1979).
- [35] Anderson D., Tannehill J., Pletcher R. Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer, New York, Hemisphere Publishing Corporation, (1984).
- [36] Duan Yong, Peng Zhang, Yan Zeng, Naji Ahmed. Convergence estimate of Cauchy problems for the shallow water equations with MQ quasi-interpolation // Preprint, Sep., (2019). DOI: [10.13140/RG.2.2.17814.50244](https://doi.org/10.13140/RG.2.2.17814.50244)

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Постановка задачи	4
3. Конечно-разностная аппроксимация	5
4. Вычислительный алгоритм	6
5. Вычислительный эксперимент	6
6. Аналитическое исследование	10
7. Заключение	13
Библиографический список.....	14