ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 70 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Лукин В.В., Соломенцева П.В.

Модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей для моделирования контакта упругих тел

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Лукин В.В., Соломенцева П.В. Модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей для моделирования контакта упругих тел // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 70. 26 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-70
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-70

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В. Келдыша
Российской академии наук

В.В. Лукин, П.В. Соломенцева

Модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей для моделирования контакта упругих тел

Москва — 2020

Лукин В.В., Соломенцева П.В.

Модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей для моделирования контакта упругих тел

Разработана модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей. Модификация позволяет проводить незвисимую от сеток внутри контактирующих тел аппроскимацию функции множителей Лагранжа. Приведена методика построения контактной границы по облаку точек, принадлежащих сеткам в контактирующих телах и помеченных как вступившие в контакт. Рассмотрена разрывная кусочно-постоянная аппроксимация функции множителей Лагранжа. Проведенные тестовые расчеты показали возможность уточнения расчета нормальной компоненты напряжений на границе контакта без изменения сетки в контактирующих телах путем измельчения дискретизации контактной границы.

Ключевые слова: контактная задача, метод конечных элементов, метод множителей Лагранжа, независимая контактная граница.

Vladimir Vladimirovich Lukin, Polina Vladimirovna Solomentseva

Modification of the Lagrange multiplier method with an detached contact boundary for modeling the contact of elastic bodies

A modification of the Lagrange multipliers method with detached contact boundary is developed. The modification allows one to construct an approximation of the Lagrange multiplier function independently of the meshes inside the contacting bodies. A method for constructing a contact boundary from a cloud of points belonging to meshes in contacting bodies and marked as having come into contact is presented. A discontinuous piecewise constant approximation of the Lagrange multipliers function is considered. The performed test calculations showed the possibility of refining the calculation of the normal stress component at the contact boundary without changing the mesh in the contacting bodies by refining the discretization of the contact boundary.

Key words: contact problem, finite element method, Lagrange multiplier method, detached contact boundary.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проекты 18-31-20020, 18-01-00252.

1. Введение

Аккуратное моделирование контактного взаимодействия твердых тел является важной частью многих задач механики сплошных сред [1–6]. Для решения статических контактных задач применяется целый ряд численных методов, среди которых метод множителей Лагранжа [7, 8], метод штрафов [8], метод Шварца [9–12] и другие реже используемые, например, метод конечных элементов с использованием базисных функций эрмитовой интерполяции [13].

В случае контактного взаимодействия тел должны быть выполнены два фундаментальных контактных условия: непроникание одного тела в другое (кинематическое условие на перемещения точек поверхности контактирующих тел) и равенство силовых воздействий каждого из контактирующих тел на другое (третий закон Ньютона, условие равенства на поверхности контакта нормальных напряжений). Учет кинематических контактных условий в большинстве случаев численного моделирования контактного взаимодействия тел не представляет значительной сложности, тогда как для учета силового контактного условия часто требуются дополнительные усилия.

Отдельный комплекс вопросов связан с определением контактной поверхности, поскольку контактирующие тела представлены, как правило, конечноэлементными сетками, не имеющими общих узлов. Стандартный подход [8], примененный в том числе в работах [14, 15], заключается в следующем. Из двух тел одно выбирается активным (master), другое пассивным (slave). В качестве контактной поверхности используется конечноэлементная сетка на вступившей в контакт границе активного тела. Наличие контакта определяется проникновением одного тела в другое при решении задачи без учета контакта. Такой подход имеет существенные недостатки. Во-первых, граница конечноэлементной сетки не является гладкой, что вносит погрешность в геометрическое задание поверхности контакта. Во-вторых, выбор активного или пассивного тела часто не основан на физических соображениях и в большинстве случаев остается на усмотрение вычислителя.

В рамках данной работы рассмотрим контактную задачу в двумерной пространственной постановке. В качестве метода решения уравнений теории упругости будем использовать метод конечных элементов (МКЭ) [16]. Для моделирования контактного взаимодействия мы применим метод множителей Лагранжа [8] и используем иной подход к построению поверхности (в рассматриваемом двумерном случае — линии) контакта. В качестве контактной границы будем использовать кривую, находящуюся между границами тел, вступивших в контакт. Такая граница может быть построена различными способами, в несколько упрощенном смысле будем называть ее средней линией. Такая кривая может обладать наперед заданной гладкостью, а контактирующие тела являются относительно нее равнозначными, что согласуется с физикой задачи. Кроме того, введение независимой контактной поверхности позволяет использовать любой вариант аппроксимации функции множителей Лагранжа, не обязательно связанный с дискретизацией тел.

2. Постановка контактной задачи

Рассмотрим стандартную постановку двумерной контактной задачи [8].

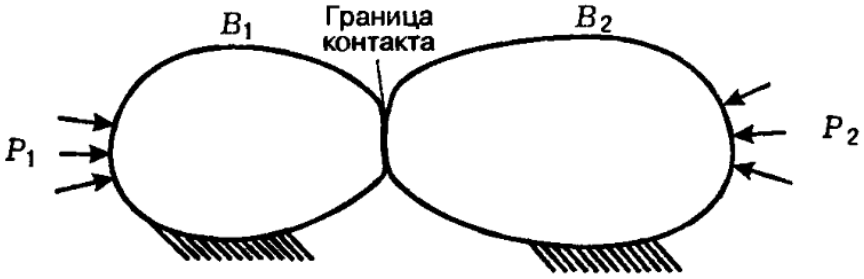

Рис. 1. Два тела, находящиеся в контакте

Пусть два тела B_1 и B_2 в результате приложенных нагрузок вступают в контакт, как это изображено на рис. 1. На контактной поверхности Γ_C выполненяются условия непроникновения одного тела в другое:

$$g^\alpha = \min_{\boldsymbol{x}^\beta \in \Gamma^\beta} (\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}) \cdot \boldsymbol{n}^\alpha \geqslant 0, \quad \boldsymbol{x}^\alpha \in \Gamma^\alpha, \tag{1}$$

где α, β — индексы контактирующих тел, Γ^α — поверхность тела B_α, обращенная к B_β, Γ^β — поверхность тела B_β, обращенная к B_α, $\boldsymbol{n}^\alpha$ — внешняя нормаль в точке x^α к поверхности контакта для тела B_α, g^α — зазор между точкой x^α и телом B_β. Контакт возникает тогда, когда хотя бы для одной точки тела B_α зазор $\boldsymbol{x}^\alpha - \boldsymbol{x}^{\boldsymbol{\beta}}$ равен нулю. В противном случае тела не находятся в контакте.

В случае контакта на совместной границе контактирующих тел возникают распределенные поверхностные силы, обозначаемые $\boldsymbol{t}$. Нормальная и касательная составляющие распределенной контактной силы, действующей на любое из тел, имеют вид

$$t_n = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{n} \leqslant 0, \tag{2}$$

$$t_t = \boldsymbol{t} \cdot \boldsymbol{\tau}, \tag{3}$$

где $\boldsymbol{n}$ — внешняя нормаль к контактной поверхности данного тела, $\boldsymbol{\tau}$ — касательный вектор к контактной поверхности тела.

Будем рассматривать контактное взаимодействие без учета трения на контактной границе. В этом случае касательные контактные силы принимаются равными нулю.

3. Математическая модель

Математическая модель статического контактного взаимодействия упругих тел включает в себя уравнение равновесия, а также ряд определяющих соотношений [17], записанных в прямоугольной декартовой системе координат Oxy. Приведем используемые обозначения и формулы.

1) Соотношения Коши:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}\}^T = [B]\{u\}, \tag{4}$$

где $\{\varepsilon\}$ — вектор деформаций, $\{u\}(M) = \{u_x(M), u_y(M)\}^T$ — вектор перемещений в точке тела M, а матрица B имеет следующий вид:

$$B = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix}.$$

2) Обобщенный закон Гука:

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}\}^T = [H]\{\varepsilon - \varepsilon_0\}, \tag{5}$$

где $\{\sigma\}$ — вектор напряжений, $\{\varepsilon_0\}$ — вектор начальной деформации (в рассматриваемых задачах она нулевая), $[H]$ — матрица упругих модулей, которая для плоско-деформированного состояния будет иметь следующий вид:

$$H = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \dfrac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{(1-2\nu)}{2(1-\nu)} \end{bmatrix},$$

где E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона для материала соответственно.

3) Дифференциальные уравнения равновесия (в отсутствие объемных сил):

$$[B]^T\{\sigma\} = \{f\}. \tag{6}$$

4) Граничные условия:

$$\begin{gathered} u_x(M) = \tilde{u}_x(M), M \in \Gamma_1, \\ u_y(M) = \tilde{u}_y(M), M \in \Gamma_2, \\ \sigma_x(N)n_x(N) = \tilde{p}_x(N), N \in \Gamma_3, \\ \sigma_y(N)n_y(N) = \tilde{p}_y(N), N \in \Gamma_4, \\ \tau_{xy}(N)n_y(N) = \tilde{p}_{xy}(N), N \in \Gamma_5, \end{gathered}$$

где $\Gamma_i, i = 1, .., 5$ — части поверхности рассматриваемого тела.

5) Контактные условия:

$$u_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = u_n^{(2)}|_{\Gamma_C}, \tag{7}$$

$$\sigma_n^{(1)}|_{\Gamma_C} = \sigma_n^{(2)}|_{\Gamma_C}, \tag{8}$$

где $u_n^{(i)}$ и $\sigma_n^{(i)}$ — нормальные перемещения и нормальные напряжения для i-го тела, $i = 1, 2$, Γ_C — контактная поверхность.

4. Методика численного решения

Численный алгоритм решения рассмотренной математической модели основан на методе конечных элементов (МКЭ) с линейными треугольными элементами [16, 18].

Полная потенциальная энергия тела в рамках теории упругости в классическом методе конечных элементов при отсутствии массовых сил имеет следующий вид [16]:

$$\Pi(u) = U(u) - W(u) = \frac{1}{2}\int\limits_B \{\varepsilon\}^T[H]\{\varepsilon\}dS - \int\limits_\Gamma \{u\}^T\{t\}d\Gamma, \tag{9}$$

где u — поле возможных перемещений, удовлетворяющее граничным условиям, U — потенциальная энергия деформации, W — потенциальная энергия внешних нагрузок, $\{t\}$ — вектор поверхностных сил.

Согласно методу множителей Лагранжа [8] к потенциальной энергии системы (9), добавляется потенциал контактных сил вида

$$W_C = -\int\limits_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)})d\Gamma, \tag{10}$$

где Γ_C — поверхность контакта между телами B_1 и B_2, Λ — функция множителей Лагранжа, имеющая смысл вектора поверхностных контактных сил, $x^{(i)} = X^{(i)} + u^{(i)}$ — актуальные положения соответствующих сходственных точек тел, $i = 1, 2$, на поверхности контакта, $X^{(i)}$ и $u^{(i)}$ — исходные положения и перемещения сходственных точек соответственно.

Получим определяющую систему линейных уравнений из условия минимума потенциальной энергии. Для этого проварьируем потенциальную энергию со слагаемым, соответствующим контактным силам, и приравняем вариацию к нулю:

$$\delta\Pi = \int\limits_B \delta\{\varepsilon\}^T[H]\{\varepsilon\}dS - \int\limits_\Gamma \delta\{u\}^T\{t\}d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_C} \delta\Lambda \cdot (x^{(1)} - x^{(2)})d\Gamma - \\ - \int\limits_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)})d\Gamma = 0. \tag{11}$$

Так как u и Λ независимы, то получим систему уравнений вида

$$\int\limits_S \delta\{\varepsilon\}^T[H]\{\varepsilon\}dS - \int\limits_\Gamma \delta\{u\}^T\{t\}d\Gamma - \int\limits_{\Gamma_C} \Lambda \cdot (\delta u^{(1)} - \delta u^{(2)})d\Gamma = 0, \tag{12}$$

$$\int\limits_{\Gamma_C} \delta\Lambda \cdot ((X^{(1)} + u^{(1)}) - (X^{(2)} + u^{(2)}))d\Gamma = 0. \tag{13}$$

Для составления указанной системы уравнений необходимо иметь алгоритм численного взятия интеграла (10). Для этого может быть использована любая квадратурная формула соответствующей точности при условии дискретизации функции Λ. Такую дискретизацию можно производить в виде разложения

$$\Lambda \approx \sum_{i=1}^{N_\lambda} \lambda_i \psi_i(x) \tag{14}$$

данной функции по некоторому функциональному базису, заданному на контактной поверхности Γ_C ($x \in \Gamma_C$). Коэффициенты λ_i такого разложения являются дополнительными неизвестными в результирующей системе линейных алгебраических уравнений метода конечных элементов. Далее мы будем называть их „множителями Лагранжа“. Интеграл (10) тогда должен быть заменен на

$$\widetilde{W}_C = -\sum_{k=1}^{N_q} \sum_{i=1}^{N_\lambda} c_k \lambda_i \psi_i(x_k)(x^{(1)}(x_k) - x^{(2)}(x_k)), \tag{15}$$

где N_λ — число базисных функций $\psi_i(x)$ в разложении функции множителей Лагранжа Λ, N_q — число узлов квадратурной формулы (КФ), c_k — веса КФ, x_k — ее узлы, $x^{(1)}(x_k)$ и $x^{(2)}(x_k)$ — соответствующие узлам КФ актуальные положения сходственных точек на первом и втором телах соответственно, λ_i — набор множителей Лагранжа.

Приведенная запись (15) позволяет для вычисления $\widetilde{W}_C$ использовать следующий прием. Выберем кривую $\widetilde{\Gamma}_C$, расположенную между границами контактирующих тел, которую будем считать приближением поверхности контакта тел Γ_C. Будем вычислять интеграл $\widetilde{W}_C$ вдоль нее. Такой подход избавляет от стандартного для метода множителей Лагранжа разделения контактирующих тел на ведущее и ведомое, а также позволяет аппроксимировать Λ с использованием любого подходящего функционального пространства и с любой необходимой точностью.

5. Алгоритм расчета с независимой границей контакта

Расчет с кривой, заменяющей границу контакта, строится по следующему алгоритму.

1) Среди всех узлов сеток, заданных в контактирующих телах, выделим соответствующие границам элементов, на которых зафиксировано проникновение одного тела в другое. Эти точки будем называть *контактными* (рис. 2, а, отмечены красным).

2) По множеству контактных точек построим кривую, которую будем принимать в качестве поверхности контакта (рис. 2, б, красная кривая). Варианты ее построения будут рассмотрены далее.

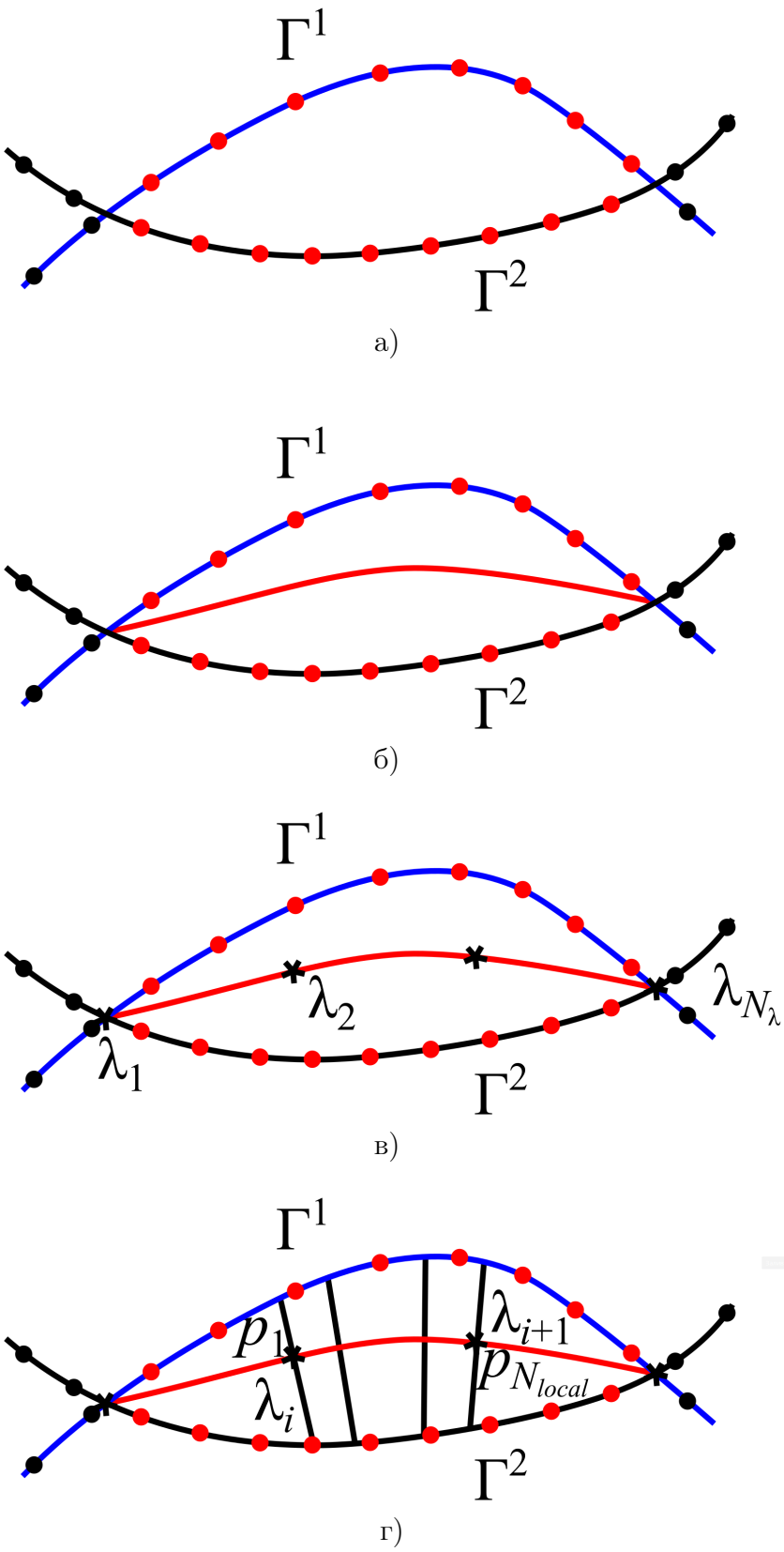

Рис. 2. Этапы применения независимой контактной поверхности: а) выбор контактных точек, б) построение кривой, в) выбор аппроксимации функции множителей Лагранжа, г) выбор квадратурной формулы и поиск сходственных точек

3) Используя введенную кривую как носитель, зададим аппроксимацию функции множителей Лагранжа Λ в виде (14) и набор множителей Лагранжа λ_i, $i = \overline{1, N_\lambda}$ (рис. 2, в).

4) Разобъем контактную кривую на отрезки в соответствии с принятой аппроксимацией функции множителей Лагранжа (с учетом носителей базисных функций $\psi_i(x)$). На каждом подотрезке в (15) будем использовать квадратурную формулу (например, формулу центральных прямоугольников) с узлами p_i, $i = 1, .., N_{local}$. В каждой точке p_i построим нормаль к контактной поверхности и найдем сходственные точки как пересечения построенной нормали и ближайших элементов границ конактирующих тел (рис. 2, г).

Рассмотрим алгоритм построения контакной кривой (п. 2) подробнее.

5.1. Методы построения контактной кривой

Рассмотрим набор S, состоящий из N контактных узлов $\{(x_i, y_i)\}_{i=1}^N$, входящих в сетки на контактирующих телах. Зададим сплайн в параметрическом виде [19, 20]

$$x(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3, \tag{16}$$

$$y(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3, \tag{17}$$

и найдем неизвестные коэффициенты $a_0, \ldots, a_3, b_0, \ldots, b_3$ путем минимизации функционала:

$$F = \sum_{i=1}^{N} p_i \left((a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + a_3 t_i^3 - x_i)^2 + \right.$$
$$\left. + (b_0 + b_1 t_i + b_2 t_i^2 + b_3 t_i^3 - y_i)^2 \right), \tag{18}$$

где $p_i > 0$, $i = \overline{1, N}$ — весовые коэффициенты, t_i, $i = \overline{1, N}$ — значения внутреннего параметра сплайна, соответствующие контактным узлам. Набор величин t_i также должен быть определен в ходе минимизации функционала.

В полном виде поставленная задача является реализацией нелинейного варианта метода наименьших квадратов (МНК). Полученная задача минимизации является сложной, прежде всего из-за необходимости определения значений внутреннего параметра сплайна.

Далее рассмотрим приемы, которые могут упростить эту задачу и позволить найти точку минимума функционала (18) приближенно. Для ясности изложения рассмотрим эти приемы на примере. Возьмем следующий набор контактных узлов (рис. 3):

$$S = \{(1., 2), (1.5, 2.05), (2., 1.97), (2.5, 2.1), (3, 2), (3.5, 2.01),$$
$$(4., 2), (4.5, 1.98), (5, 2), (5.5, 1.9), (6., 2), (6.5, 1.95),$$
$$(7., 2), (7.5, 1.9), (8., 1.96), (8.5, 2.05), (9., 2), (9.5, 1.99), (10., 2)\}.$$

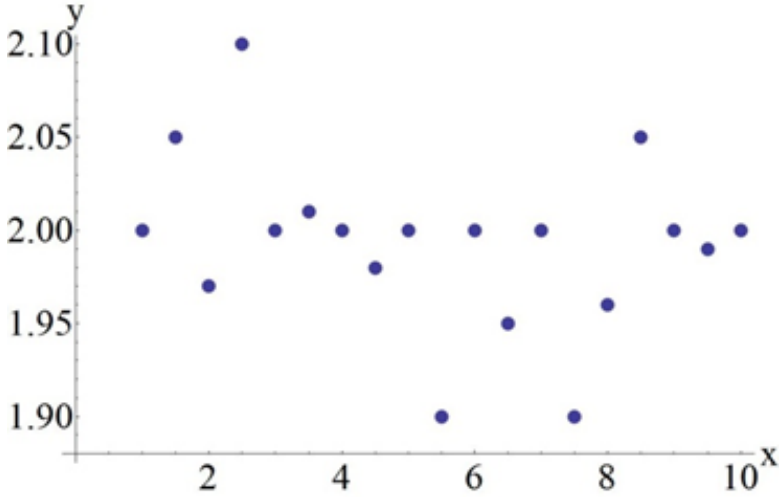

Рис. 3. Исходный набор контактных узлов

Найдем приближенно кривую, доставляющую минимум функционалу (18), за два шага.

Шаг 1. Для получения набора значений $\{t_i\}_{i=1}^N$ вместо кубического сплайна (16)–(17) рассмотрим линейный:

$$x(t) = a_0^l + a_1^l t, \tag{19}$$

$$y(t) = b_0^l + b_1^l t. \tag{20}$$

Здесь в качестве неизвестных выступают коэффициенты $a_0^l, a_1^l, b_0^l, b_1^l, t_1, \ldots, t_N$.

Минимизируем функционал

$$F = \sum_{i=1}^{N} (a_0^l + a_1^l t_i - x_i)^2 + (b_0^l + b_1^l t_i - y_i). \tag{21}$$

Для этого вычислим его первую вариацию и приравняем ее к нулю. Тогда получим следующую систему нелинейных уравнений:

$$\frac{dF}{da_0} = 2\sum_{i=1}^{N} \left(a_0^l + a_1^l t_i - x_i\right) = 0, \tag{22}$$

$$\frac{dF}{db_0} = 2\sum_{i=1}^{N} \left(b_0^l + b_1^l t_i - y_i\right) = 0, \tag{23}$$

$$\frac{dF}{da_1} = 2\sum_{i=1}^{N} \left(a_0^l + a_1^l t_i - x_i\right) t_i = 0, \tag{24}$$

$$\frac{dF}{db_1} = 2\sum_{i=1}^{N} \left(b_0^l + b_1^l t_i - y_i\right) t_i = 0, \tag{25}$$

$$\frac{dF}{dt_i} = 2\left(a_1^l \left(a_0^l + a_1^l t_i - x_i\right) + b_1^l \left(b_0^l + b_1^l t_i - y_i\right)\right) = 0,\ i = 1, .., N. \tag{26}$$

При этом будем всегда считать, что $t_1 = 0$.

Для решения системы (22)–(26) воспользуемся методом Ньютона. Одна из проблем, которая при этом возникает, — существование двух точек экстремума функционала (21), рис. 4.

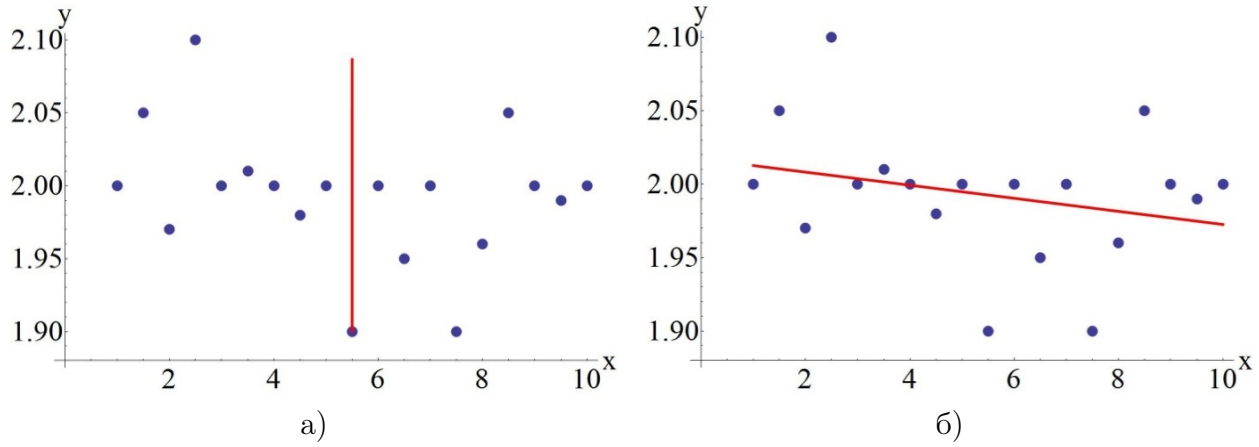

Рис. 4. Два варианта прямых, доставляющих экстремум функционалу (21)

Для выбора точки минимума можно поступить следующим образом.

1) Найти любой из экстремумов — прямую вида (19)–(20).

2) Построить перпендикулярную ей прямую, доставляющую функционалу второй экстремум. В данном случае необходимо лишь найти значение внутреннего параметра первой прямой, соответствующее точке пересечения прямых, при котором функционал достигает экстремума.

3) Выбрать из двух вариантов прямую с меньшим значением функционала (21).

В рассматриваемом примере функционал на первой прямой, рис. 4а, принимает значение 142.503, на второй , рис. 4б — 0.036738.

Полученное приближенное распределение параметра $t_i,\ i = 1, .., N$ используем на следующем шаге.

Шаг 2. Применяем метод наименьших квадратов к поиску минимума функционала (18) с неизвестными $a_0, \ldots, a_3, b_0, \ldots, b_3$ и заданными $t_i,\ i = \overline{1, N}$. Для нахождения неизвестных коэффициентов необходимо решить систему линейных алгебраических уравнений

$$\frac{dF}{da_j} = 2\sum_{i=1}^{N}(a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + a_3 t_i^3 - x_i)t_i^j = 0,\ j = 1, .., 4; \tag{27}$$

$$\frac{dF}{db_j} = 2\sum_{i=1}^{N}(b_0 + b_1 t_i + b_2 t_i^2 + b_3 t_i^3 - y_i)t_i^j = 0,\ j = 1, .., 4. \tag{28}$$

На рис. 5 показан полученный после применения данного приема сплайн.

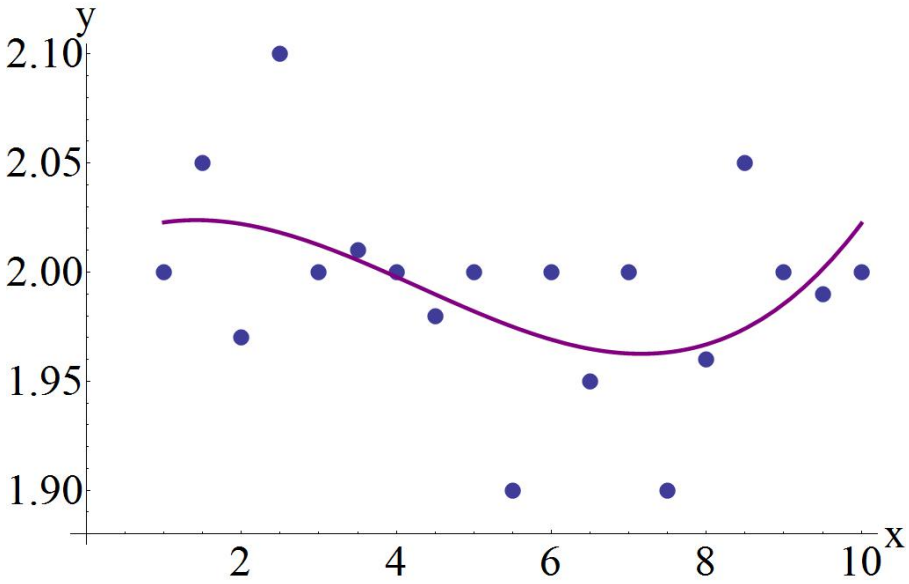

Рис. 5. Результат поиска средней линии

Способ нахождения набора значений $\{t_i\}_{i=1}^N$ в ходе выполнения шага 1 может быть упрощен. Для этого можно при помощи формул линейной регрессии [20] построить прямую $y = ax + b$, наименее уклоняющуюся от точек набора S. Ее коэффициенты a и b можно вычислить непосредственно:

$$a = \frac{\left(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right)\left(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} y_i\right) - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i}{\left(\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i\right)^2 - \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2},$$

$$b = \frac{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i y_i - a\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i^2}{\frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N} x_i}.$$

Полученная прямая полностью повторяет представленную на рис. 4б. Далее в качестве значений параметра t_i для каждого $i = \overline{1, N}$ может быть взято расстояние от некоторой точки прямой до проекции точки (x_i, y_i) на прямую.

5.2. Модификации методов построения контактной кривой

В некоторых случаях — если контактная поверхность сложная или распределение контактных узлов сеток приводит к средним линиям с большой кривизной — качество получаемой контактной кривой оказывается неудовлетворительным. Тогда представленный выше алгоритм может быть модифицирован.

Для сглаживания контактной кривой могут быть заданы различные значения для весов p_i, $i = \overline{1, N}$, либо применен регуляризатор кривизны [19–21],

аналогичный регуляризатору А.Н. Тихонова. В последнем случае вместо исследования функционала (18) будем искать точку минимума модифицированного функционала

$$F_R = \sum_{i=1}^{N} p_i \left((a_0 + a_1 t_i + a_2 t_i^2 + a_3 t_i^3 - x_i)^2 + \right.$$
$$\left. +(b_0 + b_1 t_i + b_2 t_i^2 + b_3 t_i^3 - y_i)^2\right) +$$
$$+ \alpha \int_{t_1}^{t_N} (x''(t))^2 + (y''(t))^2 dt,$$

где p_i, $i = 1, .., N$ — веса, а α — параметр регуляризатора.

Выпишем выражения для регуляризатора с учетом вида кривой (16)–(17):

$$\alpha \int_{t_1}^{t_N} (x''(t))^2 + (y''(t))^2 dt = \alpha \int_{t_1}^{t_N} (2a_2 + 6a_3 t_i)^2 + (2b_2 + 6b_3 t_i)^2 dt =$$
$$= 4\alpha (a_2^2 t + 2a_2 a_2 t^2 + 3a_3 t^3 + b_2^2 t + 3b_2 b_3 t^2 + 3b_3 t^3) \Big|_{t_i}^{t_N} =$$
$$= 4\alpha \left((a_2^2 + b_2^2)(t_N - t_1) + 3(a_2 a_3 + b_2 b_3)(t_N^2 - t_1^2) + \right.$$
$$\left. +3(a_3 + b_3)(t_N^3 - t_1^3)\right). \quad (29)$$

На рис. 6 показана средняя линия, полученная с использованием функционала F_R, значения $\alpha = 100$ и единичными весами p_i, $i = \overline{1, N}$. Как видно,

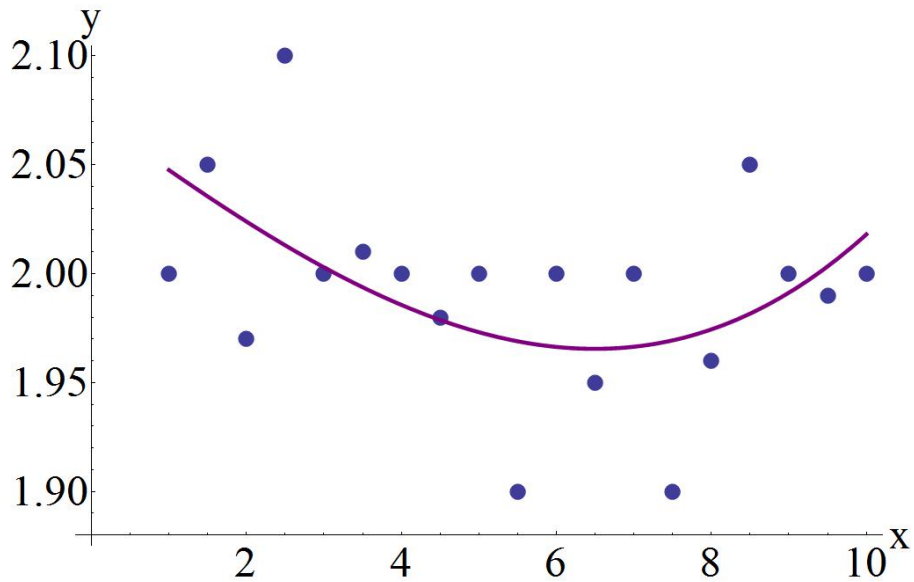

Рис. 6. Контактная кривая, построенная с использованием регуляризатора с коэффициентом $\alpha = 100$

кривая обладает меньшей кривизной и не меняет направление выпуклости в сравнении с изображенной на рис. 5.

В случае сложной контактной поверхности одного сплайна может не быть достаточно для ее адекватного описания. В таком случае средняя линия может быть разбита на несколько сплайнов, сопрягаемых друг с другом так, чтобы полученная кривая была гладкой в точке стыковки сплайнов.

Минимизируемый функционал для такой модификации имеет вид

$$
\begin{aligned}
F_M = \sum_{j=1}^{N_{sp}} \Bigg(\sum_{i=1}^{N} p_i^{(j)} \Big(& (a_0^{(j)} + a_1^{(j)} t_i^{(j)} + a_2^{(j)} t_i^{(j)2} + a_3^{(j)} t_i^{(j)3} - x_i)^2 + \\
& + (b_0^{(j)} + b_1^{(j)} t_i^{(j)} + b_2^{(j)} t_i^{(j)2} + b_3^{(j)} t_i^{(j)3} - y_i)^2 \Big) \Bigg) + \\
& + \sum_{k=1}^{N_{sp}} \Big[\mu_1^{(k)} \Big(a_0^{(k)} + a_1^{(k)} t_*^{(k)} + a_2^{(k)} t_*^{(k)2} + a_3^{(k)} t_*^{(k)3} - \\
& - (a_0^{(k+1)} + a_1^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)} + a_2^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)2} + a_3^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)3}) \Big) + \\
& + \mu_2^{(k)} \Big(b_0^{(k)} + b_1^{(k)} t_*^{(k)} + b_2^{(k)} t_*^{(k)2} + b_3^{(k)} t_*^{(k)3} - \\
& - (b_0^{(k+1)} + b_1^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)} + b_2^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)2} + b_3^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)3}) \Big) + \\
& + \mu_3^{(k)} \Big(a_1^{(k)} + 2a_2^{(k)} t_*^{(k)} + 3a_3^{(k)} t_*^{(k)2} - (a_1^{(k+1)} + 2a_2^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)} + 3a_3^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)2}) \Big) + \\
& + \mu_4^{(k)} \Big(b_1^{(k)} + 2b_2^{(k)} t_*^{(k)} + 3b_3^{(k)} t_*^{(k)2} - \\
& - (b_1^{(k+1)} + 2b_2^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)} + 3b_3^{(k+1)} t_{**}^{(k+1)2}) \Big) \Big], \quad (30)
\end{aligned}
$$

где N_{sp} — количество соединяемых сплайнов, все коэффициенты с верхним индексом k относятся к k-му сплайну, t_*, t_{**} — значение внутренних параметров в точке соединения для k и $k+1$ сплайна соответственно. Условия гладкого сопряжения сплайнов введены при помощи множителей Лагранжа μ. Так $\mu_1^{(k)}, \mu_2^{(k)}$ отвечают за непрерывность соединения сплайнов, а $\mu_3^{(k)}, \mu_4^{(k)}$ — за равенство касательных к сопрягаемым сплайнам.

На рис. 7 показана средняя линия для рассматриваемого примера, сшитая из двух сплайнов.

Также в функционал (30) может быть добавлен регуляризатор кривизны из (29).

5.3. Выбор базисных функций для аппроксимации функции множителей Лагранжа

Аппроксимацию функции множителей Лагранжа (14) можно задавать различными способами, выбирая набор базисных функций $\{\psi_i(x)\}_{i=1}^{N_\lambda}$. Рассматриваются кусочно-линейные аппроксимации со стандартным конечноэлементным или дуальным базисом [22, 23]. В данной работе используем кусочно-постоянную аппроксимацию функции множителей Лагранжа (рис. 8). Такой

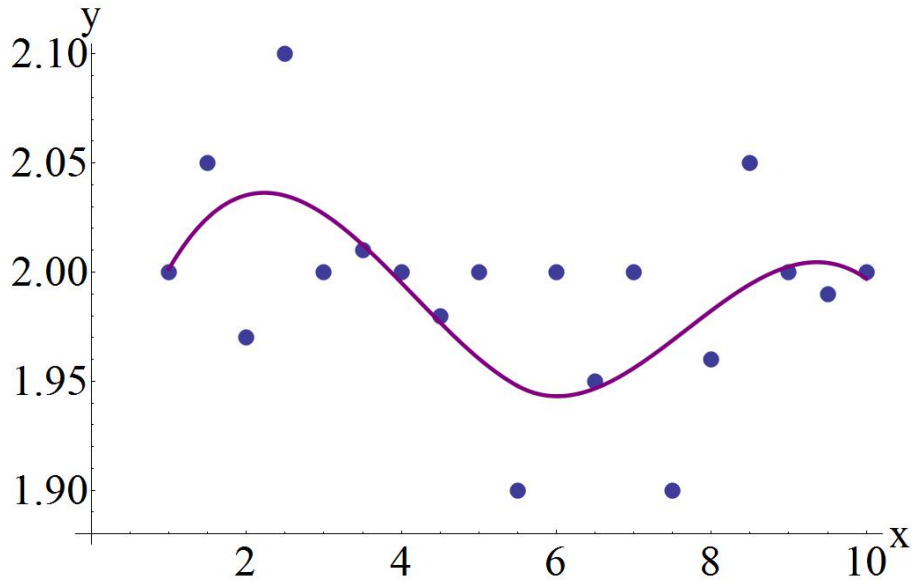

Рис. 7. Построение средней линии с использованием нескольких сплайнов

выбор является наиболее логичным в случае использования для решения задачи упругости линейных конечных элементов. В этом случае компоненты тензора упругих напряжений в каждом треугольном элементе могут быть аппроксимированы постоянным значением. Функция множителей Лагранжа, в свою очередь, имеет смысл давления (нормального напряжения) на контактной поверхности, и ее аппроксимацию логично согласовывать с аппроксимацией тензора напряжений.

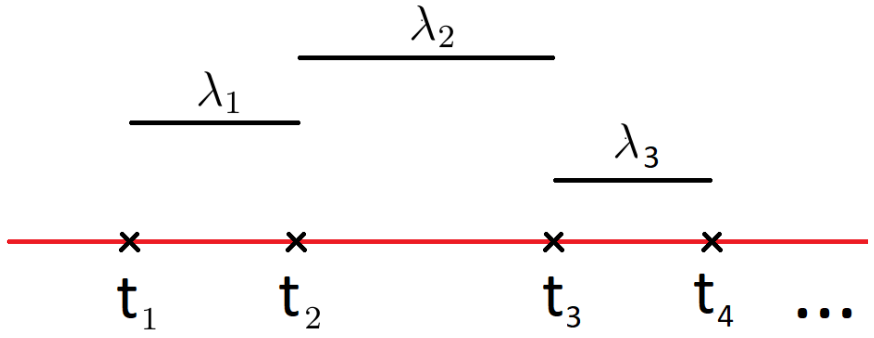

Рис. 8. Кусочно-постоянная аппроксимация функции множителей Лагранжа

6. Результаты тестовых расчетов

Рассмотрим несколько тестовых примеров, демонстрирующих особенности разработанной методики. Рассмотрим как случаи с прямолинейной границей контакта, так и с криволинейной.

6.1. Взаимодействие одинаковых брусков

Рассмотрим систему брусков, изображенную на рис. 9. Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй лежит на первом. Сверху ко второму бруску приложена вертикальная распределенная сила p.

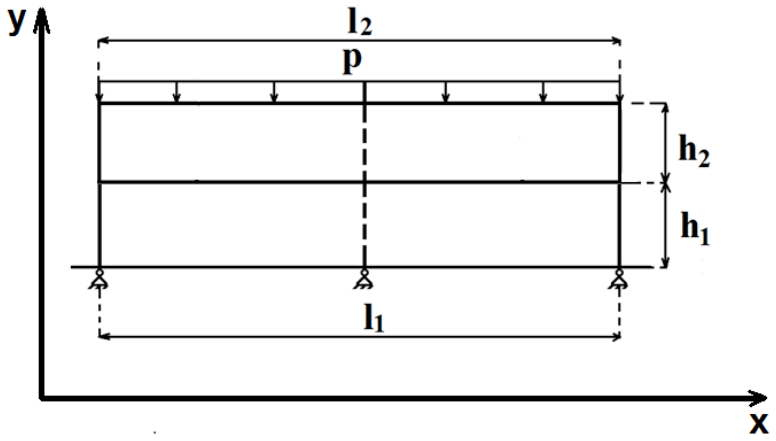

Рис. 9. Система из двух одинаковых брусков

Зададим следующие значения параметров задачи, приведенных на рисунке: $l_1 = 8$, $l_2 = 8$, $h_1 = 4$, $h_2 = 4$. Выберем параметры материалов одинаковыми $\nu_1 = \nu_2 = 0.3$, $E_1 = E_2 = 0.07$, величина распределенной силы $p = 0.1$.

В силу симметрии задачи рассмотрим половину области. В таком случае закрепим ось симметрии системы брусков по координате x на левой границе, первый брусок — по координате y на нижней границе и ко второму бруску сверху приложим распределенную нагрузку.

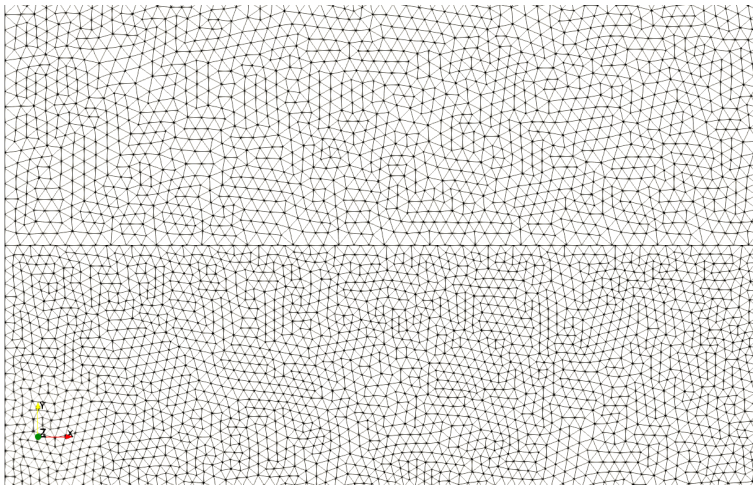

Рис. 10. Фрагмент сетки в окрестности контактной границы в задаче о двух одинаковых брусках

Максимальная длина ребра треугольников в сетке для нижнего тела составляет 0.05, для верхнего — 0.06, таким образом, конечноэлементные сетки не совпадают на границе контакта. Количество ячеек в обеих сетках составляет около 40 000.

Данная задача линейна, ее решение соответствует задаче о равномерном нагружении однородного бруска соответствующих размеров. В точном решении вертикальная компонента напряжений σ_{yy} равна распределенной силе p в каждой точке расчетной области. Для решения данной задачи использована прямолинейная контактная граница, соответствующая недеформированной линии стыковки сеток (см. рис. 10), и $N_\lambda = 2$ множителя Лагранжа.

В силу линейности задачи численное решение совпадает с точным с точностью до ошибок округления.

6.2. Взаимодействие брусков с наклонной границей контакта

Изменим условие задачи так, что ее решение перестает быть линейным и, следовательно, не может быть получено точно. Как и ранее, первый брусок системы, изображенной на рис. 11, лежит на гладкой поверхности, второй лежит на первом. Сверху к второму бруску приложена распределенная сила p. Левая и правая границы обоих брусков закреплены по горизонтали и могут свободно перемещаться по вертикали ($u_x = 0$), а также закреплена нижняя граница нижнего бруска по вертикали ($u_y = 0$).

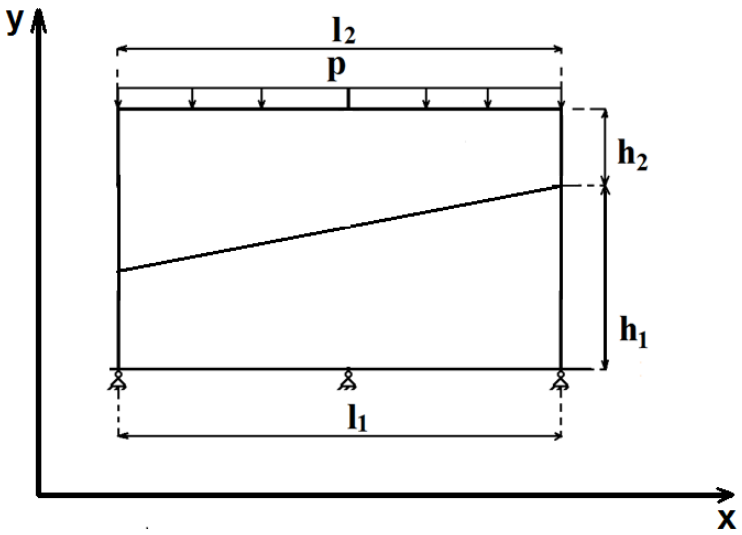

Рис. 11. Система брусков с наклонной границей контакта

Граница контакта является наклонной относительно направления действия распределенной силы, тангенс угла наклона границы контакта к оси Ox составляет $\operatorname{tg}\alpha = 1/6$. Используем следующие безразмерные значения параметров задачи (бруски сделаны из одного материала):

$$l_1 = l_2 = 6,\ h_1 = 4,\ h_2 = 2,$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.3,\ E_1 = E_2 = 0.21,$$

величина распределенной силы $p = 0.01$.

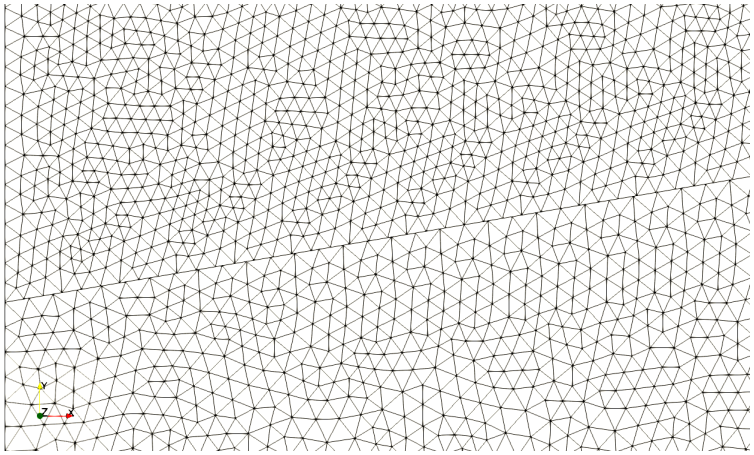

Рис. 12. Фрагмент сетки в окрестности контактной границы для задачи с наклонной границей

Максимальная длина ребра треугольников в сетке для нижнего тела составляет 0.1, для верхнего — 0.08, суммарное количество ячеек в сетках составляет 16 336, фрагмент сетки изображен на рис. 12.

На рис. 13 изображены компоненты u_x и u_y вектора перемещений и компоненты σ_{xx} и σ_{yy} тензора напряжений.

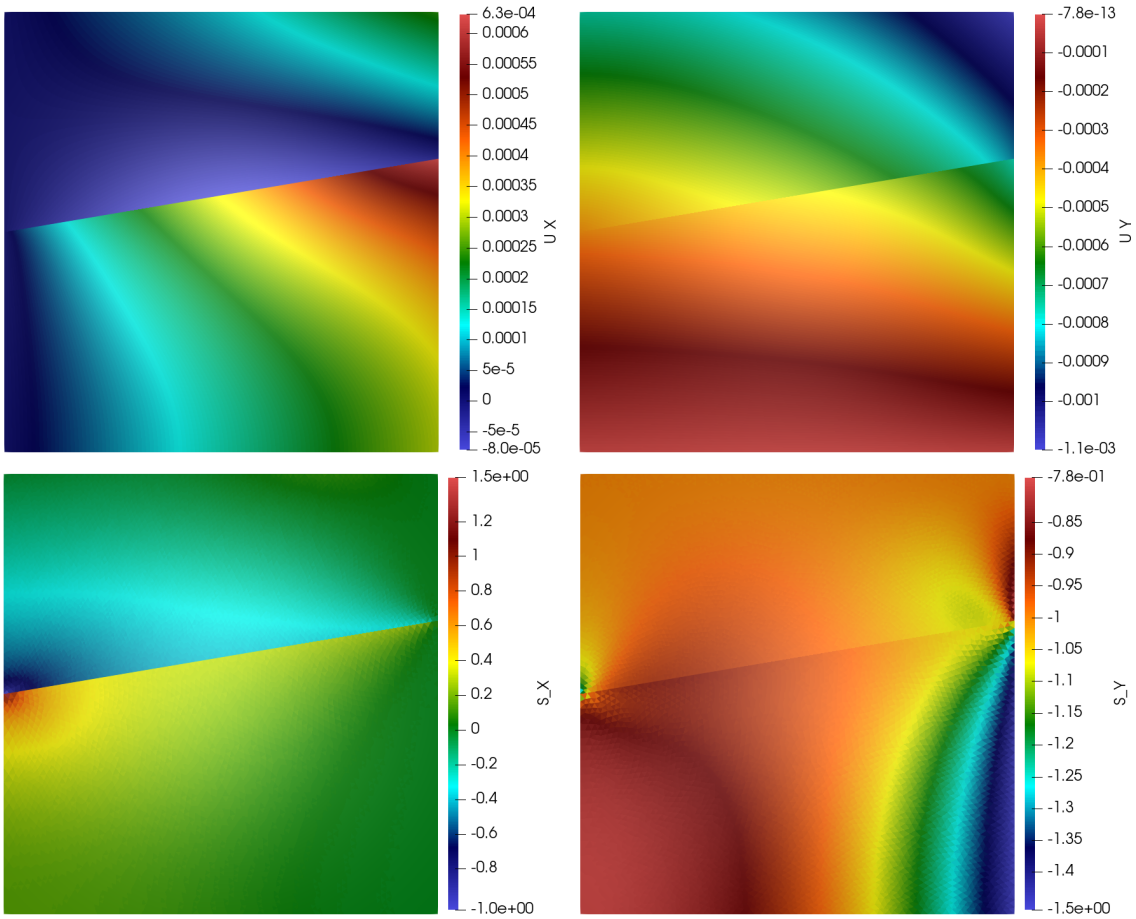

Рис. 13. Слева направо сверху вниз компоненты u_x и u_y вектора перемещений и компоненты σ_{xx} и σ_{yy} тензора напряжений в задаче с наклонной границей

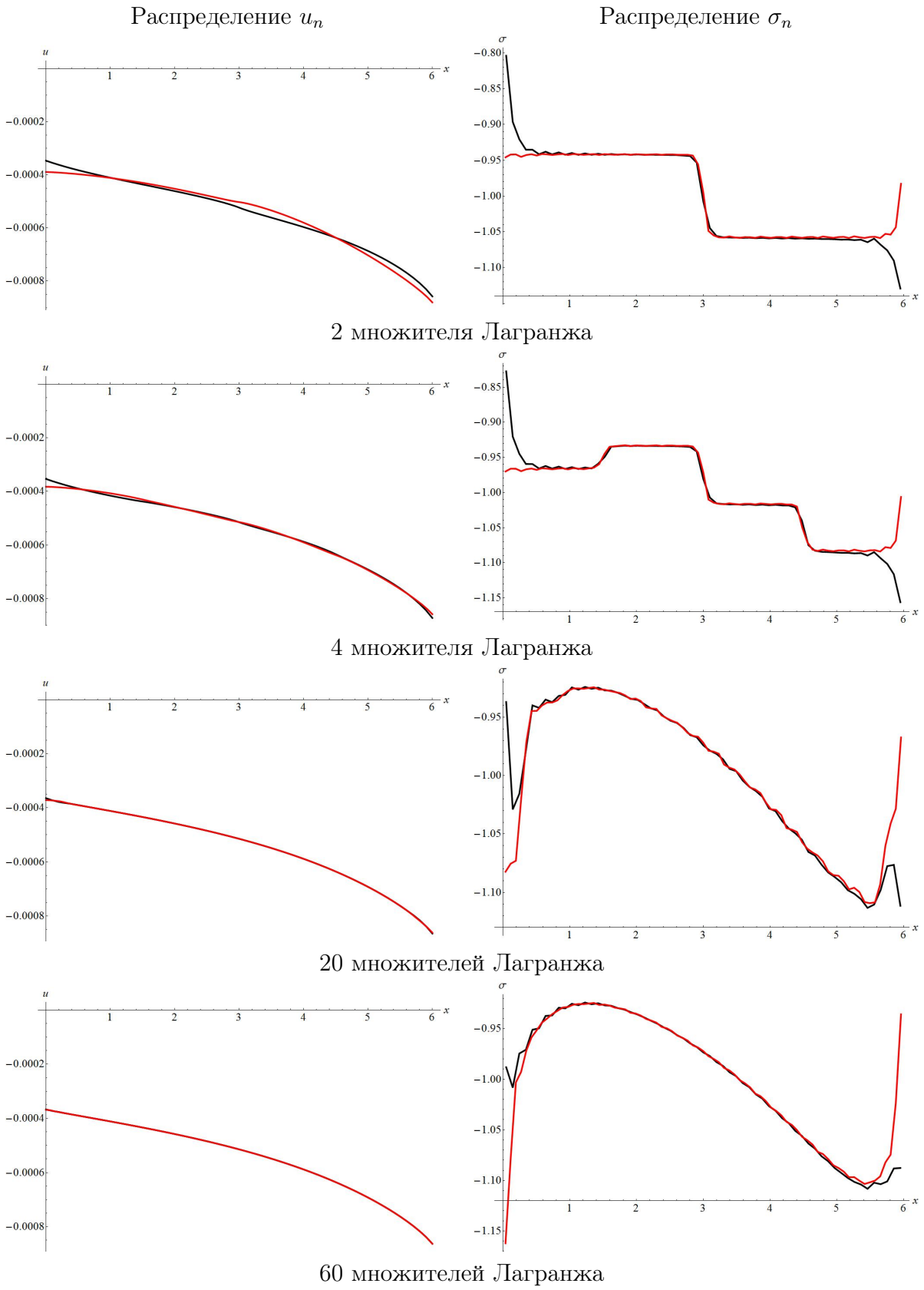

Рис. 14. Распределения нормальных к границе контакта компоненты вектора перемещений u_n и напряжения σ_n

Заметим, что σ_{yy} теперь не передает полностью приложенную вертикальную распределенную силу p. И поскольку соответствующий орт не нормален поверхности контакта, компонента σ_{yy} на границе контакта при переходе из одного тела в другое терпит разрыв. Рассмотрим нормальные к поверхности контакта компоненты вектора перемещений u_n и тензора напряжений σ_n. На рис. 14 приведены соответствующие результаты расчетов с 2, 4, 20 и 60 множителями Лагранжа соответственно при неизменной пространственной сетке в контактирующих телах. Красный график соответствует верхнему телу, черный — нижнему.

Приведенные иллюстрации демонстрируют сходимость метода, достигаемую без измельчения сетки в контактирующих телах и, соответственно, без существенного увеличения вычислительных затрат. Решение при 20 и 60 множителях Лагранжа оказываются удовлетворительными в том числе и для напряжений, значимые расхождения возникают лишь в окрестностях концентраторов напряжений.

6.3. Взаимодействие брусков с криволинейной границей контакта

Рассмотрим задачу с криволинейной границей контакта. Дана система из двух брусков с выпуклым и вогнутым краями, изображенная на рис. 15. Первый брусок лежит на гладкой поверхности, второй лежит на первом. Сверху ко второму бруску приложена распределенная сила p. Левая и правая границы обоих брусков закреплены по горизонтали и могут свободно перемещаться по вертикали ($u_x = 0$), а также закреплена нижняя граница нижнего бруска по вертикали ($u_y = 0$).

Контактная граница между брусками параметрически задается уравнениями (парабола)

$$x(t) = t,$$
$$y(t) = 4 + t - 0.25t^2,$$
$$t \in [0, 4].$$

Используем следующие безразмерные значения параметров задачи (бруски сделаны из одного материала):

$$l_1 = l_2 = 4,\ h_1 = h_2 = 4,$$

$$\nu_1 = \nu_2 = 0.227,\ E_1 = E_2 = 70,$$

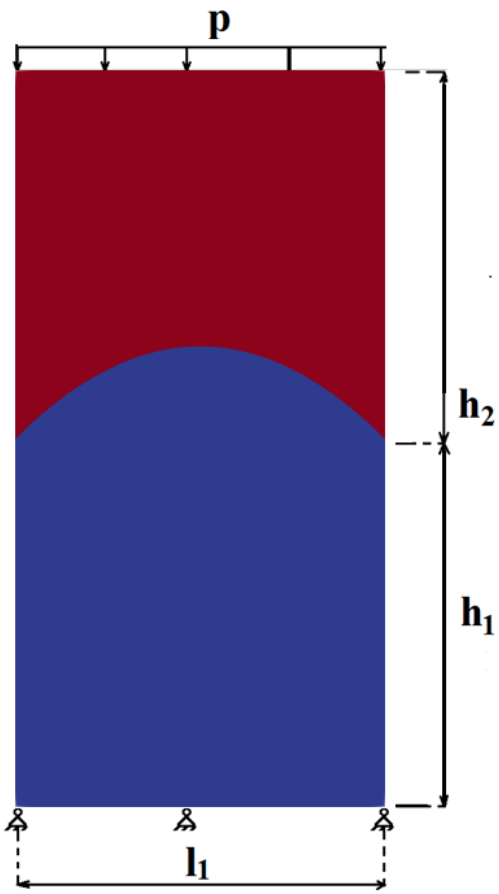

Рис. 15. Система брусков с нелинейной границей

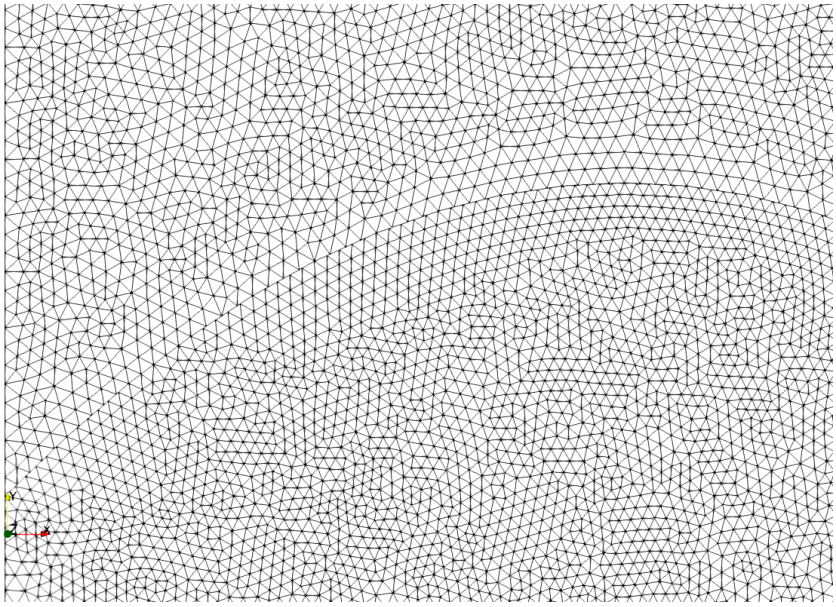

Рис. 16. Фрагмент сетки в задаче о контакте брусков с криволинейной границей

величина распределенной силы $p = 100$.

Максимальная длина ребра треугольников в сетке для нижнего тела составляет 0.05, для верхнего — 0.06, суммарное количество ячеек в сетках составляет 41 063, фрагмент сетки изображен на рис. 16.

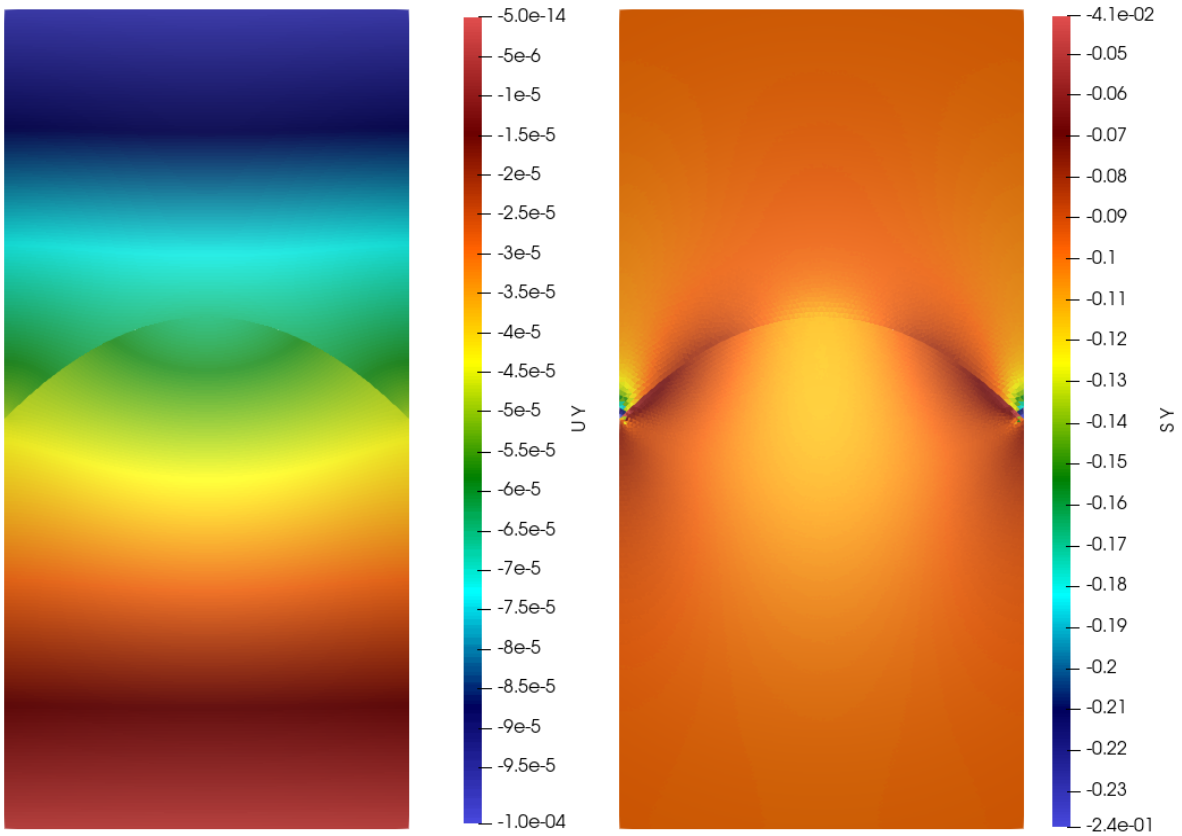

Рис. 17. Распределение компонент u_y вектора перемещений и σ_{yy} тензора напряжений в задаче с криволинейной границей

На рис. 17 изображены компоненты u_y вектора перемещений и σ_{yy} тензора напряжений. Видно, что в окрестности вершины параболы, которая является границей контакта, σ_{yy} близка по значению к нормальным напряжениям и терпит минимальный разрыв, а у самой вершины является с высокой степенью точности непрерывной.

На рис. 18 приведены результаты расчетов с 10, 20 и 60 множителями Лагранжа соответственно при неизменной пространственной сетке в контактирующих телах.

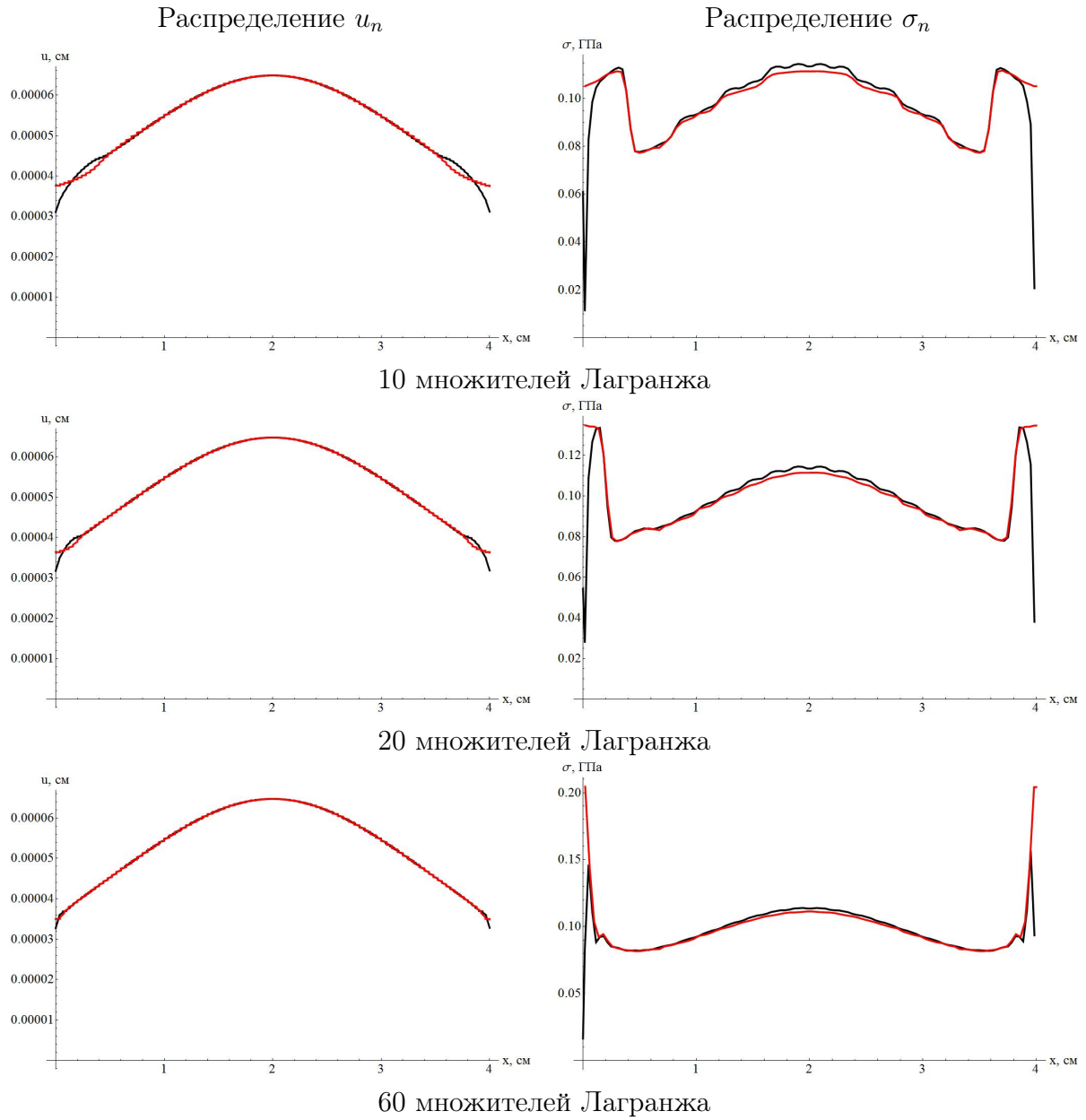

Рис. 18. Распределения нормальных к границе контакта компоненты вектора перемещений u_n и напряжения σ_n

Как и в предыдущих расчетах, метод демонстрирует сходимость результатов, а расхождения напряжений в углах объясняются наличием концетраторов напряжений. Также, сложной с точки зрения возникающих ошибок яв-

ляется окрестность вершины параболы, что объясняется максимальной кривизной контактной границы в этой точке, к чему, по-видимому, является чувствительным разработанный метод.

7. Заключение

Разработана модификация метода множителей Лагранжа с независимой контактной границей, позволяющая проводить незвисимую от сеток внутри контактирующих тел аппроскимацию функции множителей Лагранжа. Приведена методика построения контактной границы по облаку точек, принадлежащих сеткам в контактирующих телах и помеченных как вступившие в контакт. Введение независимой границы контакта позволяет как улучшить ее описание с геометрической точки зрения, так и выбирать наиболее удобный набор базисных функций, используемых для построения приближения к функции множителей Лагранжа. В данной работе рассмотрены разрывные кусочно-постоянные базисные функции, однако применяемая техника позволяет использовать и другие варианты. Проведенные тестовые расчеты показали возможность уточнения расчета нормальной компоненты напряжений на границе контакта без изменения сетки в контактирующих телах путем измельчения дискретизации контактной границы.

Список литературы

[1] Коробейников С.Н. Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: СО РАН, 2000. 262 с.

[2] Штаерман И Я. Контактная задача теории упругости. М.-Л.: Гостехиздат. 1949. 270 с.

[3] Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. М.: Мир, 1989. 510 с.

[4] Бабешко В.А. Статические и динамические контактные задачи со сцеплением // ПММ. 1975. Т. 39, вып. 3. С. 505–512.

[5] Терещенко А.Н., Лукин В.В., Головкин К.Д., Плеханов А.В., Родин А.С. Оценка прочности и жесткости электромагнитного ускорителя с силовым корпусом из полимерного волокнистого композиционного материала // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 51. 24 с.

[6] Бураго Н.Г., Кукуджанов В.Н. Обзор контактных алгоритмов // Известия РАН, МТТ. 2005. № 1. С. 45–87.

[7] Papadopoulos P., Solberg J.M. A Lagrange Multiplier Method for the Finite Element Solution of Frictionless Contact Problems // Math. Comp. Modelling. 1998. Vol. 28. Pp. 373–84.

[8] Wriggers P. Computational Contact Mechanics. Berlin: Springer, 2006. 521 p.

[9] Цвик Л.Б. Принцип поочередности в задачах о сопряжении и контакте твердых деформируемых тел // Прикладная механика. 1980. Т. 16, № 1. С. 13–18.

[10] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов В.И., Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Математическое моделирование термоупругогопластического контактного взаимодействия системы тел // Mathematica Montisnigri. 2014. Т. 30. С. 99–114.

[11] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Применение метода Шварца для моделирования контактного взаимодействия системы тел // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2015. Т. 55. № 8. С. 1429—1443.

[12] Галанин М.П., Крупкин А.В., Кузнецов Л.И., Лукин В.В., Новиков В.В., Родин А.С., Станкевич И.В. Моделирование контактного взаимодействия системы термоупругих тел методом Шварца для многомерного случая // Известия высших учебных заведений. Машиностроение. 2016. № 12 (681). С. 9–20.

[13] Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Реализация условия механического контакта упругих тел в рамках МКЭ при различном выборе базисных функций: одномерный случай // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 90. 25 с.

[14] Галанин М.П., Глизнуцина П.В., Лукин В.В., Родин А.С. Варианты реализации метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2015. № 89. 27 с.

[15] Галанин М.П., Лукин В.В., Родин А.С., Глизнуцина П.В. Сравнение вариантов метода множителей Лагранжа для решения двумерных контактных задач // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана, серия „Естественные науки“. 2017. № 5(74). С. 35–48.

[16] Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975. 543 с.

[17] Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высш. школа, 1979. 432 с.

[18] Сагдеева Ю.А., Копысов С.П., Новиков А.К. Введение в метод конечных элементов. Ижевск: Изд-во „Удмуртский университет“, 2011. 44 с.

[19] Шикин Е.В., Плис Л.И. Кривые и поверхности на экране компьютера. Руководство по сплайнам для пользователей. М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1996 г. 240 с.

[20] Демиденко Е.З. Линейная и нелинейная регрессии М.: Финансы и статистика, 1981. 304 с.

[21] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2010. 591 с.

[22] Robert L. Taylor. Finite element solution of contact problems from: 1974 to 2004 [Электронный ресурс]: Режим доступа: http://faculty.ce.berkeley.edu/rlt/presentations/hughes.pdf (дата обращения: 24.09.2020).

[23] Contact Modeling for Solids and Particles / ed. Popp A., Wriggers P. New York: Springer International Publishing, 2018. 228 p.

Содержание

1. Введение **3**

2. Постановка контактной задачи **4**

3. Математическая модель **4**

4. Методика численного решения **6**

5. Алгоритм расчета с независимой границей контакта **7**
5.1. Методы построения контактной кривой 9
5.2. Модификации методов построения контактной кривой 12
5.3. Выбор базисных функций для аппроксимации функции множителей Лагранжа 14

6. Результаты тестовых расчетов **15**
6.1. Взаимодействие одинаковых брусков 16
6.2. Взаимодействие брусков с наклонной границей контакта 17
6.3. Взаимодействие брусков с криволинейной границей контакта . . 20

7. Заключение **23**

Список литературы **23**