ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 53 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Д.М. Буланов, В.В. Сазонов

Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон-12

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника Фотон-12 // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 53. 50 с. https://doi.org/10.20948/prepr-2020-53
https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-53

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
им. М.В.Келдыша

Д.М. Буланов, В.В. Сазонов

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА *ФОТОН-12*

Москва – 2020

Буланов Д.М., Сазонов В.В.

Исследование эволюции вращательного движения спутника Ф*отон-12*

Описаны результаты повторной обработки магнитных измерений, выполненных на спутнике *Фотон-12* (находился на орбите 09.09 – 24.09.1999). Обработка проводилась с целью реконструкции неуправляемого вращательного движения этого спутника. При повторной обработке использовалась более простая математическая модель вращательного движения, чем при обработке, выполненной сразу после полета. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника в случае, когда это движение близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. Результаты обработки измерений на 25 непродолжительных (3.5 часа) интервалах времени напрямую сопоставлены с усредненными уравнениями, возникающими в теории В.В. Белецкого. Это позволило интерпретировать эволюцию вращательного движения *Фотона-12* и объяснить возникновение режима движения, установившегося к концу полета.

Ключевые слова: искусственный спутник Земли, вращательное движение, реконструкция движения по данным измерений, эволюция движения

Bulanov D.M., Sazonov V.V.

Investigation of evolution of spacecraft *Foton-12* attitude motion

This preprint presents the results of the repeated reconstruction of the uncontrolled attitude motion of the spacecraft *Foton-12* (was in orbit 09.09 – 24.09.1999) by measurements of onboard magnetometers. This problem was already solved successfully a few years ago. The repeated reconstruction was made by using the more simple mathematical model of spacecraft attitude motion than the model used in processing just after the flight. Simplifications were made in order the new model corresponded to the models in Beletsky's theory of spacecraft attitude motion closed to Euler's regular precession of an axially symmetric rigid body. The results of processing measurements on 15 short (3.5 hours) time intervals are directly compared with the averaged equations arising in Beletsky's theory. This allowed us to interpret the evolution of the rotational motion of *Foton-12* and to explain the occurrence of the motion regime established at the end of the flight.

Key words: spacecraft, attitude motion, reconstruction of motion by measurement data, evolution of attitude motion

1. Введение. Вскоре после полета *Фотона-12* его вращательное движение было реконструировано по данным бортовых измерений напряженности магнитного поля Земли (МПЗ) [1, 2]. Из этих данных, охватывающих весь полет, выбирались отрезки длиной несколько часов. На каждом таком отрезке данные обрабатывались совместно методом наименьших квадратов с помощью интегрирования уравнений движения спутника относительно центра масс. При обработке оценивались начальные условия движения и параметры используемой математической модели. Полученные результаты дали полное представление о движении спутника. Это движение, начавшееся с малой угловой скоростью, постепенно ускорялось и через двое суток стало близко к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела. Последние 4 сут. неуправляемого полета угловая скорость спутника относительно его продольной оси составляла примерно 1.0 град./с, проекция угловой скорости на плоскость, перпендикулярную этой оси, имела модуль 0.14 – 0.15 град./с.

Ниже описаны результаты повторной обработки отрезков магнитных измерений, использованных в [1, 2]. Обработка проведена с помощью более простой, чем в [1, 2], математической модели вращательного движения спутника. Упрощения сделаны таким образом, чтобы новая модель соответствовала моделям, использованным В.В. Белецким в его теоретическом анализе эволюции неуправляемого вращательного движения спутника, близкого к регулярной прецессии Эйлера осесимметричного твердого тела [3]. Результаты обработки измерений сопоставлены с результатами теории В.В. Белецкого. Это позволило интерпретировать эволюцию вращательного движения *Фотона-12* и объяснить возникновение режима движения, установившегося к концу полета.

2. Математическая модель вращательного движения спутника. Спутник считаем осесимметричным твердым телом. Для записи уравнений движения спутника и соотношений, используемых при обработке данных измерений, введем пять правых декартовых системы координат.

Система $Ox_1x_2x_3$ образована главными центральными осями инерции спутника. Точка O – центр масс спутника, ось Ox_1 – ось материальной симметрии спутника. Эта ось близка к продольной оси спутника и направлена от спускаемого аппарата к приборному отсеку. Моменты инерции спутника относительно оси Ox_1 обозначим I_1, равные моменты инерции относительно осей Ox_2 и Ox_3 обозначим I_2.

Вспомогательная система координат $Oy_1y_2y_3$ служит для записи уравнений вращательного движения спутника. Ось Oy_1 совпадает с осью Ox_1; оси Ox_2 и Ox_3 получаются из осей Oy_2, Oy_3 поворотом системы $Oy_1y_2y_3$ на угол φ вокруг оси Oy_1. Кинематическая связь между системами $Ox_1x_2x_3$ и $Oy_1y_2y_3$ задается условием, что проекция абсолютной угловой скорости второй из них на ось Oy_1 равна нулю. Проекции этой угловой скорости на оси Oy_2, Oy_3 обозначим w_2, w_3. Пусть абсолютная угловая скорость спутника $\boldsymbol{\omega}$ имеет в системе $Ox_1x_2x_3$ компоненты $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$. Тогда $\dot{\varphi} = \omega_1$ и

$$\omega_2 = w_2 \cos\varphi + w_3 \sin\varphi, \quad \omega_3 = -w_2 \sin\varphi + w_3 \cos\varphi. \tag{1}$$

Здесь и ниже точкой обозначается дифференцирование по времени t.

В приборной системе координат $Oz_1z_2z_3$ интерпретируются данные измерений бортовых магнитометров. Эту систему можно перевести в систему $Ox_1x_2x_3$ двумя последовательными поворотами. Первый поворот выполняется на угол α_c вокруг оси Oz_2, второй поворот – на угол β_c – выполняется вокруг оси Oz_3, получившийся после первого поворота. В общем случае, чтобы задать положение одной системы координат относительно другой, необходимы три угла. В данном случае можно было бы ввести еще угол поворота приборной системы вокруг ее оси Oz_1, получившееся после первых двух поворотов. Однако поскольку направление одной из осей Ox_2, Ox_3 можно выбирать произвольно, третий угол удобно принять равным нулю, фиксировав тем самым положение системы $Ox_1x_2x_3$ относительно системы $Oz_1z_2z_3$. Матрицу перехода между этими системами координат обозначим $\| b_{ij} \|_{i,j}^3$, где b_{ij} – косинус угла между осями Oz_i и Ox_j. Элементы этой матрицы выражаются через углы α_c и β_c по формулам

$$\begin{aligned}
&b_{11} = \cos\alpha_c \cos\beta_c, && b_{12} = -\cos\alpha_c \sin\beta_c, && b_{13} = \sin\alpha_c,\\
&b_{21} = \sin\beta_c, && b_{22} = \cos\beta_c, && b_{23} = 0,\\
&b_{31} = -\sin\alpha \cos\beta_c, && b_{32} = \sin\alpha_c \sin\beta_c, && b_{33} = \cos\alpha_c.
\end{aligned}$$

Гринвичская система координат $CY_1Y_2Y_3$ используются для записи уравнений движения спутника. Начало этой системы находится в центре масс Земли, плоскость CY_1Y_2 совпадает с плоскостью экватора, положительная полуось CY_1 пересекает гринвичский меридиан, ось CY_3 направлена в Северный полюс.

Квазиинерциальная система координат $CZ_1Z_2Z_3$ служит для графического представления вращательного движения спутника. В каждый момент времени ось CZ_2 параллельна вектору кинетического момента орбитального движения спутника, ось CZ_3 лежит в плоскости CY_1Y_2 и направлена в восходящий узел оскулирующей орбиты спутника. Абсолютная величина угловой скорости этой системы не превышает 5 град./сут.

Матрицу перехода от системы $Oy_1y_2y_3$ к гринвичской системе обозначим $\| a_{ij} \|_{i,j}^3$, a_{ij} – косинус угла между осями CY_i и Oy_j. Элементы этой матрицы будем выражать в функции углов γ, δ и β, которые введем так, чтобы систему $CY_1Y_2Y_3$ можно было перевести в систему $Oy_1y_2y_3$ тремя последовательными поворотами (полагаем, что точки C и O совпадают): 1) на угол $\delta + \pi/2$ вокруг оси CY_2, 2) на угол β вокруг новой оси CY_3, 3) на угол γ вокруг новой оси CY_1, совпадающей с осью Oy_1.

Направление оси Oy_1 в системе $CZ_1Z_2Z_3$ будем задавать углами θ и ψ: θ – угол между этой осью и плоскостью CZ_1Z_2, ψ – угол между проекцией оси Oy_1 на плоскость CZ_1Z_2 и осью CZ_1. Направления отсчета углов θ и ψ согласованы с направлениями осей Oy_2 и CZ_3 соответственно. Орт оси Oy_1 имеет в системе $CZ_1Z_2Z_3$ компоненты $(\cos\theta\cos\psi, \cos\theta\sin\psi, -\sin\theta)$. Будем использовать также угол $\Lambda = \arccos(\cos\theta\sin\psi)$ между осями Oy_1 и CZ_2.

Уравнения движения спутника состоят из двух подсистем. Одна подсистема описывает движение центра масс спутника, другая – его движение относительно центра масс. Подсистема уравнений движения центра масс записана в гринвичской системе координат с учетом нецентральности гравитационного поля Земли и сопротивления атмосферы. Нецентральность поля учитывается с точностью до членов порядка (16,16) включительно в разложении гравитационного потенциала Земли в ряд по шаровым функциям. Атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, ее плотность рассчитывается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Решения этой подсистемы находились из условия наилучшей аппроксимации двухстрочных элементов орбиты *Фотона-12* на отрезках времени длиной 2 – 3сут [1].

Вторая подсистема образована динамическими уравнениями Эйлера для угловых скоростей w_2, w_3 и кинематическими уравнениями Пуассона для первой и второй строк матрицы $\| a_{ij} \|$. В уравнениях Эйлера учитываются гравитационный и восстанавливающий аэродинамический моменты, а также постоянный момент вдоль оси Ox_1. При вычислении аэродинамического момента атмосфера считается вращающейся вместе с Землей, внешняя оболочка спутника принимается сферой с центром на оси Ox_1. Вторая подсистема имеет вид [4, 5]

$$
\begin{gathered}
\dot{w}_2 + \lambda\omega_1 w_3 = -3\frac{\mu_e}{r^5}(1-\lambda)y_1y_3 + pE\rho_a \mathrm{v}\mathrm{v}_3, \\
\dot{w}_3 - \lambda\omega_1 w_2 = 3\frac{\mu_e}{r^5}(1-\lambda)y_1y_2 - pE\rho_a \mathrm{v}\mathrm{v}_2, \\
\dot{a}_{11} + w_2 a_{13} - w_3 a_{12} = \omega_e a_{21}, \\
\dot{a}_{12} + w_3 a_{11} = \omega_e a_{22}, \quad \dot{a}_{13} - w_2 a_{11} = \omega_e a_{23}, \\
\dot{a}_{21} + w_2 a_{23} - w_3 a_{22} = -\omega_e a_{11}, \\
\dot{a}_{22} + w_3 a_{21} = -\omega_e a_{12}, \quad \dot{a}_{23} - w_2 a_{21} = -\omega_e a_{13}, \\
\omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \lambda = \frac{I_1}{I_2}, \quad r = \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2}, \quad \mathrm{v} = \sqrt{\mathrm{v}_1^2 + \mathrm{v}_2^2 + \mathrm{v}_3^2}.
\end{gathered}
\tag{2}
$$

Здесь y_i и v_i – компоненты в системе $Oy_1y_2y_3$ геоцентрического радиуса-вектора точки O и скорости этой точки относительно системы $CY_1Y_2Y_3$; p – аэродинамический параметр; ρ_a – плотность атмосферы в точке O; ω_e и μ_e – угловая скорость вращения и гравитационный параметр Земли; Ω и ε – посто-

янные величины; E – масштабирующий множитель. В (2) использован явный вид решения одного из уравнений Эйлера $\dot{\omega}_1 = \varepsilon$ с начальным условием $\omega_1(t_0) = \Omega$. Выбор t_0 будет указан ниже.

При численном интегрировании уравнений (2) единицами измерения времени и длины служат 1000 с и 1000 км, единицы измерения других величин: $[\mathrm{v}_i] = $км/с, $[\omega_i] = [w_i] = 10^{-3}\,\mathrm{c}^{-1}$, $[\varepsilon] = 10^{-6}\,\mathrm{c}^{-2}$, $[p] = $см /кг, $[\rho_a] = $кг/м^3, $E = 10^{10}$. Плотность атмосферы задается согласно модели ГОСТ Р 25645.166-2004. Элементы третьей строки матрицы $\| a_{ij} \|$ вычисляются как векторное произведение первых двух ее строк.

Формулы (1) и соотношение $\varphi = \Omega(t - t_0) + \varepsilon(t - t_0)^2 / 2$ позволяют найти функции $\omega_2(t)$, $\omega_3(t)$ и движение системы $Ox_1x_2x_3$, решая уравнения (2).

Переменные a_{1i} и a_{2i} зависимы, они связаны условиями ортогональности матрицы $\| a_{ij} \|$. По этой причине начальные условия $a_{1i}(t_0)$ и $a_{2i}(t_0)$ выражаются через углы γ, δ и β.

Проектные значения параметров α_c, β_c и λ: $\alpha_c = \beta_c = 0$, $\lambda = 0.24$ оказались достаточно точными. Тем не менее, эти параметры и параметры p, ε определяются из обработки данных измерений наряду с неизвестными начальными условиями движения спутника, т. е. служат параметрами согласования.

Уравнения (2) и некоторые другие принятые ниже математические модели проще, чем уравнения движения и модели [1, 2]. Это сделано для уменьшения числа уточняемых параметров, и чтобы избежать использования априорной информации и методов регуляризации в статистических процедурах. Для компенсации сделанных упрощений ограничимся реконструкцией сравнительно простых движений спутника, в которых компонента угловой скорости ω_1 достаточно велика.

3. Реконструкция вращательного движения спутника по магнитным измерениям. На борту *Фотона-12* находилась аппаратура "Мираж" с несколькими трехкомпонентными магнитометрами. Поскольку движение спутника было неуправляемым, полученные данные и уравнения (2) можно использовать для определения фактического вращательного движения спутника по обычным статистическим методикам.

Методика, использованная ниже, состоит в следующем [1, 2, 6]. По измерениям, выполненным на некотором отрезке времени $t_0 \le t \le t_0 + T$, строились функции $\hat{h}_i(t)$, которые задавали на этом отрезке компоненты вектора местной напряженности магнитного поля в приборной системе координат. Среднеквадратичные ошибки аппроксимации компоненты $\hat{h}_i(t)$ не превышали 800γ ($1\gamma = 10^{-5}$ Э). Затем вычислялись псевдоизмерения $h_i^{(n)} = \hat{h}_i(t_n)$, $t_n = t_0 + nT / N$, где $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Как правило, $T = 210$ мин (12600с), $T / N \approx 1$ мин. Представление о точности псевдоизмерений дает рис. 1. В верхней части рисунка сравниваются модули вектора напряженности МПЗ, рассчитанные по псевдоизме-

рениям (с поправкой за постоянные смещения) и по модели IGRF. Расчет по псевдоизмерениям представлен маркерами, расчет по модели IGRF – сплошными линиями. Графики в нижней части рисунка характеризуют отклонения псевдоизмерений от модели. Графики представляют собой ломаные, вершины которых отмечены маркерами. Ординаты вершин – разности расчетов двумя способами, абсциссы – моменты времени t_n. Для наглядности соседние по времени вершины соединены отрезками прямых. Сравнение дано на двух выбранных для реконструкции движения временных интервалах. В подписи к рисунку приведены среднеквадратичные ошибки отклонений (СКО).

Псевдоизмерения служили исходной информацией для отыскания решений уравнений (2), описывающих фактическое движение спутника.

В соответствии с методом наименьших квадратов реконструкцией фактического движения спутника считалось решение уравнений (2), доставляющее минимум функционалу

$$\Phi = \sum_{i=1}^{3} \left\{ \sum_{n=0}^{N} [h_i^{(n)} - h_i(t_n)]^2 - (N+1)\Delta_i^2 \right\}, \tag{3}$$

$$\Delta_i = \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} [\, h_i^{(n)} - h_i(t_n)\,], \qquad h_i(t) = \sum_{j=1}^{3} b_{ij} h_j^{\circ}(t).$$

Здесь Δ_i – оценки постоянных смещений в псевдоизмерениях, $h_j^{\circ}(t)$ – компоненты напряженности МПЗ в точке O в системе координат $Ox_1x_2x_3$, рассчитываемые с помощью модели IGRF2005. В качестве t_0 в уравнениях (2) всегда использовалась начальная точка обрабатываемого отрезка данных. Некоторые псевдоизмерения наследовали грубые локальные ошибки данных измерений, что становилось ясным в процессе минимизации функционала (3). Такие псевдоизмерения из дальнейшей обработки исключались, что иногда приводило к уменьшению длины T обрабатываемого отрезка данных.

Функционал (3) минимизировался по 11 величинам: начальным условиям решения системы (2) $\gamma(t_0)$, $\delta(t_0)$, $\beta(t_0)$, $w_2(t_0)$, $w_3(t_0)$ и ее параметрам Ω, λ, p, ε, α_c, β_c. Минимизация выполнялась в несколько этапов, на заключительном этапе применялся методом Гаусса – Ньютона. Точность аппроксимации псевдоизмерений и разброс в оцениваемых величинах характеризовались соответствующими стандартными отклонениями. Стандартные отклонения рассчитывались в предположении, что ошибки в псевдоизмерениях $h_i^{(n)}$ некоррелированы и имеют одинаковые дисперсии, средние значения ошибок в псевдоизмерениях с одинаковым нижним индексом i одинаковы (величины Δ_i в (3) – оценки этих средних значений). Перечисленные условия в данном случае вряд ли выполнены, однако они позволяют получить полезные характеристики точности реконструкции движения спутника.

Стандартные отклонения вычислялись так. Пусть $\Phi_{\min}$ – значение функционала (3) в точке минимума, C – матрица системы нормальных уравнений метода Гаусса – Ньютона в этой точке (матрица $2C$ приблизительно равна матрице квадратичной формы $d^2\Phi$ в точке минимума Φ). Тогда дисперсия ошибок в псевдоизмерениях оценивается величиной

$$\sigma_H^2 = \frac{\Phi_{\min}}{3N-11}.$$

Стандартные отклонения оцениваемых величин равны квадратным корням из соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma_H^2 C^{-1}$. Эти стандартные обозначим σ_γ, σ_δ, σ_β, σ_{w2}, σ_{w3}, σ_Ω, σ_λ, σ_p, σ_ε, $\sigma_{\alpha c}$, $\sigma_{\beta c}$; индексы указывают соответствие с оцениваемыми величинами.

Движение спутника *Фотон-12* реконструировано на 25 временных интервалах. Некоторые результаты реконструкции приведены на рис. 2 – 23 и в табл. 1 – 3. В подписях к рисункам и в таблице использовано Всемирное координированное время (UTC). В табл. 1 приведены начальные точки интервалов t_0 и их фактическая длина T. Номинальная длина $T = 210$ мин выбрана таким образом, чтобы получаемые значения σ_H не более чем в 1.5 – 2 раза превышали типичные среднеквадратические значения рассогласований модулей расчетной и измеренной напряженности МПЗ (см. рис. 1). Иными словами, чтобы принятая модель движения была достаточно адекватна. Поскольку принятая модель является упрощенной, с ее помощью реконструировались достаточно быстрые движения спутника, которые образовались через 1.5сут после начала неуправляемого движения. На рисунках 2 – 12 представлены реконструкции, на которых движение уже явно похоже на регулярную прецессию Эйлера, – начиная с 14.09.1999.

Рис. 2 – 12 иллюстрируют решения уравнений (2) на отрезках времени, содержащих псевдоизмерения (на рис. 7, 9 приведено также продолжение найденных решений за отрезок обработки, см. ниже). Они показывают качество аппроксимации псевдоизмерений и некоторые детали движения спутника относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. За начало отсчета времени на рисунках выбраны соответствующие точки t_0. Каждый из рис. 2 – 12 естественным образом разбивается на три части – левую, среднюю и правую. В правой части сплошные кривые суть графики функций $h_i(t)$ на отрезке $t_0 \le t \le t_0 + T$, маркеры указывают точки $(t_n, h_i^{(n)} - \Delta_i)$, $n = 0, 1, 2, \ldots N$. Количественно аппроксимация псевдоизмерений характеризуется стандартным отклонением σ_H, значения которого приведены в табл. 1 и в подписях к рисункам. Значения σ_H в табл. 1 несколько выше, чем в [1, 2]. Тем не менее, достигнутая точность достаточна для целей данной работы.

В средней части рисунков помещены графики компонент угловой скорости ω_1, w_2 и w_3. По мере увеличения компоненты ω_1 движение спутника ста-

новилось все больше похоже на регулярную прецессию Эйлера осесимметричного твердого тела. Формирование регулярной прецессии с медленно возрастающей угловой скоростью ω_1 и мало меняющимся значением $\omega_\perp = \sqrt{w_2^2 + w_3^2}$ завершилось после двух суток полета.

Точная регулярная прецессия Эйлера может иметь место лишь в случае, когда спутник осесимметричен и главный момент приложенных к нему внешних сил равен нулю. Тогда величины ω_1 и $\omega_\perp$ остаются неизменными во время движения. Для используемой модели первое условие выполнено, а второе – нет. По этой причине можно говорить лишь о движениях, близких к регулярной прецессии. Такие движения удобно характеризовать величинами

$$\overline{\omega}_\perp = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} \omega_\perp dt, \quad \delta\omega_\perp = \left[\frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} (\omega_\perp - \overline{\omega}_\perp)^2 dt\right]^{1/2}$$

и определяемыми аналогичными формулами величинами $\overline{\omega}_1$, $\delta\omega_1$. Для последних имеют место формулы

$$\overline{\omega}_1 = \Omega + \frac{\varepsilon T}{2}, \quad \delta\omega_1 = \frac{|\varepsilon| T}{2\sqrt{3}}.$$

Среднеквадратичные отклонения $\delta\omega_1$ и $\delta\omega_\perp$ характеризуют близость движения спутника к регулярной прецессии с параметрами $\overline{\omega}_1$ и $\overline{\omega}_\perp$. Значения величин $\overline{\omega}_1$, $\delta\omega_1$, $\overline{\omega}_\perp$ и $\delta\omega_\perp$ указаны в табл. 1.

Вернемся к рисункам. В левой части рис. 2 – 12 находятся графики зависимости от времени углов Λ, ψ и θ, задающих положение оси Ox_1 относительно координат $CZ_1Z_2Z_3$. Движение спутника по углам установилось только к интервалу 7.

Дополнительные сведения о точности построенных реконструкций можно получить из табл. 2, 3. В этих таблицах размерные величины выражены в единицах, использованных при интегрировании уравнений (2). В табл. 2 приведены стандартные отклонения оценок параметров, задающих начальные условия найденных решений системы (2), в табл. 3 приведены оценки параметров p, λ, ε, α_c, β_c и их стандартные отклонения. Как показывает сопоставление значений $\overline{\omega}_1$ и ε в табл. 1 и 3, с ростом $\overline{\omega}_1$ значения ε имеют тенденцию к уменьшению. По-видимому, возрастает не учитываемый в уравнениях (2) момент сопротивления $\sim \omega_1$. Оценки p в табл. 3 меняются хаотически, хотя для почти всех интервалов $\sigma_p << |p|$. Такое изменение p не удивительно, поскольку принятая модель действующего на спутник аэродинамического момента весьма упрощенная. По сравнению с параметром p оценки параметров λ, α_c, β_c более стабильны. В них заметна зависимость от $\overline{\omega}_1$, но по мере возрастания этой величины они стабилизируются.

Каждый рис. 2 – 12 характеризует движение спутника лишь на сравнительно коротком интервале времени, но взятые вместе они позволяют получить

представление об эволюции движения на продолжительном отрезке неуправляемого полета. Кроме того, движения, найденные на отрезках $t_0 \le t \le t_0 + T$, можно продолжить вправо за их границы и получить представление на более продолжительных отрезках, хотя и с некоторой потерей точности. Примеры таких продолжений приведены на рис. 7, 9. Графическое представление продолженных решений можно сделать более информативным, если использовать другие переменные, которые более подходят для движений, близких к регулярной прецессии Эйлера. Эти переменные характеризуют движение вектора собственного (относительно центра масс) кинетического момента спутника $\mathbf{L}$. Во второй половине полета кинетический момент $\mathbf{L}$ был достаточно велик по модулю, а пределы его изменения сравнительно медленно менялись во времени. В такой ситуации некоторые детали движения спутника не очень интересны, а поведение $\mathbf{L}$ более информативно [3].

Изменение вектора $\mathbf{L}$ будем описывать четырьмя переменными: параметром l, пропорциональным его модулю, и тремя углами ϑ, ρ и α. Величины l и ϑ связаны с переменными уравнений (2) формулами

$$l = \frac{|\mathbf{L}|}{I_2} = \sqrt{\lambda^2 \omega_1^2 + w_2^2 + w_3^2}, \quad \cos\vartheta = \frac{\lambda \omega_1}{l},$$

ρ – угол вектора $\mathbf{L}$ с осью CZ_2, α – угол между осью CZ_3 и проекцией $\mathbf{L}$ на плоскость CZ_1Z_3. В системе $CZ_1Z_2Z_3$ орт $\mathbf{e}_L = \mathbf{L}/|\mathbf{L}|$ имеет компоненты $(\sin\rho\sin\alpha, \cos\rho, \sin\rho\cos\alpha)$;

Регулярная прецессия Эйлера осесимметричного твердого тела при $\mathbf{L} \ne 0$ обычно описывается углом нутации ϑ, углом прецессии ϕ_1 и углом собственного вращения ϕ_2. В регулярной прецессии $\vartheta = \text{const}$,

$$\dot{\phi}_1 = \frac{|\mathbf{L}|}{I_2}, \quad \dot{\phi}_2 = \left(\frac{1}{I_1} - \frac{1}{I_2}\right)|\mathbf{L}|\cos\vartheta.$$

Адаптируя эти формулы к движению *Фотона-12*, имеем

$$\operatorname{tg}\vartheta \approx \frac{\overline{\omega}_\perp}{\lambda\overline{\omega}_1}, \quad \dot{\phi}_1 \approx \sqrt{\lambda^2\overline{\omega}_1^2 + \overline{\omega}_\perp^2}, \quad \dot{\phi}_2 \approx (1-\lambda)\overline{\omega}_1.$$

В функциях w_2 и w_3 (см. рис. 2 – 12) доминирует частота $\lambda\overline{\omega}_1$, в соответствующих функциях (1) – частота $(1-\lambda)\overline{\omega}_1$.

Графики зависимости от времени величин l, ϑ, ρ и α, а также годографы проекций орта оси Ox_1 и орта $\mathbf{e}_L$ на плоскость CZ_1Z_3 для некоторых продолженных решений, приведены на рис. 13 – 23. В левой части рисунков приведены графики l, ϑ, ρ и α, в правой части приведены годографы. Годограф проекции орта оси Ox_1 изображен сплошной линией, годограф проекции орта $\mathbf{e}_L$ – последовательностью маркеров. Отрезки продолжения выбраны таким образом, чтобы годографы проекции орта $\mathbf{e}_L$ выглядели как замкнутые кривые.

Длина отрезков продолжения 350 – 400 мин. Рис. 13 – 23 дает достаточно полное представление об эволюции вектора $\mathbf{L}$.

4. Увеличение угловой скорости спутника. Согласно высказанной выше гипотезе раскрутка спутника происходила под действием механического момента, компоненты которого были неизменны в системе координат $Ox_1x_2x_3$. Раскрутка происходила вокруг оси Ox_1 и согласно принятой модели вызывалась компонентой $I_1\varepsilon$ указанного постоянного момента.

На спутник действовали и другие моменты, не учтенные в уравнениях (2) и аналогичных уравнениях работ [1, 2, 4, 5], в частности, диссипативный аэродинамический момент и диссипативный момент от вихревых токов, наведенных МПЗ в корпусе спутника. Оба эти момента линейно зависят от угловой скорости спутника и очень малы. Их невозможно отделить от постоянного момента на интервалах времени длиной 270÷300 мин, но именно эти диссипативные моменты препятствовали неограниченному возрастанию угловой скорости ω_1. Наличие этих моментов проявляется как уменьшение оценок величины ε с ростом $\overline{\omega}_1$ (см. табл. 1, 3). В действительности оценка ε представляет собой некоторое среднее значение деленной на I_1 суммы постоянного момента и ряда других малых внешних моментов, в том числе, диссипативных. Принимая во внимание характер движения спутника, влияние перечисленных выше малых моментов на эволюцию ω_1 во время неуправляемого полета можно приближенно описать уравнением

$$\dot{\omega}_1 + a\omega_1 = \varepsilon\,. \tag{4}$$

Здесь a и ε – постоянные параметры, причем $I_1\varepsilon$ и $-I_1a\omega_1$ – компоненты постоянного момента и диссипативного момента вдоль оси Ox_1. Общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\omega_1 = \omega_1^* + c\exp(-at)\,, \qquad \omega_1^* = \frac{\varepsilon}{a}\,, \tag{5}$$

где c – произвольная постоянная. Будем искать a, c и ω_1^* из условия наилучшей аппроксимации вычисленных величин $\overline{\omega}_1$ формулой (5). Эти величины относим к серединам интервалов, для которых они были вычислены. За начало отсчета времени примем момент 00:00:00 UTC 11.09.1999. Аппроксимация строилась методом наименьших квадратов. Ее результат представлен на рис. 24. В верхней части этого рисунка сплошной линией изображен график найденного выражения (5), маркерами указаны значения $\overline{\omega}_1$. В нижней части рисунка маркеры изображены ошибки аппроксимации.

Решение задачи наименьших квадратов дало следующие значения параметров формулы (5): $a = 0.215\,\text{сут}^{-1}$, $\omega_1^* = 1.124\,$град./с, $c = -0.850$ град./с. Среднеквадратичная ошибка аппроксимации величин $\overline{\omega}_1$ составила $\sigma_{\overline{\omega}_1} = 0.0128\,$град./с, стандартные отклонения уточняемых параметров равны

$\sigma_a = 0.0085\,\text{сут}^{-1}$, $\sigma_{\omega_1^*} = 0.011$ град./с, $\sigma_c = 0.010$ град./с. В этом случае $\varepsilon = a\omega_1^* = 0.0488 \cdot 10^{-6}\,\text{с}^{-2}$. Оценки ω_1^* и ε наиболее интересны из полученных оценок. В частности, ω_1^* является предельным значением компоненты угловой скорости ω_1 при $t \to +\infty$. Судя по значениям $\overline{\omega}_1$, приведенным в последних строках табл. 1, это значение несколько завышено. К 21 сентября процесс раскрутки спутника практически завершился.

5. Вращательное движение спутника с большой угловой скоростью. К середине полета угловая скорость спутника увеличилась настолько, что для исследования его вращательного движения стало возможным воспользоваться приближенной теорией, развитой в [3]. Согласно этой теории движение спутника представляет собой слабо возмущенную регулярную прецессию Эйлера. Невозмущенная прецессия Эйлера описывается уравнениями (2) при нулевых μ_e, p и ε:

$$\dot{\omega}_1 = 0, \quad \dot{w}_2 = -\lambda\omega_1 w_3, \quad \dot{w}_3 = \lambda\omega_1 w_2.$$

Эти уравнения имеют первые интегралы $\omega_1 = \text{const}$ и $\omega_\perp = \text{const}$. Для ω_1 примем выражение, принятое в системе (2). Оно хорошо согласуется с теорией [3]. Для $\omega_\perp$ в силу уравнений (2) имеем

$$\omega_\perp \dot{\omega}_\perp = \frac{3\mu_e}{r^5}(1-\lambda) y_1 (w_3 y_2 - w_2 y_3) - pE\rho_a \mathrm{v}(w_3 \mathrm{v}_2 - w_2 \mathrm{v}_3).$$

В невозмущенной регулярной прецессии положение спутника на орбите считается неизменным («замороженным»), т. е. r и $\rho_a \mathrm{v}$ постоянны, а величины y_1 и v_1 определяются уравнениями $\dot{y}_1 = w_3 y_2 - w_2 y_3$, $\dot{\mathrm{v}}_1 = w_3 \mathrm{v}_2 - w_2 \mathrm{v}_3$. Отсюда

$$\omega_\perp \dot{\omega}_\perp = \frac{3\mu_e}{2r^5}(1-\lambda)\frac{dy_1^2}{dt} - pE\rho_a \mathrm{v}\frac{d\mathrm{v}_1}{dt}.$$

Функции $y_1(t)$ и $\mathrm{v}_1(t)$ ограничены, поэтому средние значения производных в правой части последнего уравнения равны нулю. Отсюда $\dot{\omega}_\perp = 0$. Это следствие теории [3] также достаточно хорошо согласуется с результатами реконструкции (ср. интервалы 19 – 25 в табл. 1).

Полную систему уравнений (2), усредненную согласно [3] по регулярной прецессии Эйлера, можно записать следующим образом [6]

$$\omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0), \quad \dot{\omega}_\perp = 0,$$

$$\dot{\mathbf{e}}_L = \frac{3\mu_e}{2r^5 l}(1-\lambda)(1-3c^2)(\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_L)(\mathbf{r}\times\mathbf{e}_L) + \frac{pc}{l}E\rho_a \mathrm{v}(\mathbf{v}\times\mathbf{e}_L), \tag{6}$$

$$l = \sqrt{\lambda^2\omega_1^2 + \omega_\perp^2}, \quad c = \frac{\lambda\omega_1}{l}.$$

Здесь $\mathbf{r}$ – геоцентрический радиус-вектор точки O, $\mathbf{v}$ – скорость этой точки относительно гринвичской системы координат. Система (6) интегрировалась численно в гринвичской системе $CY_1Y_2Y_3$. Ее решения сравнивались с гринвичскими компонентами E_{Yi} $(i = 1, 2, 3)$ орта $\mathbf{e}_L$, построенными по решениям системы (2). Последние были найдены посредством обработки магнитных измерений и продолжены за соответствующую точку $t_0 + T$. Длины всех интервалов сравнения 940 мин. Параметры p, λ, Ω и ε в (6) задавались по результатам обработки на соответствующем интервале $t_0 \le t \le t_0 + T$. Начальные условия $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{e}_L(t_0)$ системы (6) уточнялись методом наименьших квадратов посредством подгонки ее решения к значениям функций $E_{Yi}(t)$ на равномерной сетке с шагом 20 с. Построенные таким образом решения системы (6) пересчитывались в систему координат $CZ_1Z_2Z_3$ и представлялись графиками зависимости величин l, ρ, и α от времени. Эти графики сравнивались с аналогичными графиками, построенными по решениям системы (2).

Примеры такого сравнения на некоторых интервалах табл. 1, для которых $\overline{\omega}_1 > 0.8$ град./с, приведены на рис. 25 – 33. Графики, построенные по решениям системы (6), представлены в виде последовательностей маркеров, графики, построенные по решениям системы (2), изображены сплошными линиями. Рис. 25, 27 иллюстрируют целесообразность подгонки решений системы (6) к функциям $E_{Yi}(t)$, вычисленным вдоль решений системы (2). В левой части этих рисунков решение системы (6) построено с начальными условиями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{e}_L(t_0)$, вычисленными по начальным условиям решения системы (2). В правой части рис. 25, 27 решение системы (6) построено с уточненными значениями $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{e}_L(t_0)$. Графики функций $E_{Yi}(t)$, изображенные на этих рисунках сплошными линями, в левой и правой частях этих рисунков одинаковы. Во всех таких примерах найденное значение $\omega_\perp(t_0)$ отличалось от $\overline{\omega}_\perp$ для реконструкции на соответствующем отрезке $t_0 \le t \le t_0 + T$ на величину порядка $\delta\omega_\perp$. Без уточнения начальных условий $\omega_\perp(t_0)$ и $\mathbf{e}_L(t_0)$ близость решений систем (2) и (6) в большинстве случаев имеет место только в начале отрезка сравнения. После подгонки близость (такая же, как в приведенных примерах) имеет место на всем интервале сравнения.

На рис. 26, 28 – 33 изображены графики, иллюстрирующие движение вектора кинетического момента относительно системы координат $CZ_1Z_2Z_3$. В левых частях этих рисунков приведены графики величин l, ρ, и α, в их правых частях изображены годографы проекций орта оси Ox_1 и орта $\mathbf{e}_L$ на плоскость CZ_1Z_3. Как видим, при $\overline{\omega}_1 > 0.8$ град./с усредненная система правильно описывает тенденцию изменения величин E_{Yi}, l, ρ и α. В случаях, когда неравенство $\overline{\omega}_1 < 0.8$ град./с выполнено с некоторым запасом, согласие решений систем

(2) и (6) не имеет места.

Если в системе (6) соотношение $\omega_1 = \Omega + \varepsilon(t - t_0)$ заменить уравнением (4), то получим усредненную систему, которая в принципе пригодна для описания переменных $\omega_\perp$ и $\mathbf{e}_L$ на более продолжительных отрезках времени. Такая система получается, если указанную замену сделать в системе (2) и, считая параметры a, p и ε малыми величинами одного порядка, усреднить определяемые ей выражения для производных $\dot{\omega}_\perp$ и $\dot{\mathbf{e}}_L$ по регулярной прецессии Эйлера. Однако очень точного совпадения решений полученной таким образом усредненной системы с реальным движением спутника на отрезках времени в несколько суток ожидать не приходится вследствие упрощенного задания аэродинамического момента и механического момента относительно оси Ox_1.

Литература

1. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Иванов В.В., Зайцев А.С., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Определение вращательного движения спутника "Фотон-12" по данным бортовых измерений магнитного поля Земли // Препринт ИПМ им. М.В.Келдыша РАН. 2000. № 60.
2. Абрашкин В.И., Балакин В.Л., Белоконов И.В., Воронов К.Е., Зайцев А.С., Иванов В.В., Казакова А.Е., Сазонов В.В., Семкин Н.Д. Неуправляемое вращательное движение спутника *Фотон-12* и квазистатические микроускорения на его борту // Космические исследования. 2003. Т.41. №1. С.45-56.
3. Белецкий В.В. Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., Наука, 1965.
4. Бойзелинк Т., Ван Бавинхов К., Сазонов В.В., Чебуков С.Ю. Определение вращательного движения спутника *Фотон М-2* по данным измерений микроускорения // Космические исследования. 2009. Т.47. №6. С.537-549.
5. Сазонов В.В. Обработка данных измерений угловой скорости и микроускорения, полученных на спутнике *Фотон-12* // Космические исследования. 2011. Т.49. № 5. С.419-435.
6. Буланов Д.М., Сазонов В.В. Исследование эволюции вращательного движения спутника *Фотон М-2* // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2016. № 116.

Таблица 1. Результаты обработки измерений МПЗ на спутнике *Фотон 12*

№ инт.	Дата 09.1999	t_0 UTC	T, мин	σ_H, γ	$\overline{\omega}_1$, град./с	$\delta\omega_1$, град./с	$\overline{\omega}_\perp$, град./с	$\delta\omega_\perp$, град./с
1	11	03:32:48	150	2013	0.3314	0.0057	0.1229	0.036
2	11	13:14:35	210	2602	0.4184	0.0052	0.0950	0.028
3	12	03:14:34	210	2158	0.4916	0.0043	0.1085	0.028
4	12	15:57:21	210	2247	0.5411	0.0071	0.1593	0.021
5	13	01:57:09	210	2100	0.6074	0.0002	0.0978	0.027
6	13	13:59:31	210	2269	0.6473	0.0018	0.0700	0.026
7	14	05:38:46	210	2286	0.6982	0.0039	0.1289	0.020
8	14	18:56:55	210	2589	0.7495	0.0071	0.1314	0.010
9	15	02:18:35	210	2084	0.7808	0.0049	0.1432	0.0092
10	15	13:18:34	210	2492	0.8178	0.0042	0.1605	0.0070
11	15	23:40:47	210	1821	0.8496	0.0021	0.1492	0.0090
12	16	11:40:41	210	2201	0.8729	0.0052	0.1473	0.0074
13	16	16:59:44	210	2152	0.8868	0.0039	0.1472	0.0072
14	17	19:05:14	210	1840	0.9422	0.0003	0.1524	0.0055
15	18	18:33:07	210	1960	0.9716	0.0005	0.1761	0.0055
16	18	21:54:51	210	1928	0.9861	0.0036	0.1668	0.0050
17	19	08:54:51	210	1766	1.0090	0.0020	0.1102	0.0047
18	19	21:55:05	197	1650	1.0157	0.0000	0.0982	0.0050
19	20	07:55:22	206	2002	1.0287	0.0003	0.1466	0.0063
20	20	19:56:17	210	2138	1.0360	0.0018	0.1528	0.0062
21	21	05:50:08	210	1688	1.0458	0.0000	0.1234	0.012
22	21	21:13:34	210	2449	1.0383	0.0051	0.1440	0.0092
23	22	07:55: 02	210	2310	1.0450	0.0026	0.1407	0.0069
24	22	22:54:54	210	2007	1.0399	0.0014	0.1479	0.0068
25	23	02:53:52	275	2482	1.0394	0.0007	0.1461	0.012

Таблица 2. Стандартные отклонения оценок начальных условий вращательного движения

№ инт.	σ_γ	σ_δ	σ_β	σ_Ω	σ_{w2}	σ_{w3}
1	0.025	0.018	0.014	0.018	0.016	0.027
2	0.026	0.012	0.010	0.013	0.021	0.015
3	0.028	0.0080	0.0066	0.0085	0.038	0.033
4	0.022	0.010	0.0083	0.011	0.017	0.055
5	0.022	0.028	0.012	0.0069	0.022	0.048
6	0.022	0.023	0.011	0.0093	0.030	0.018
7	0.022	0.014	0.014	0.011	0.024	0.053
8	0.017	0.018	0.0094	0.011	0.030	0.045
9	0.013	0.011	0.014	0.016	0.044	0.038
10	0.027	0.013	0.0097	0.021	0.055	0.048
11	0.020	0.018	0.016	0.013	0.058	0.019
12	0.038	0.037	0.0072	0.018	0.027	0.048
13	0.021	0.010	0.011	0.022	0.024	0.064
14	0.011	0.0095	0.014	0.022	0.035	0.038
15	0.016	0.011	0.016	0.015	0.050	0.055
16	0.071	0.070	0.010	0.014	0.050	0.021
17	0.018	0.016	0.0098	0.013	0.043	0.033
18	0.019	0.018	0.0097	0.010	0.029	0.042
19	0.026	0.028	0.011	0.015	0.036	0.062
20	0.016	0.0082	0.011	0.015	0.024	0.056
21	0.010	0.011	0.0084	0.0077	0.030	0.034
22	0.027	0.027	0.018	0.015	0.057	0.051
23	0.021	0.013	0.014	0.015	0.031	0.069
24	0.015	0.013	0.0093	0.014	0.068	0.019
25	0.017	0.017	0.0091	0.015	0.027	0.063

Таблица 3. Оценки и стандартные отклонения параметров уравнений движения

№ инт.	p	σ_p	λ	σ_λ	ε	σ_ε	α_c	$\sigma_{\alpha c}$	β_c	$\sigma_{\beta c}$
1	– 0.0006	0.00044	0.2556	0.0014	0.0383	0.0029	– 0.0010	0.0058	– 0.0472	0.0059
2	– 0.0021	0.00022	0.2542	0.00074	0.0251	0.0019	– 0.0013	0.0063	– 0.0552	0.0064
3	– 0.0013	0.00039	0.2471	0.00041	0.0207	0.0011	– 0.0023	0.0048	– 0.0539	0.0047
4	– 0.0027	0.00019	0.2425	0.00067	0.0340	0.0013	– 0.0077	0.0047	– 0.0530	0.0047
5	– 0.0013	0.00020	0.2459	0.00037	– 0.0008	0.00097	0.0063	0.0048	– 0.0463	0.0048
6	– 0.0002	0.00022	0.2449	0.00056	0.0086	0.0011	0.0126	0.0050	– 0.0548	0.0050
7	0.0034	0.00050	0.2440	0.00060	0.0185	0.0018	– 0.0104	0.0055	– 0.0511	0.0055
8	– 0.0020	0.00029	0.2424	0.00062	0.0341	0.00085	– 0.0239	0.0057	– 0.0538	0.0057
9	– 0.0011	0.00036	0.2370	0.00074	0.0237	0.0010	– 0.0160	0.0048	– 0.0667	0.0048
10	0.0007	0.00033	0.2330	0.0011	0.0200	0.00099	– 0.0118	0.0058	– 0.0668	0.0057
11	– 0.0033	0.00025	0.2356	0.00058	0.0100	0.00086	– 0.0279	0.0044	– 0.0567	0.0044
12	0.0122	0.00042	0.2426	0.00084	0.0248	0.00091	– 0.0091	0.0053	– 0.0648	0.0052
13	– 0.0002	0.00040	0.2402	0.00095	0.0185	0.00088	– 0.0370	0.0046	– 0.0623	0.0046
14	0.0015	0.00035	0.2396	0.0011	– 0.0013	0.00070	– 0.0347	0.0040	– 0.0564	0.0040
15	– 0.0029	0.00044	0.2319	0.00076	0.0024	0.00078	– 0.0153	0.0042	– 0.0636	0.0042
16	0.0010	0.00036	0.2390	0.00066	0.0175	0.00068	– 0.0291	0.0043	– 0.0556	0.0042
17	0.0015	0.00036	0.2395	0.00059	0.0094	0.00065	– 0.0461	0.0048	– 0.0590	0.0048
18	– 0.0014	0.00035	0.2381	0.00048	0.0000	0.00069	– 0.0532	0.0040	– 0.0653	0.0040
19	– 0.0008	0.00046	0.2354	0.00069	– 0.0013	0.0010	– 0.0371	0.0053	– 0.0645	0.0053
20	– 0.0055	0.00038	0.2374	0.00067	0.0086	0.00067	– 0.0465	0.0047	– 0.0602	0.0047
21	– 0.0064	0.00034	0.2400	0.00031	0.0000	0.00066	– 0.0366	0.0043	– 0.0697	0.0043
22	0.0023	0.00058	0.2391	0.00065	– 0.0243	0.0011	– 0.0422	0.0056	– 0.0682	0.0056
23	– 0.0048	0.00050	0.2398	0.00067	0.0124	0.0013	– 0.0562	0.0062	– 0.0694	0.0062
24	– 0.0054	0.00047	0.2390	0.00067	0.0067	0.00086	– 0.0511	0.0048	– 0.0676	0.0048
25	– 0.0081	0.00042	0.2392	0.00067	0.0025	0.00073	– 0.0493	0.0058	– 0.0684	0.0058

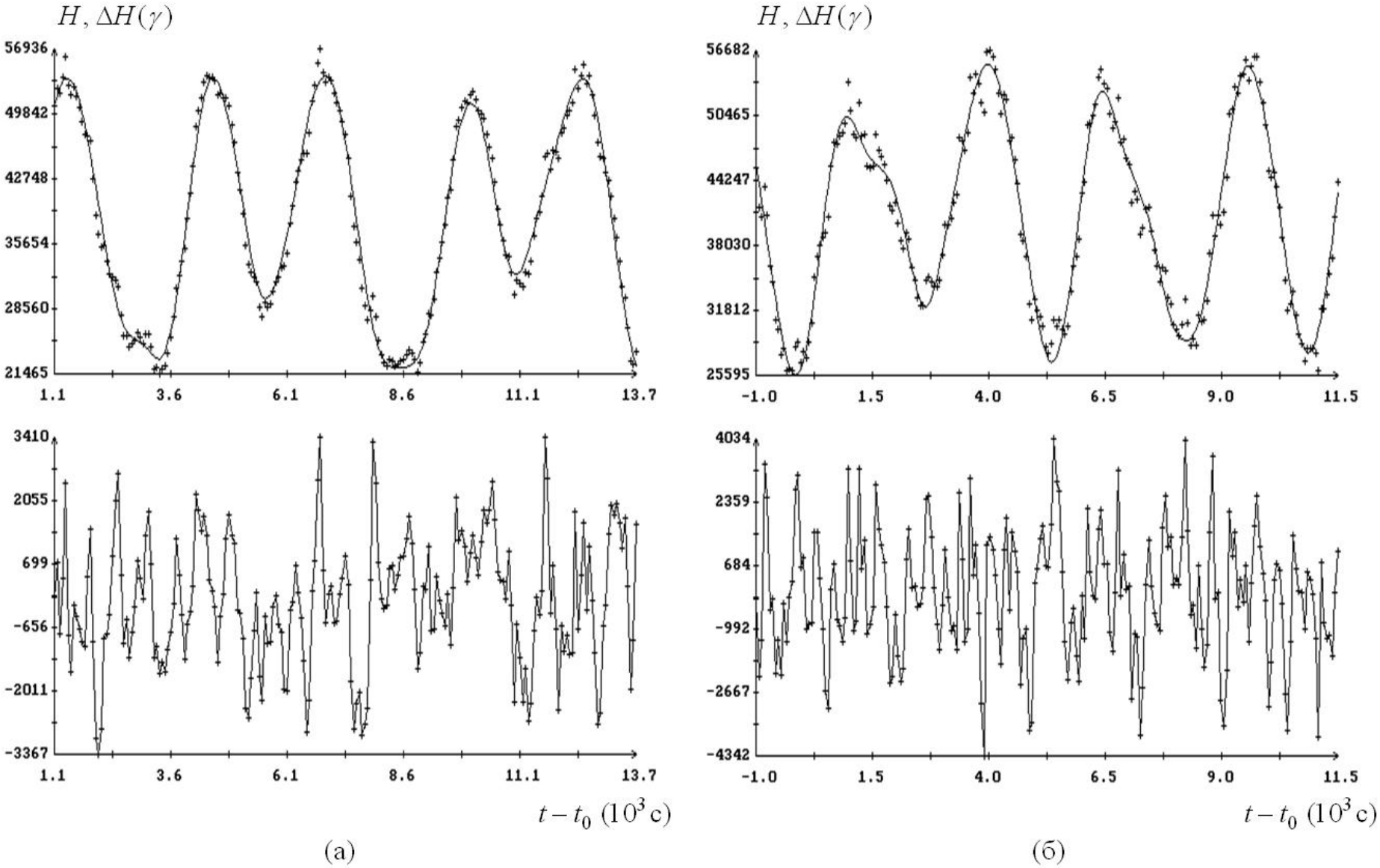


Рис. 1. Сравнение модулей измеренной и расчетной напряженности МПЗ; (а) момент времени $t_0 = 01:39:31$ UTC 13.09.1999, СКО$(\Delta H) = 1374\gamma$; (б) момент времени $t_0 = 18:50:05$ UTC 18.09.1999, СКО$(\Delta H) = 1649\gamma$

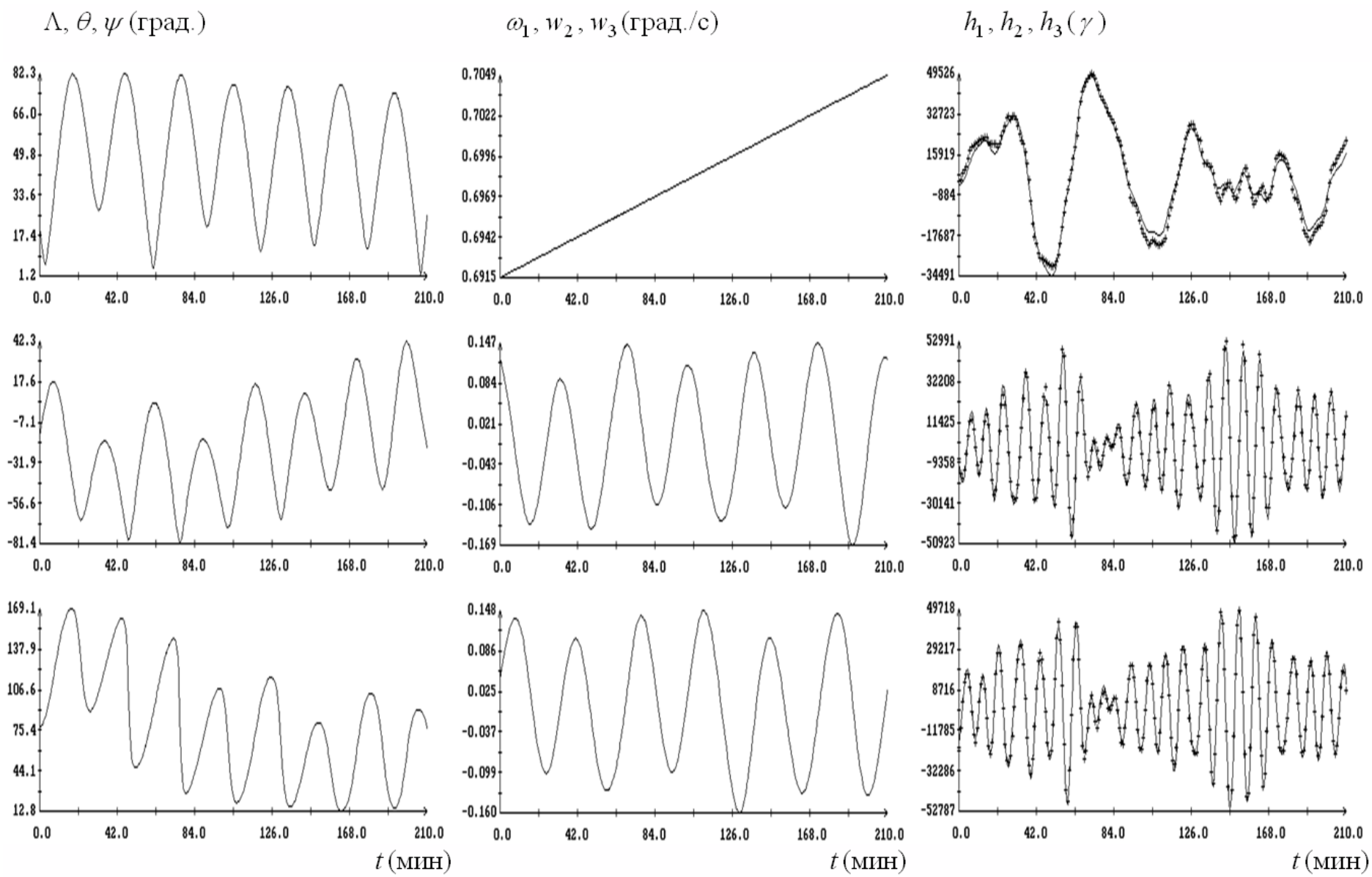


Рис. 2. Интервал 7. Момент $t = 0$ соответствует 05:38:46 UTC 14.09.1999, $\sigma_H = 2286\,\gamma$.

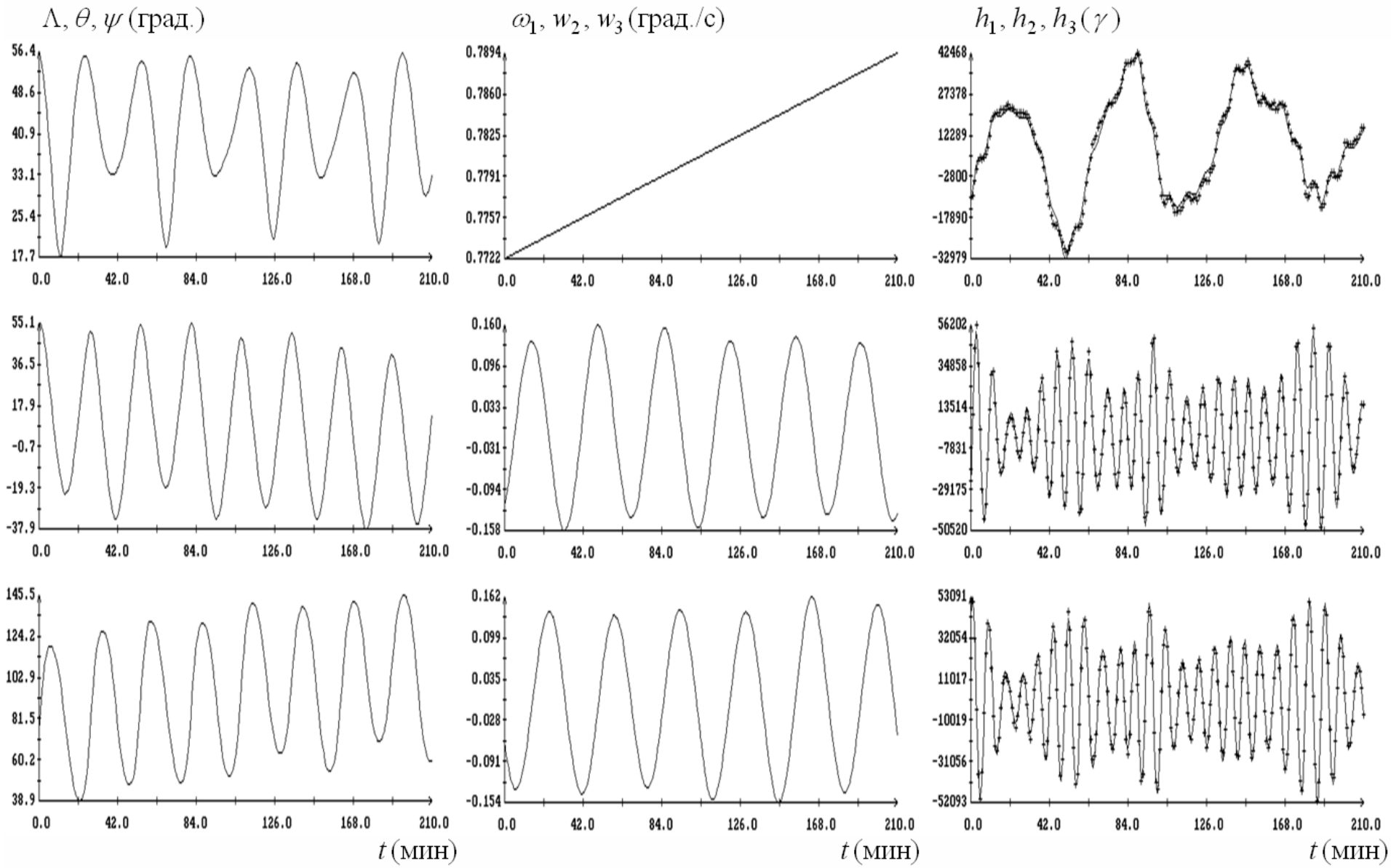


Рис. 3. Интервал 9. Момент $t = 0$ соответствует 02:18:35 UTC 15.09.1999, $\sigma_H = 2084\,\gamma$.

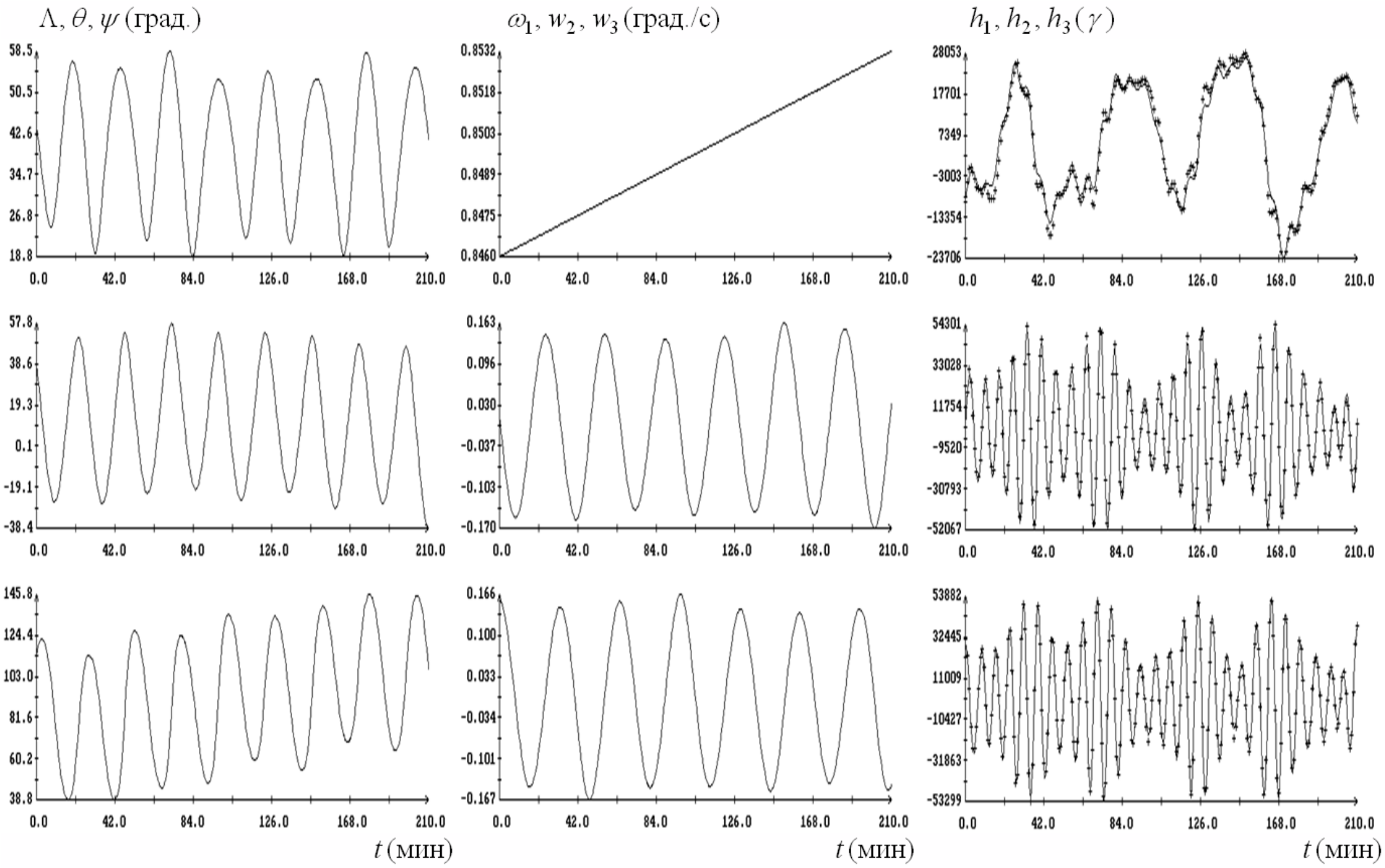


Рис. 4. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999, $\sigma_H = 1821\,\gamma$.

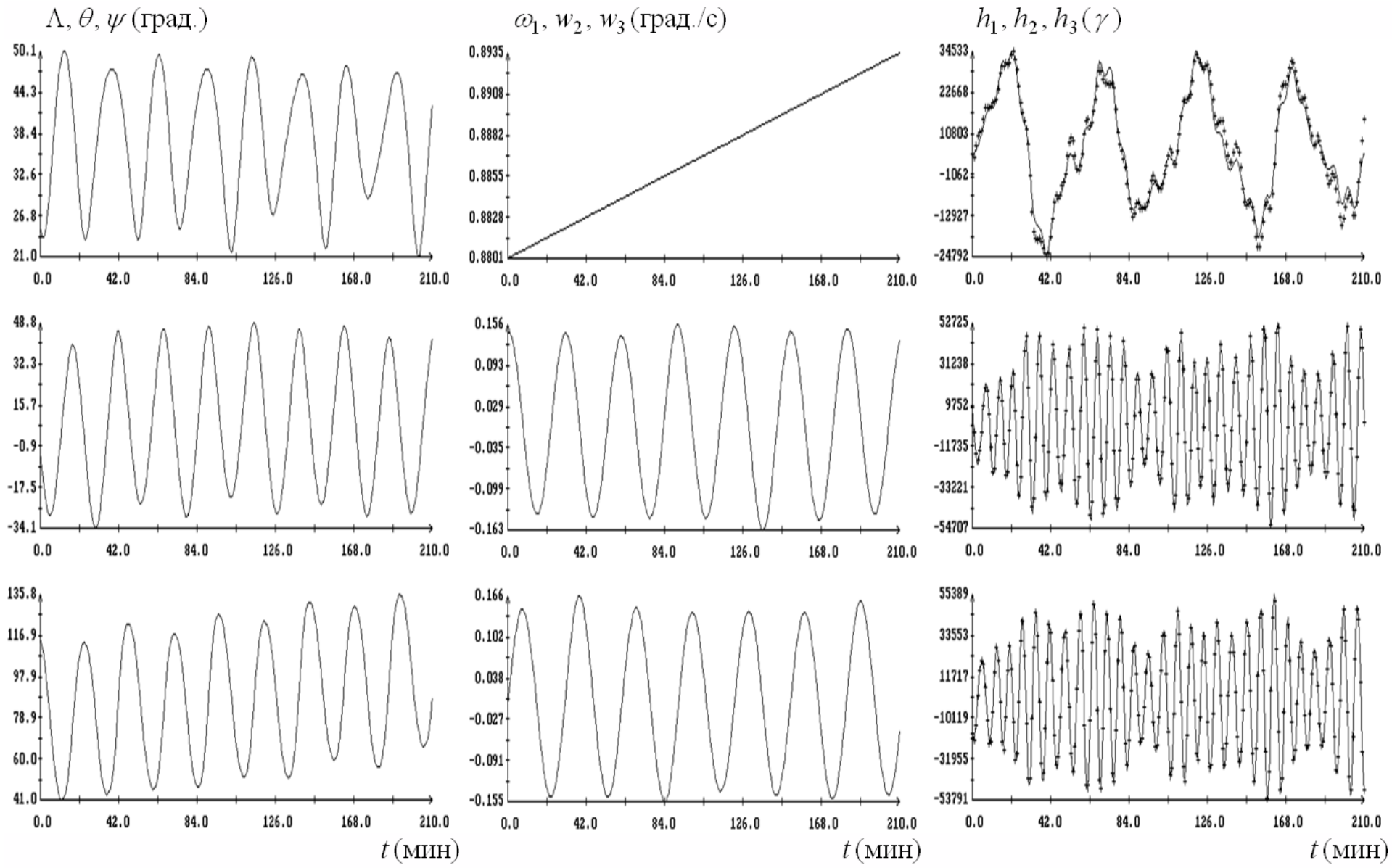


Рис. 5. Интервал 13. Момент $t = 0$ соответствует 16:59:44 UTC 16.09.1999, $\sigma_H = 2125\,\gamma$.

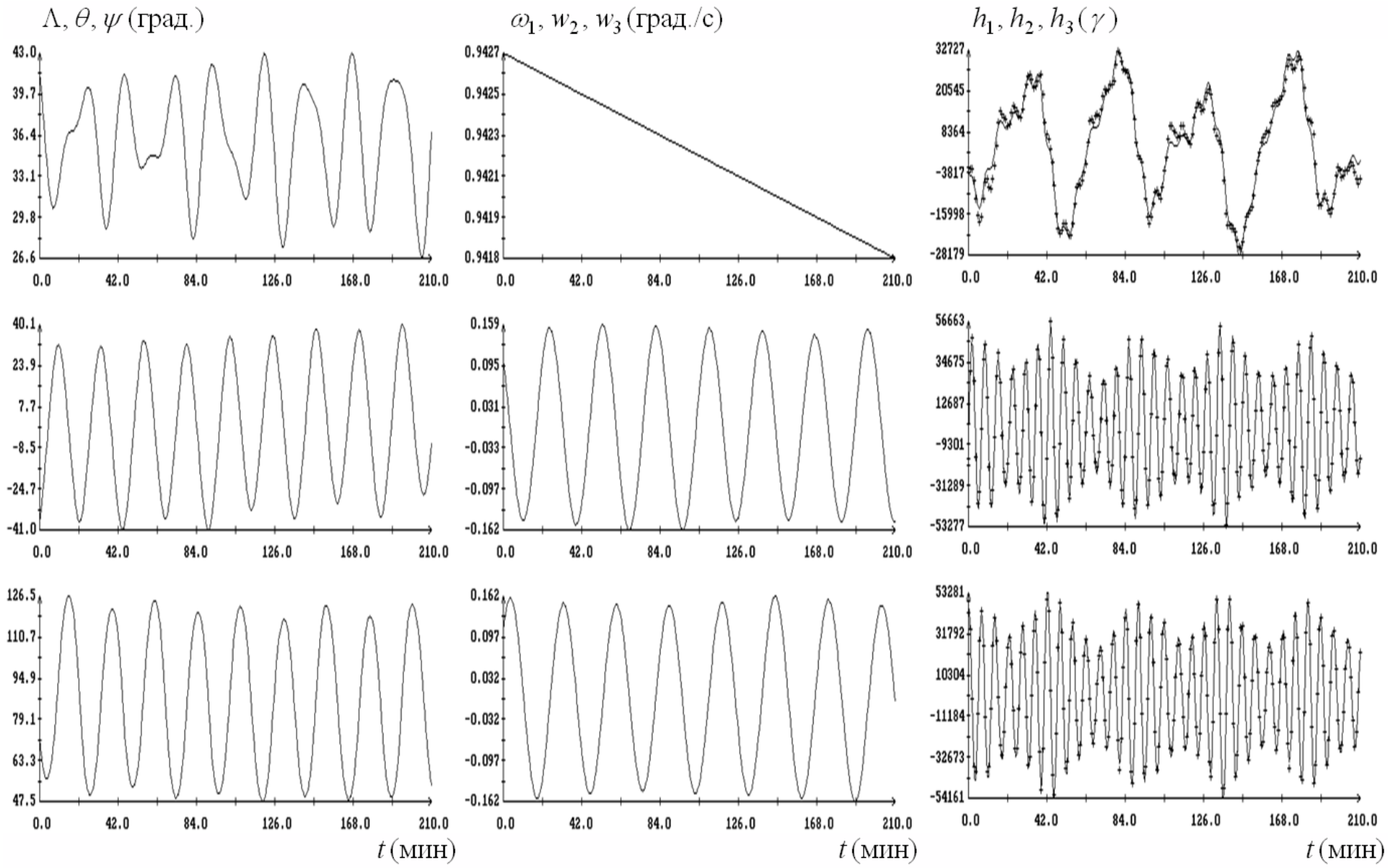


Рис. 6. Интервал 14. Момент $t = 0$ соответствует 19:05:14 UTC 17.09.1999, $\sigma_H = 1840\,\gamma$.

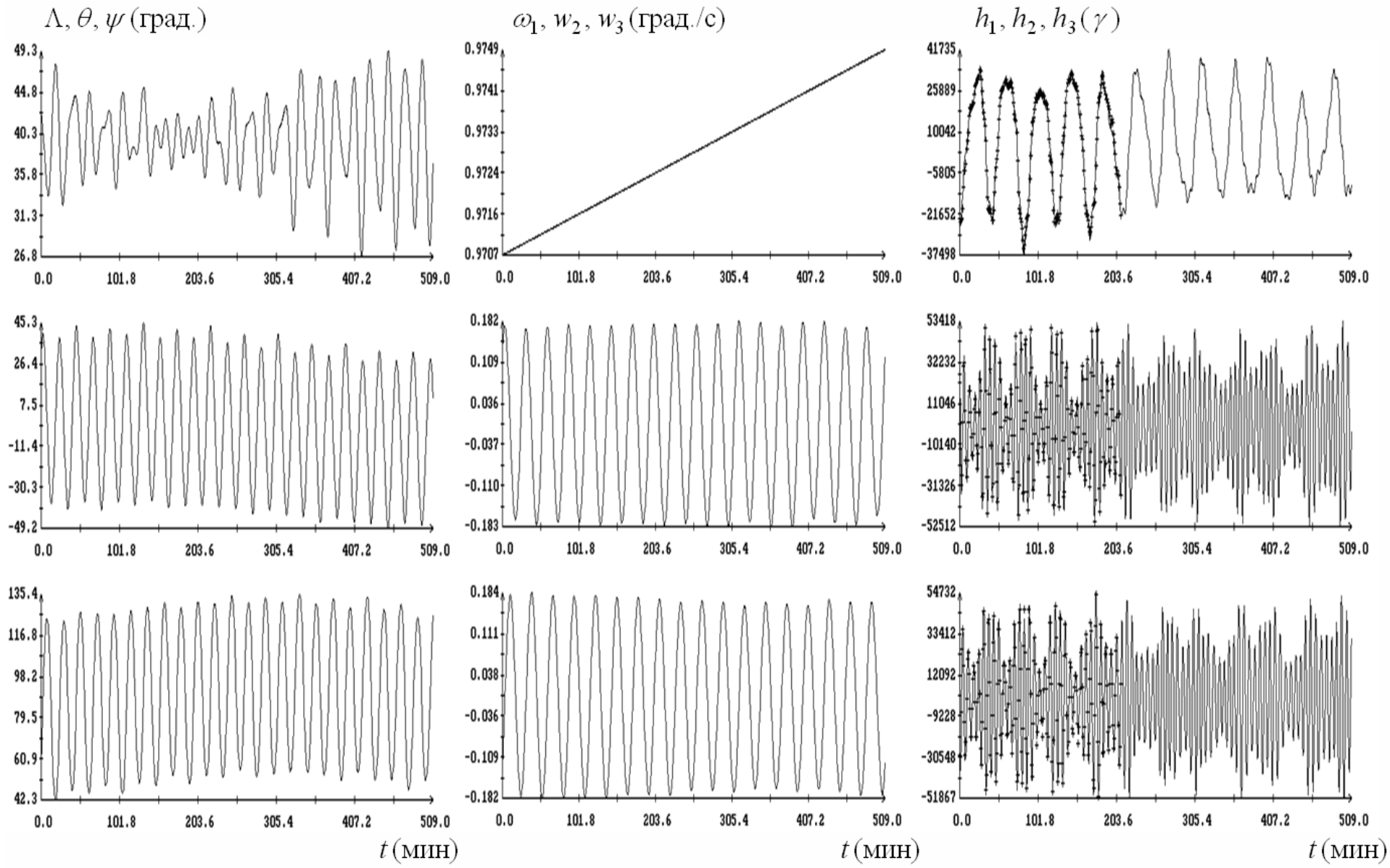


Рис. 7. Интервал 15. Момент $t = 0$ соответствует 18:33:07 UTC 18.09.1999, $\sigma_H = 1960\,\gamma$.

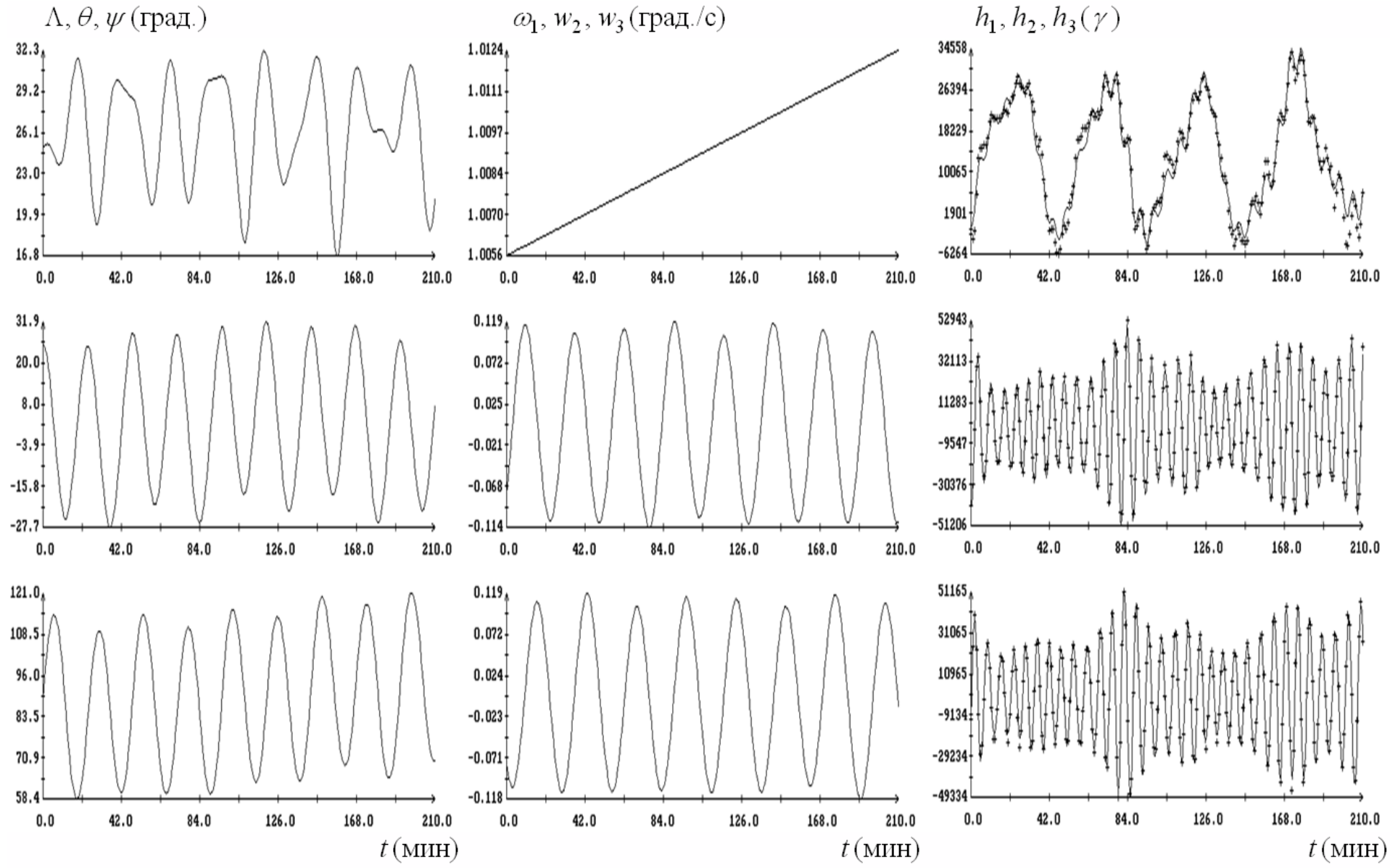


Рис. 8. Интервал 17. Момент $t = 0$ соответствует 08:54:51 UTC 19.09.1919, $\sigma_H = 1766\,\gamma$.

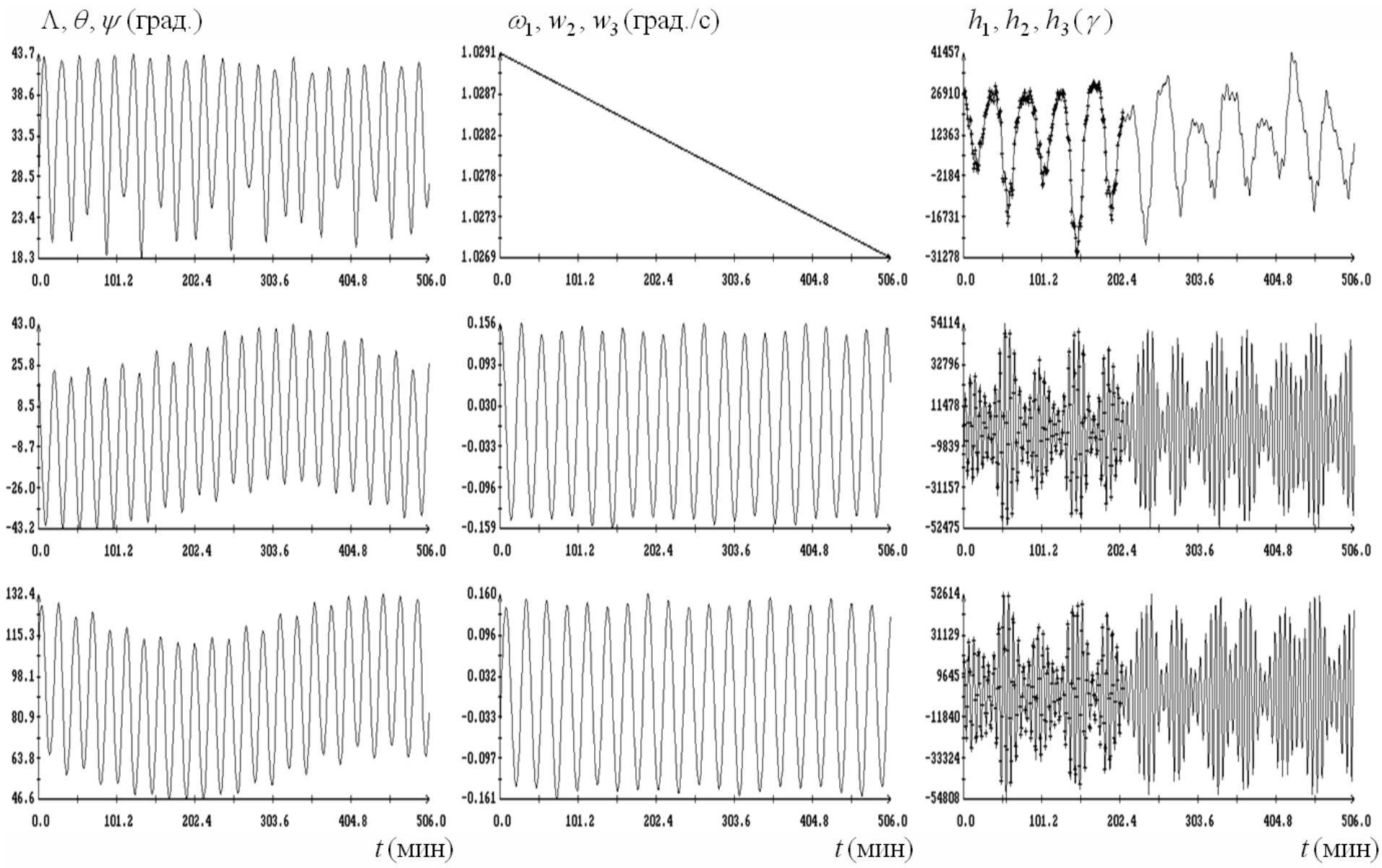


Рис. 9. Интервал 19. Момент $t = 0$ соответствует 07:55:22 UTC 20.09.1919, $\sigma_H = 2002\ \gamma$.

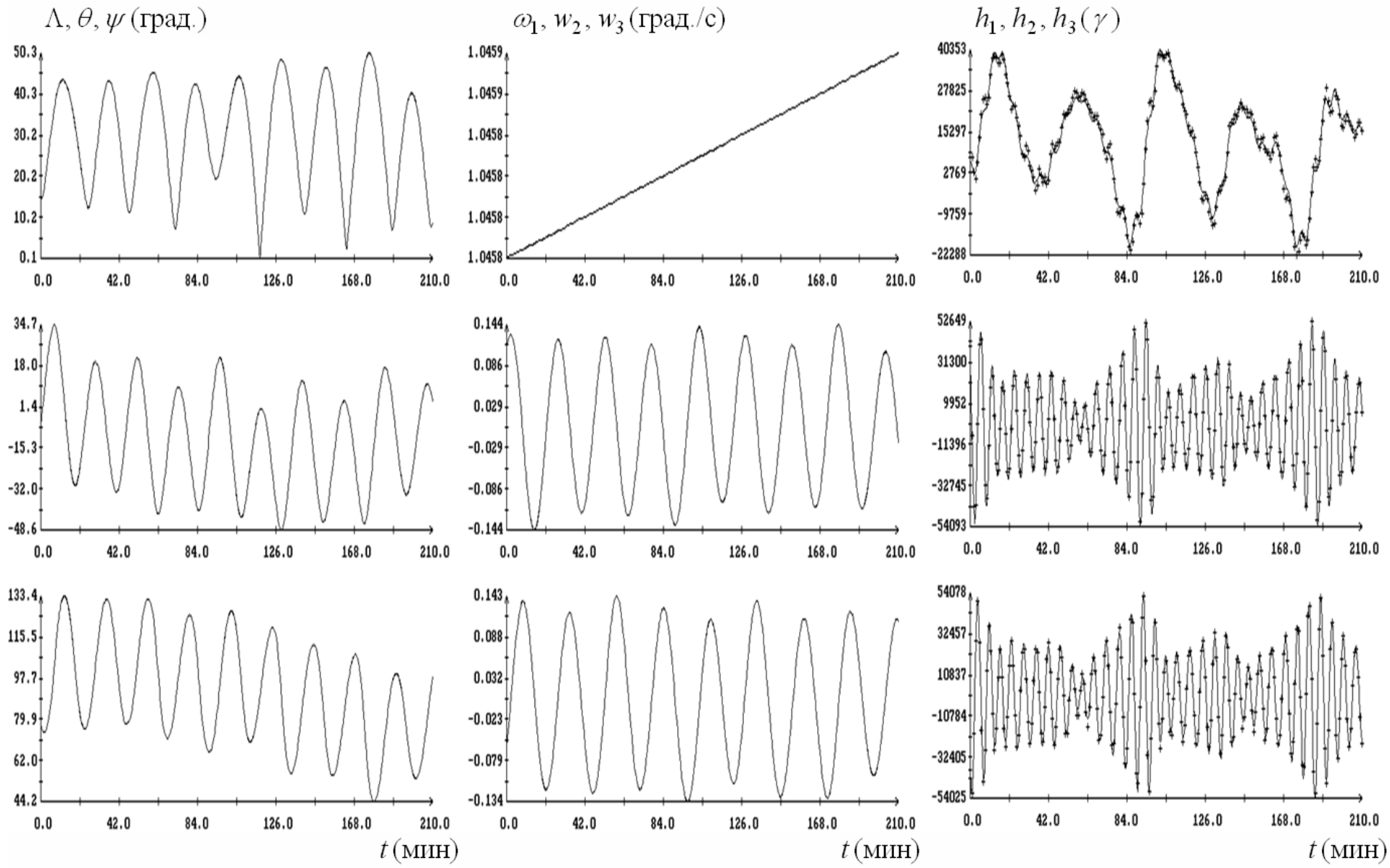


Рис. 10. Интервал 21. Момент $t = 0$ соответствует 05:50:08 UTC 21.09.1919, $\sigma_H = 1688\,\gamma$.

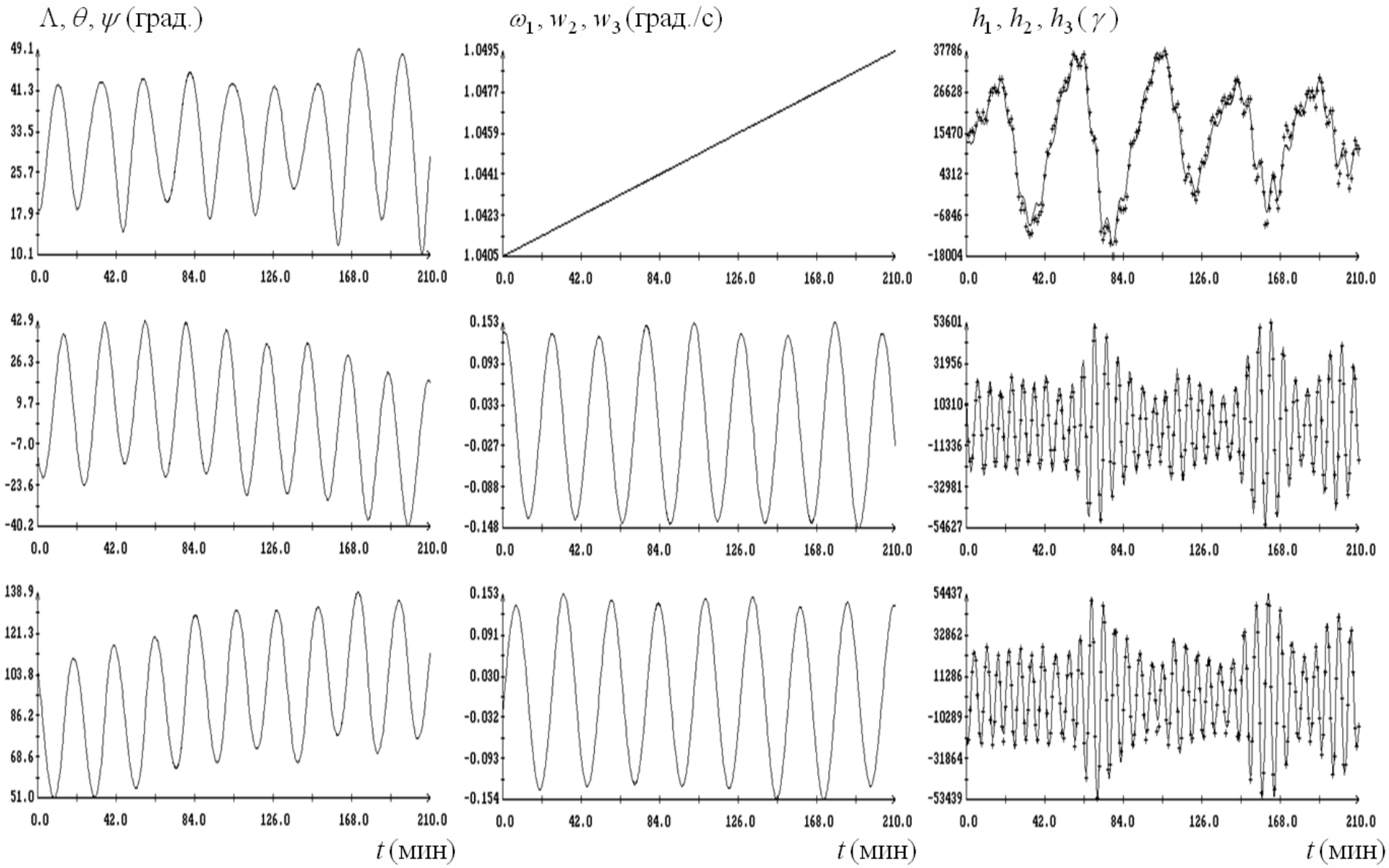


Рис. 11. Интервал 23. Момент $t = 0$ соответствует 07:55:02 UTC 22.09.1999, $\sigma_H = 2310\,\gamma$.

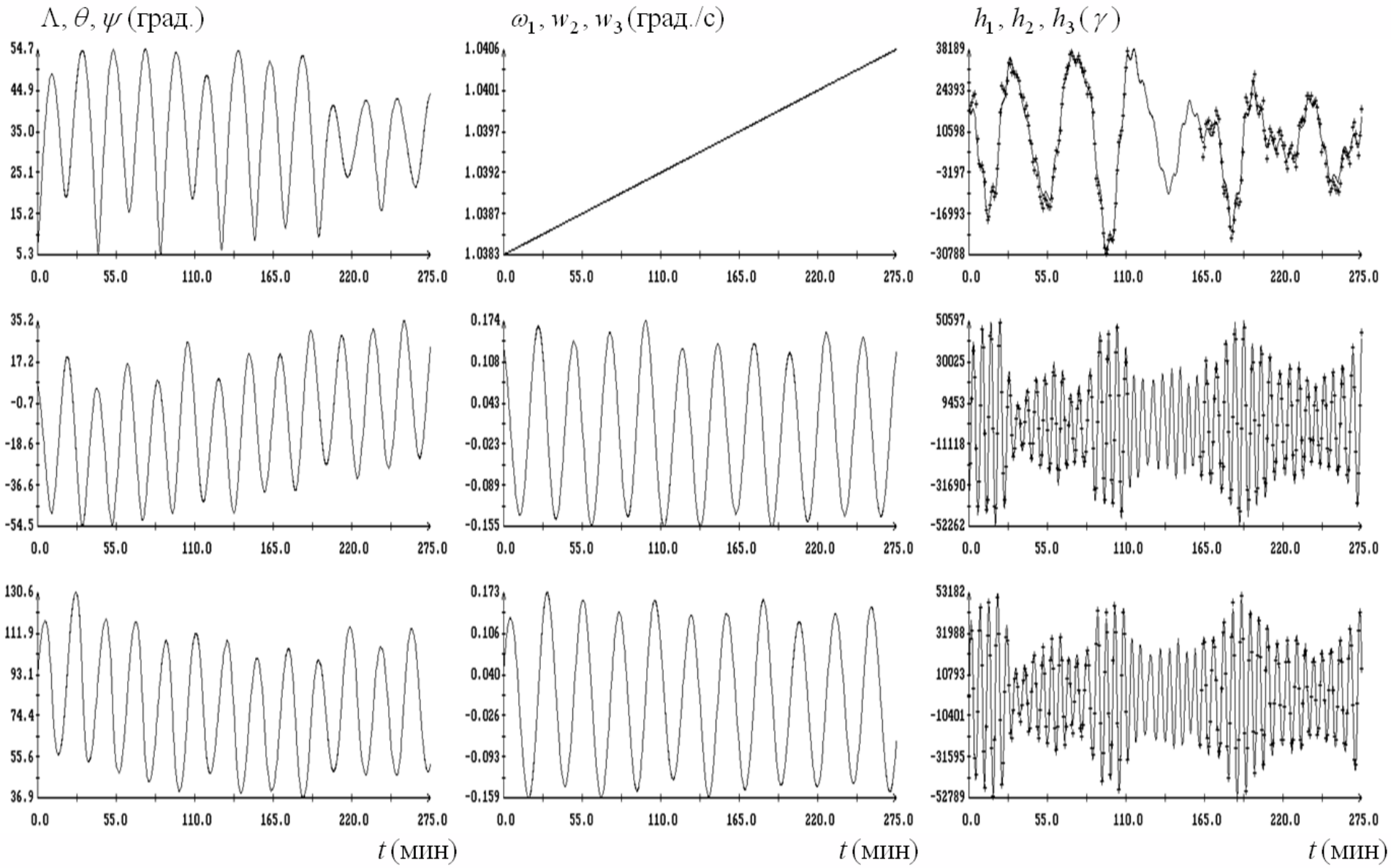


Рис. 12. Интервал 25. Момент $t = 0$ соответствует 02:53:52 UTC 23.09.1999, $\sigma_H = 2186\gamma$.

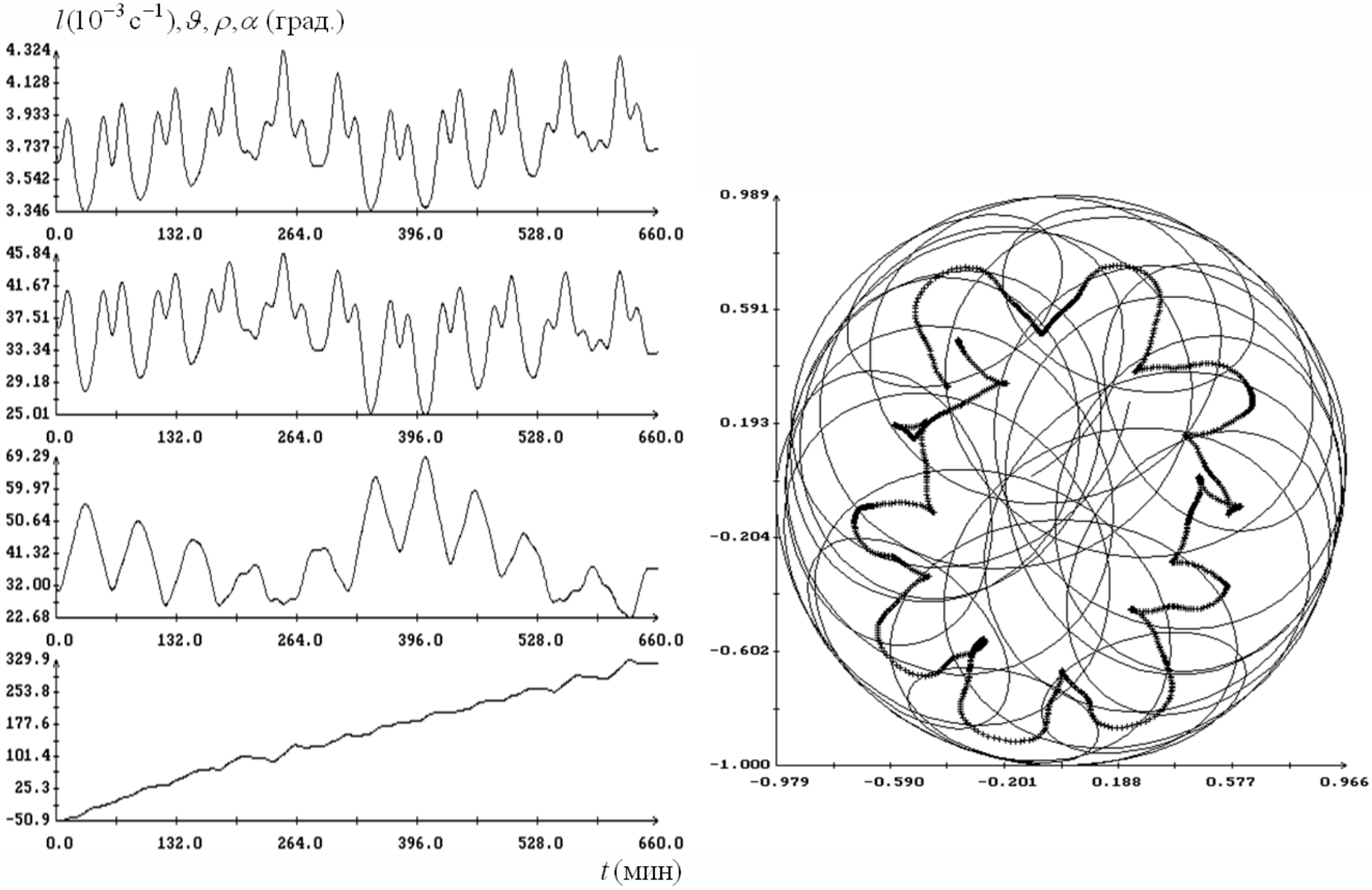


Рис. 13. Интервал 7. Момент $t = 0$ соответствует 05:38:46 UTC 14.09.1999.

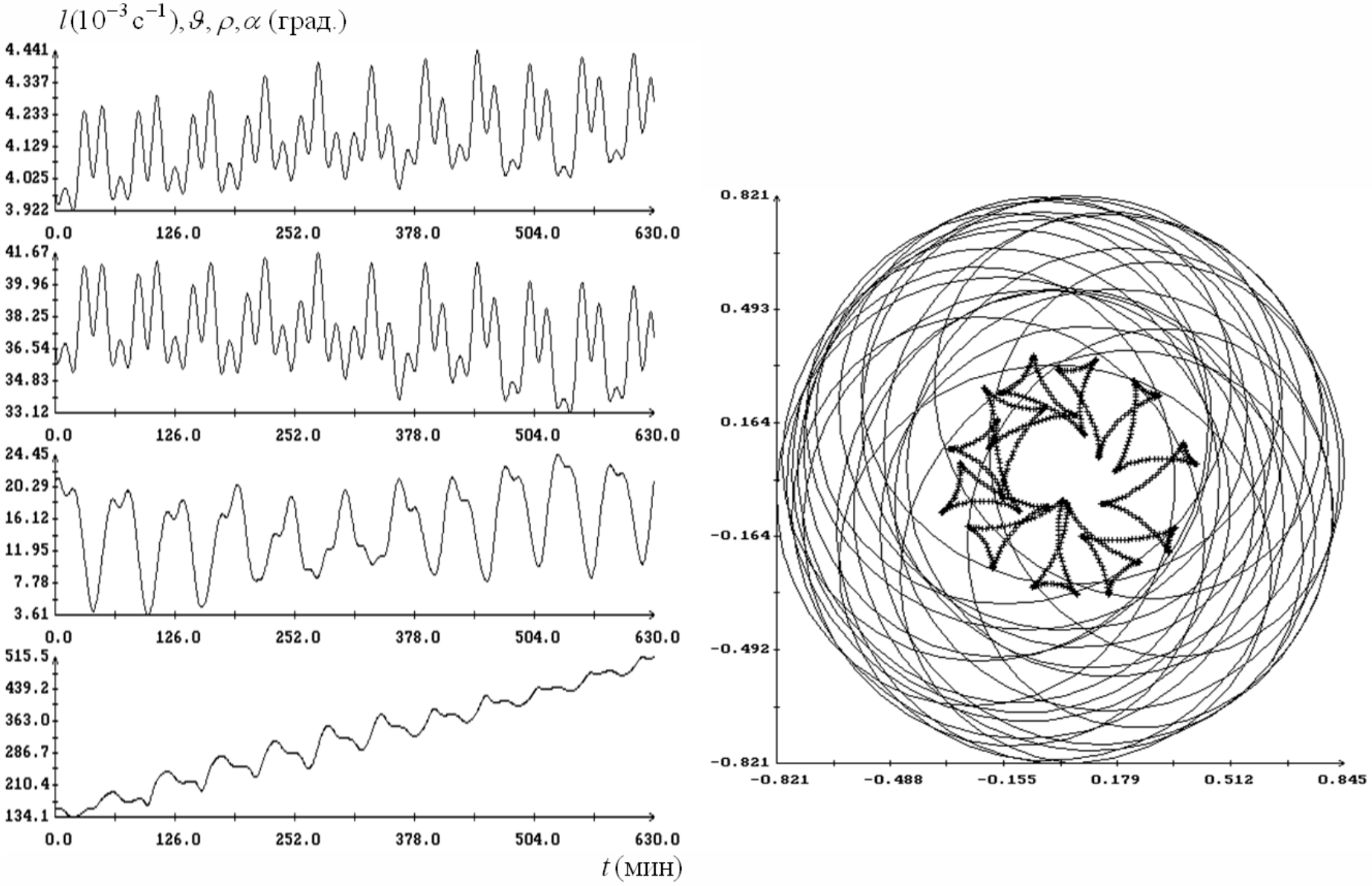
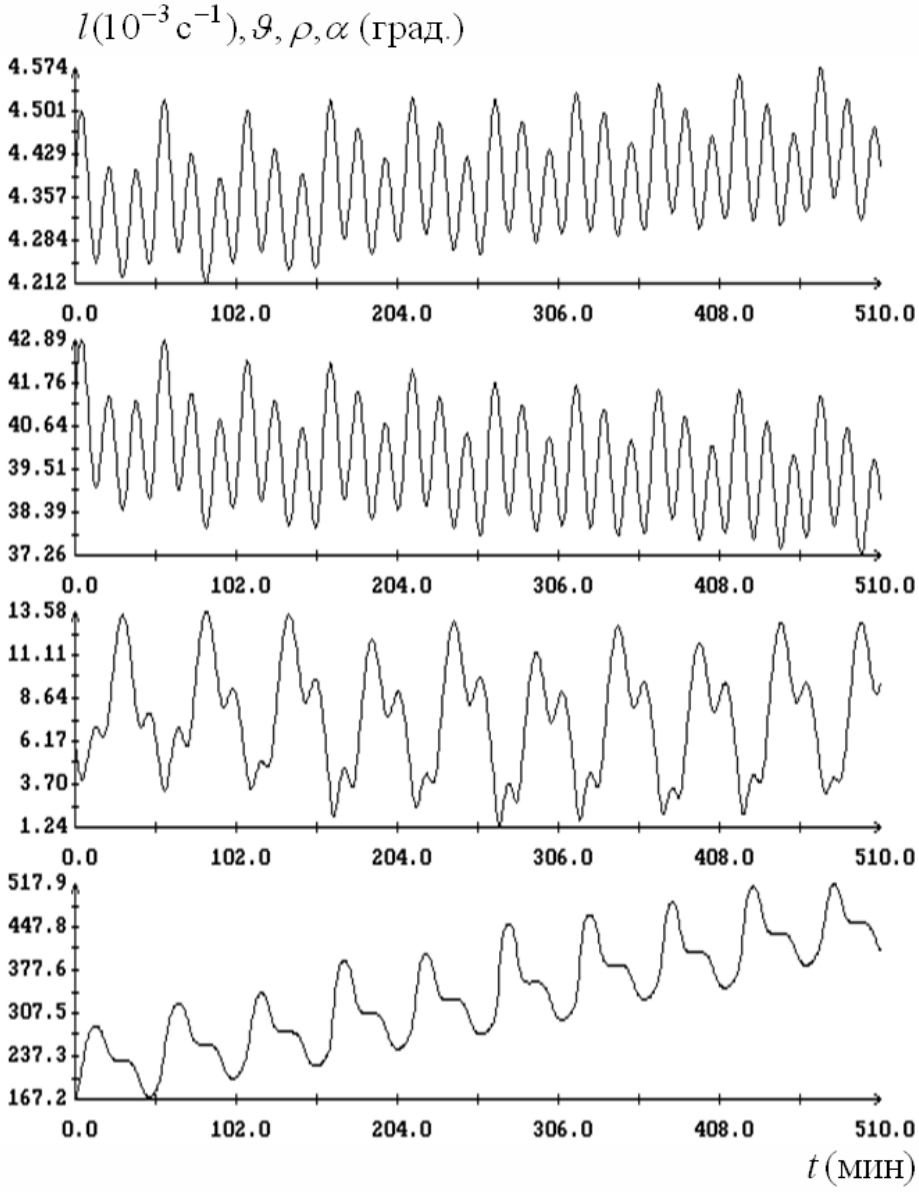


Рис. 14. Интервал 9. Момент $t = 0$ соответствует 02:18:35 UTC 15.09.1999.



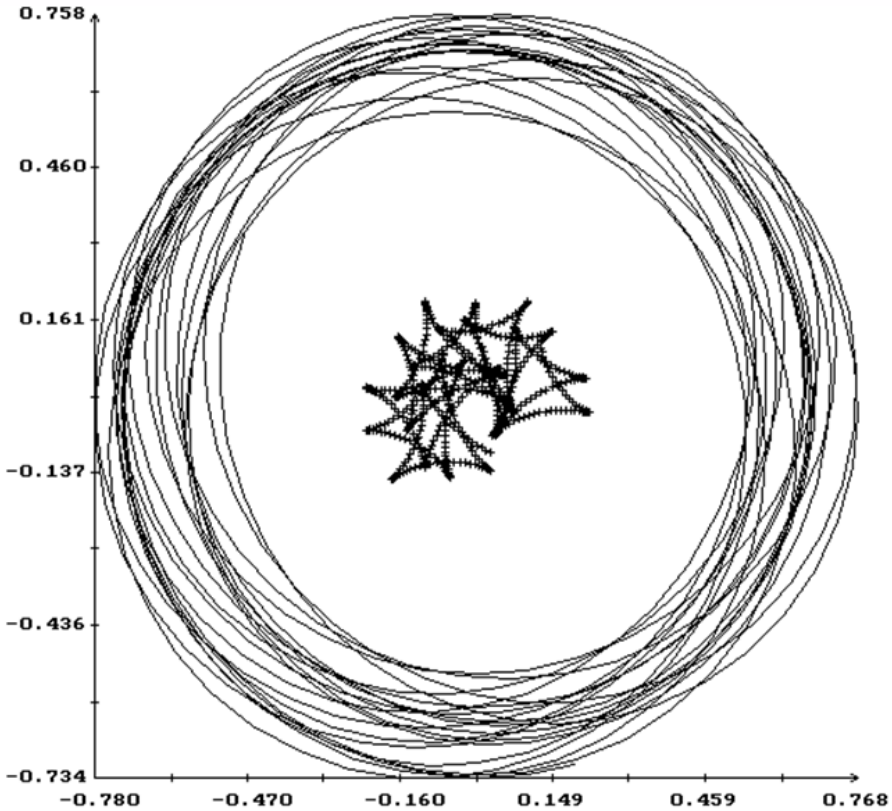


Рис. 15. Интервал 10. Момент $t = 0$ соответствует 13:18:34 UTC 15.09.1999.

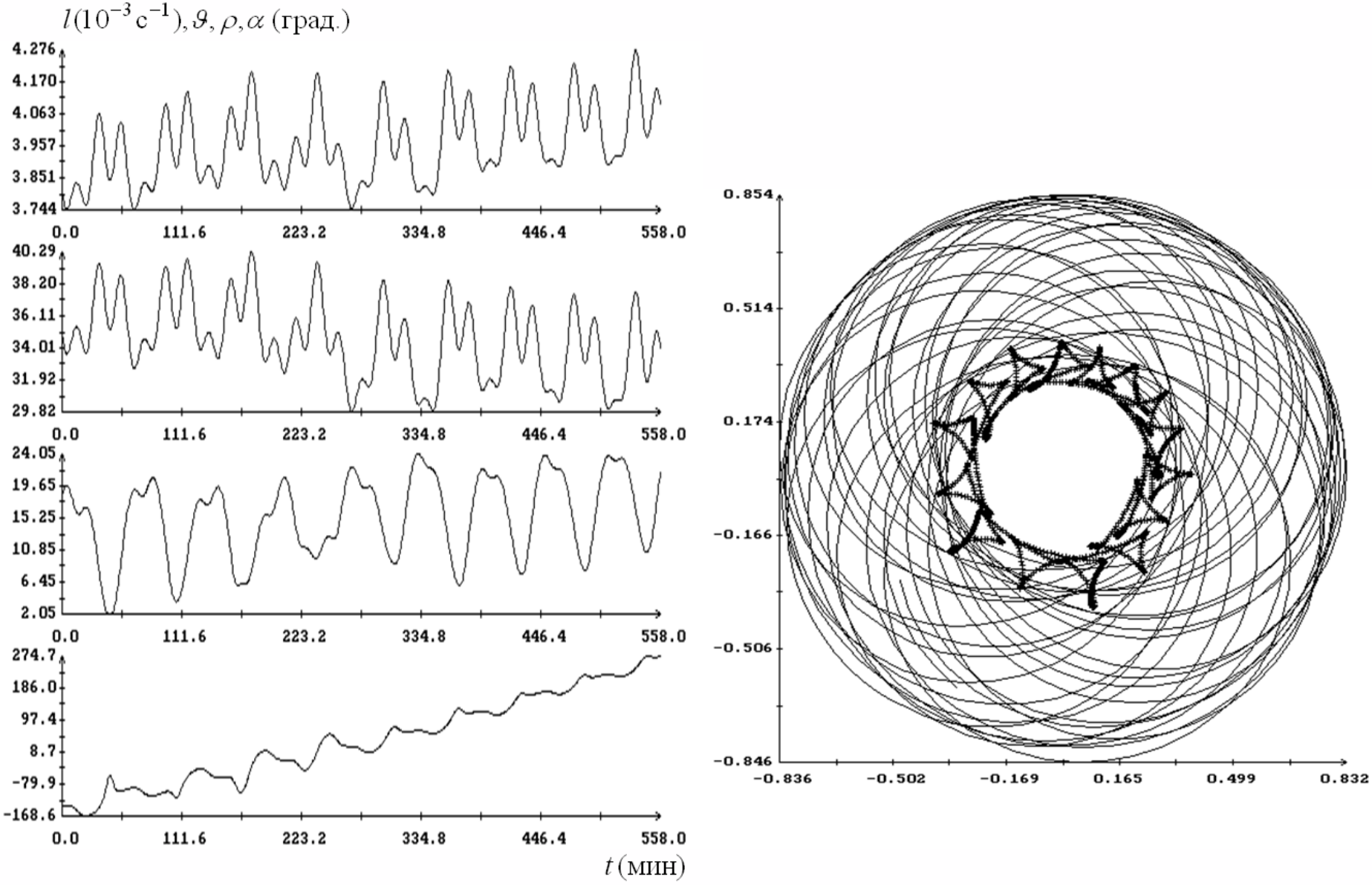


Рис. 16. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999.

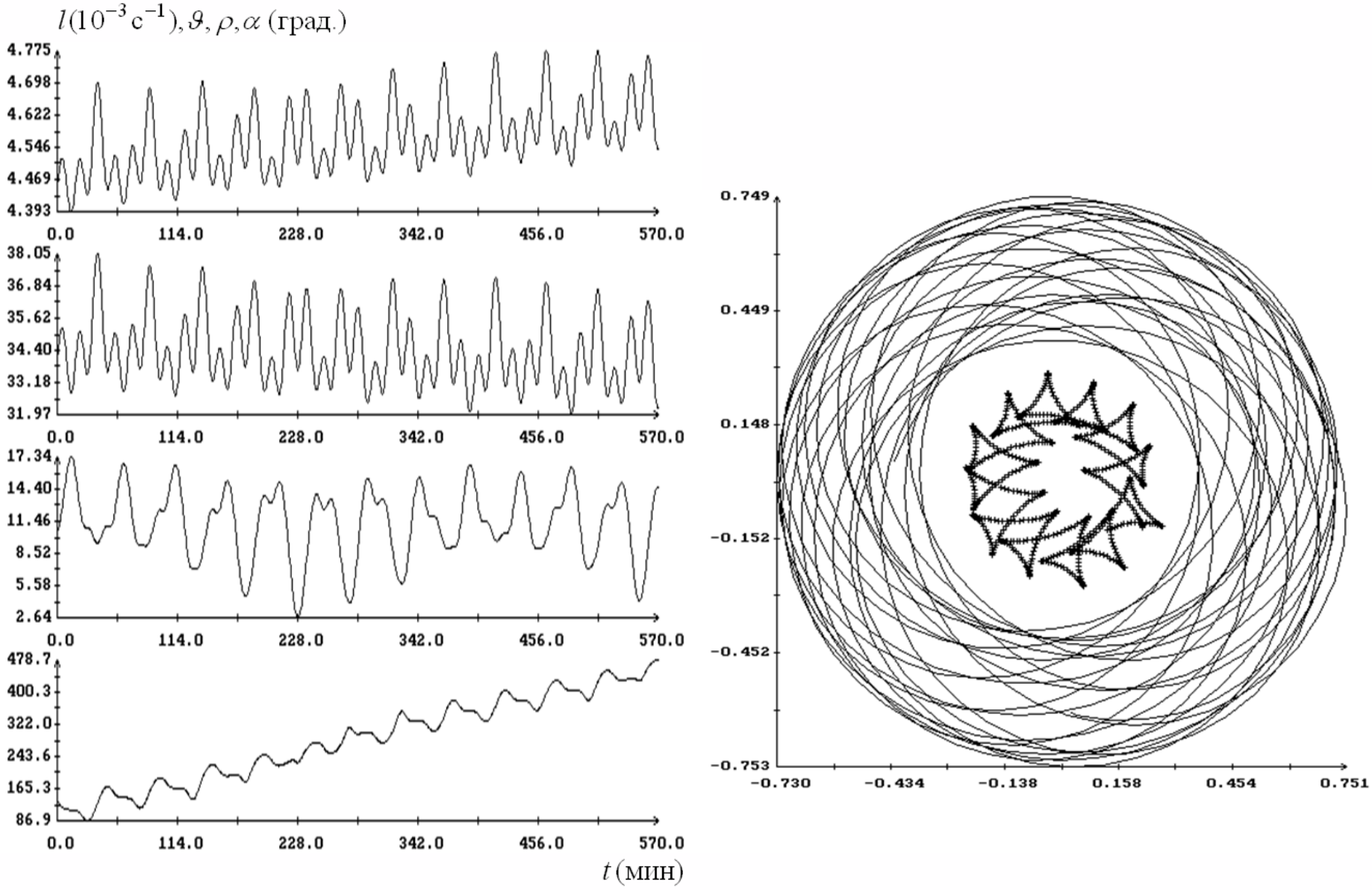


Рис. 17. Интервал 13. Момент $t = 0$ соответствует 16:59:44 UTC 16.09.1999.

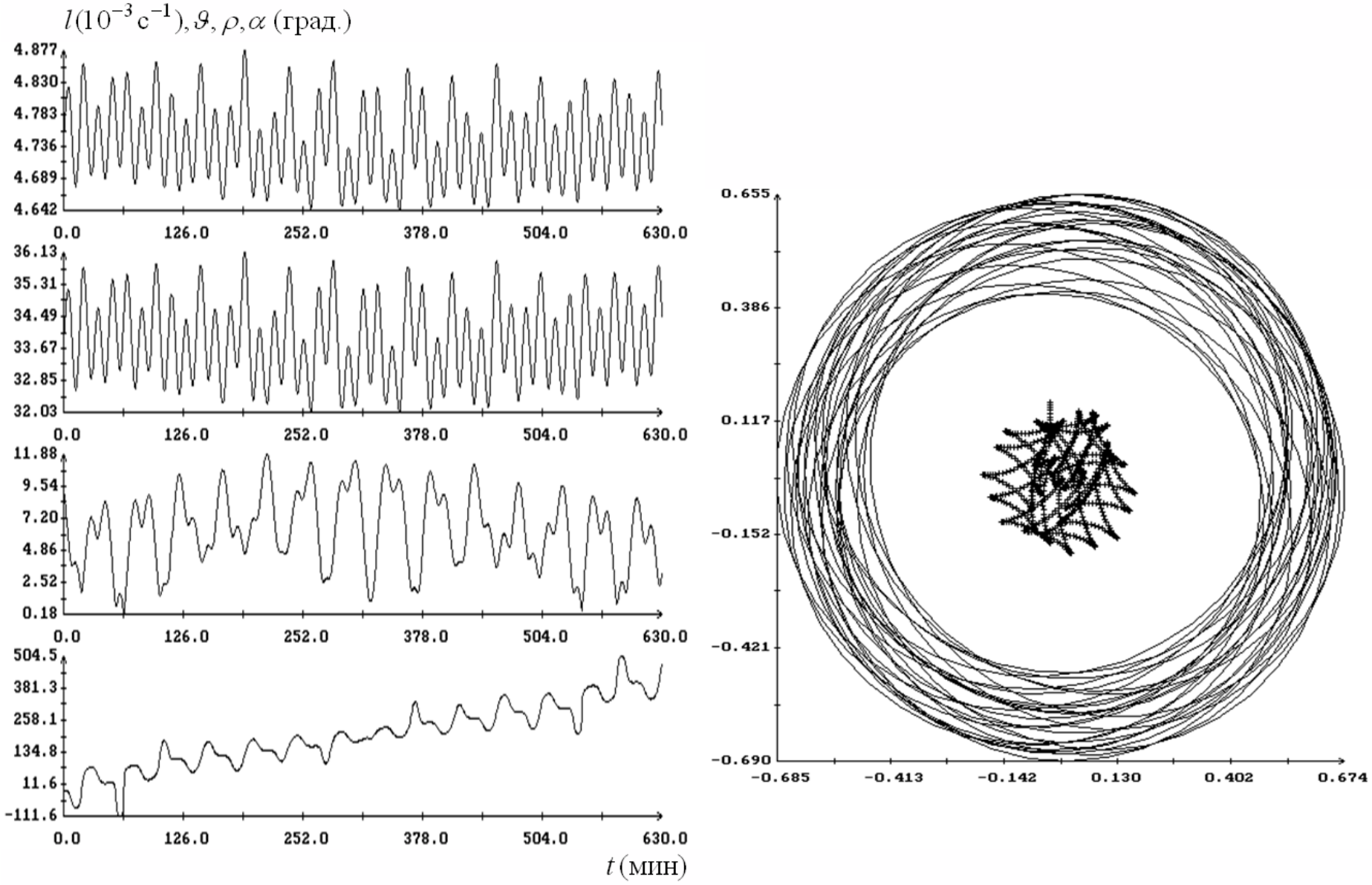


Рис. 18. Интервал 14. Момент $t = 0$ соответствует 19:05:14 UTC 17.09.1999.

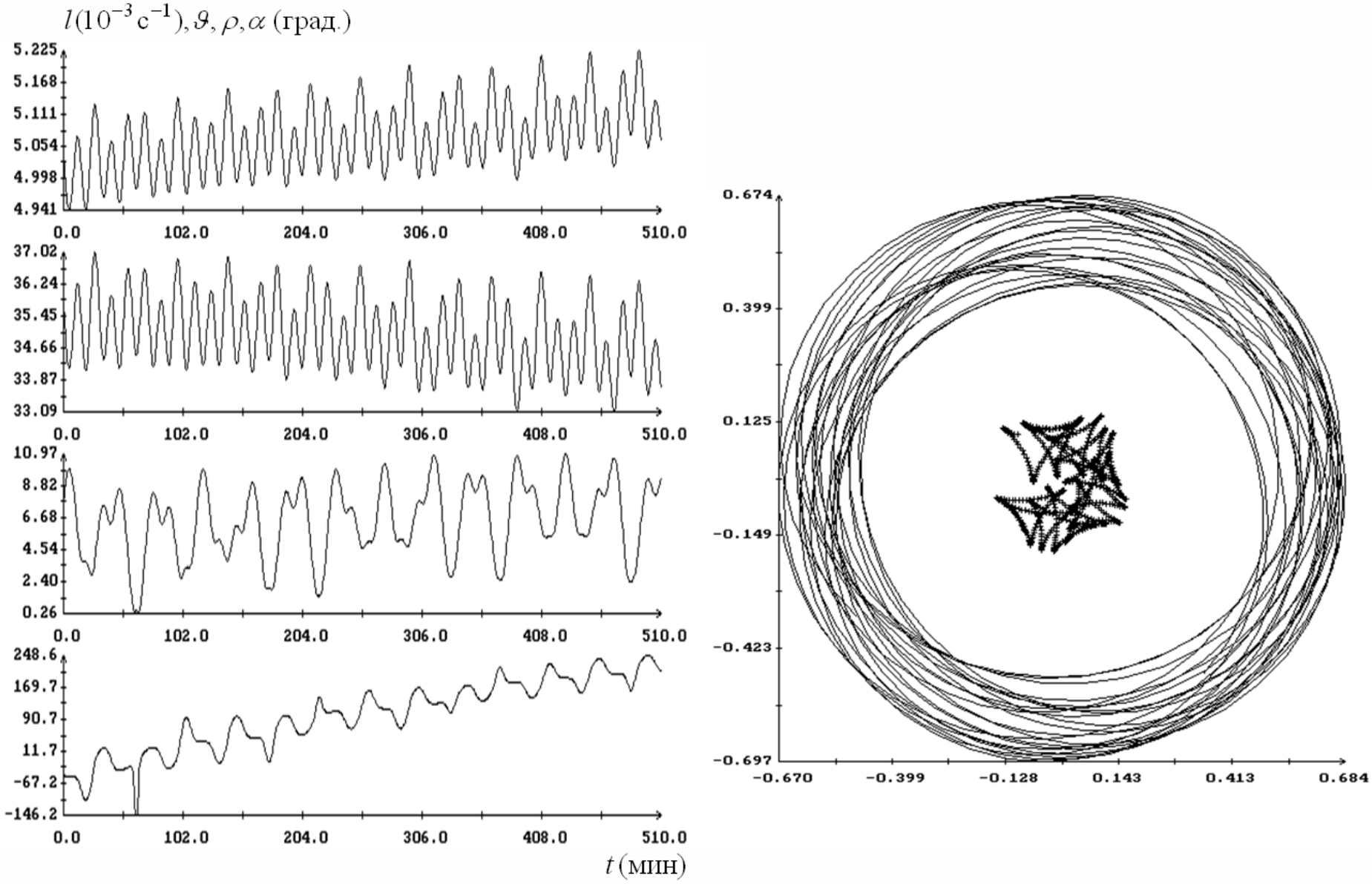
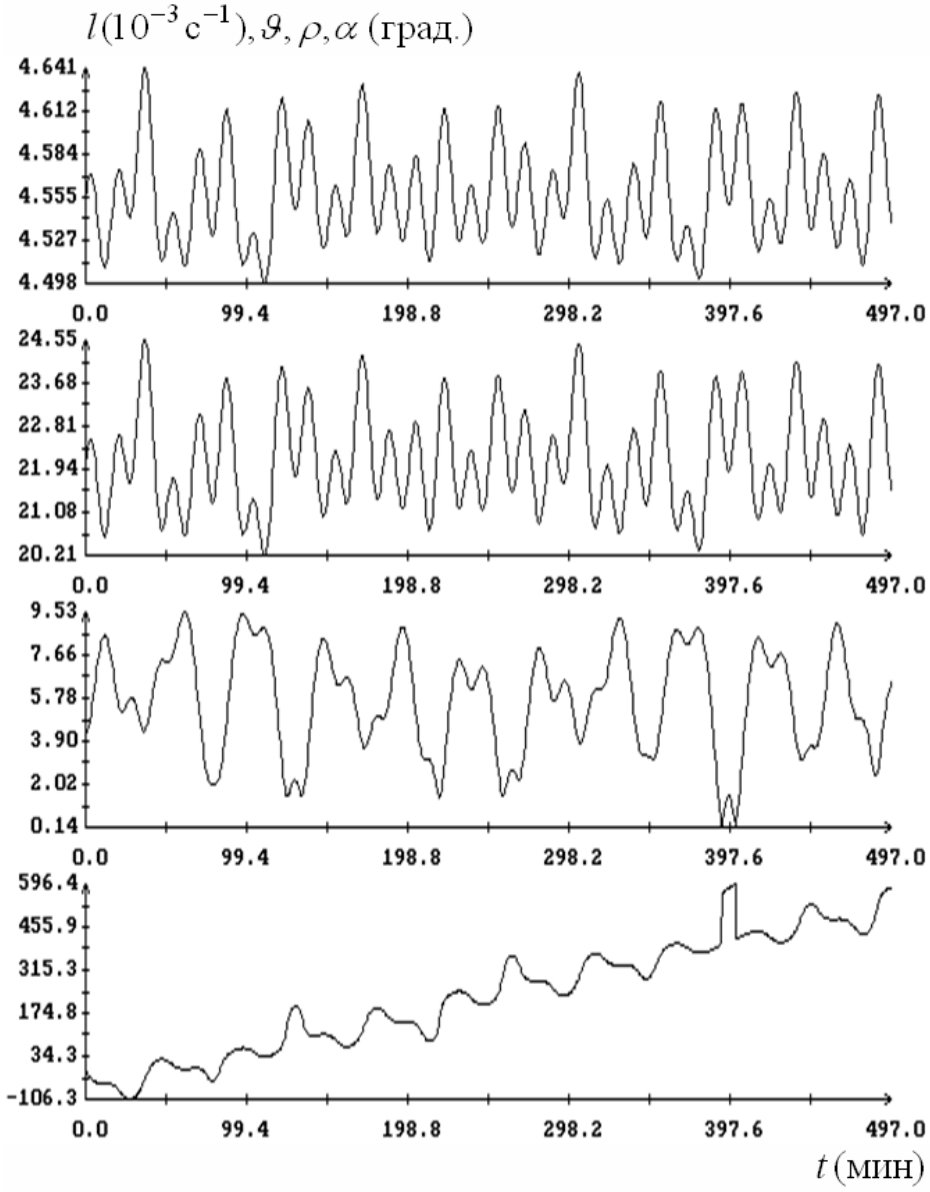


Рис. 19. Интервал 16. Момент $t = 0$ соответствует 21:54:51 UTC 18.09.1999.



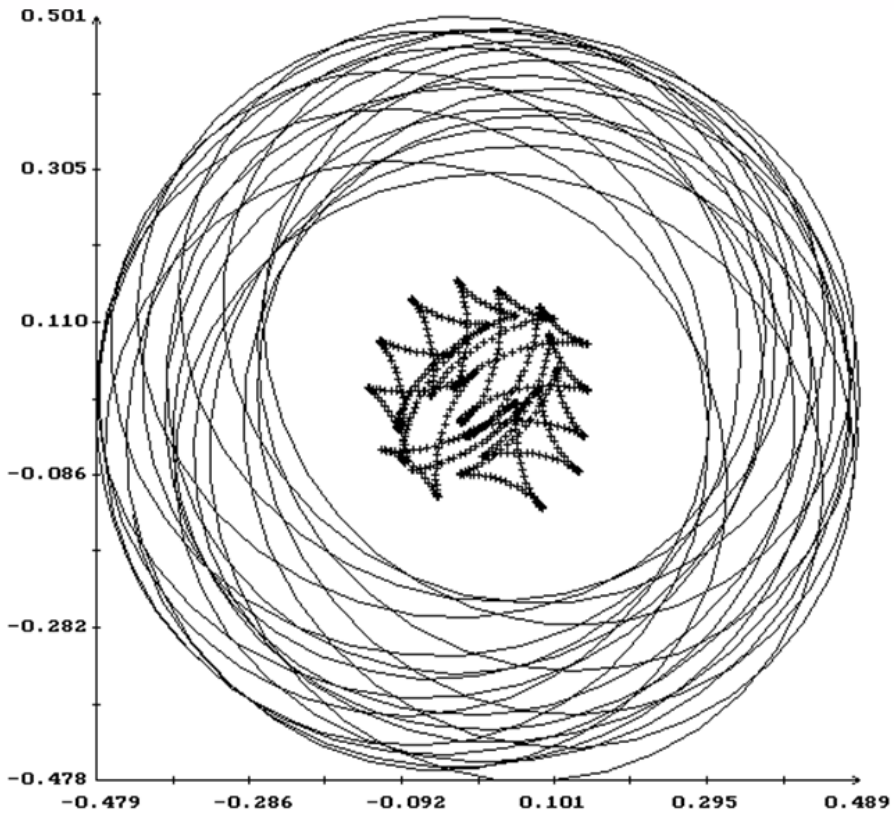


Рис. 20. Интервал 18. Момент $t = 0$ соответствует 21:55: 05 UTC 19.09.1919.

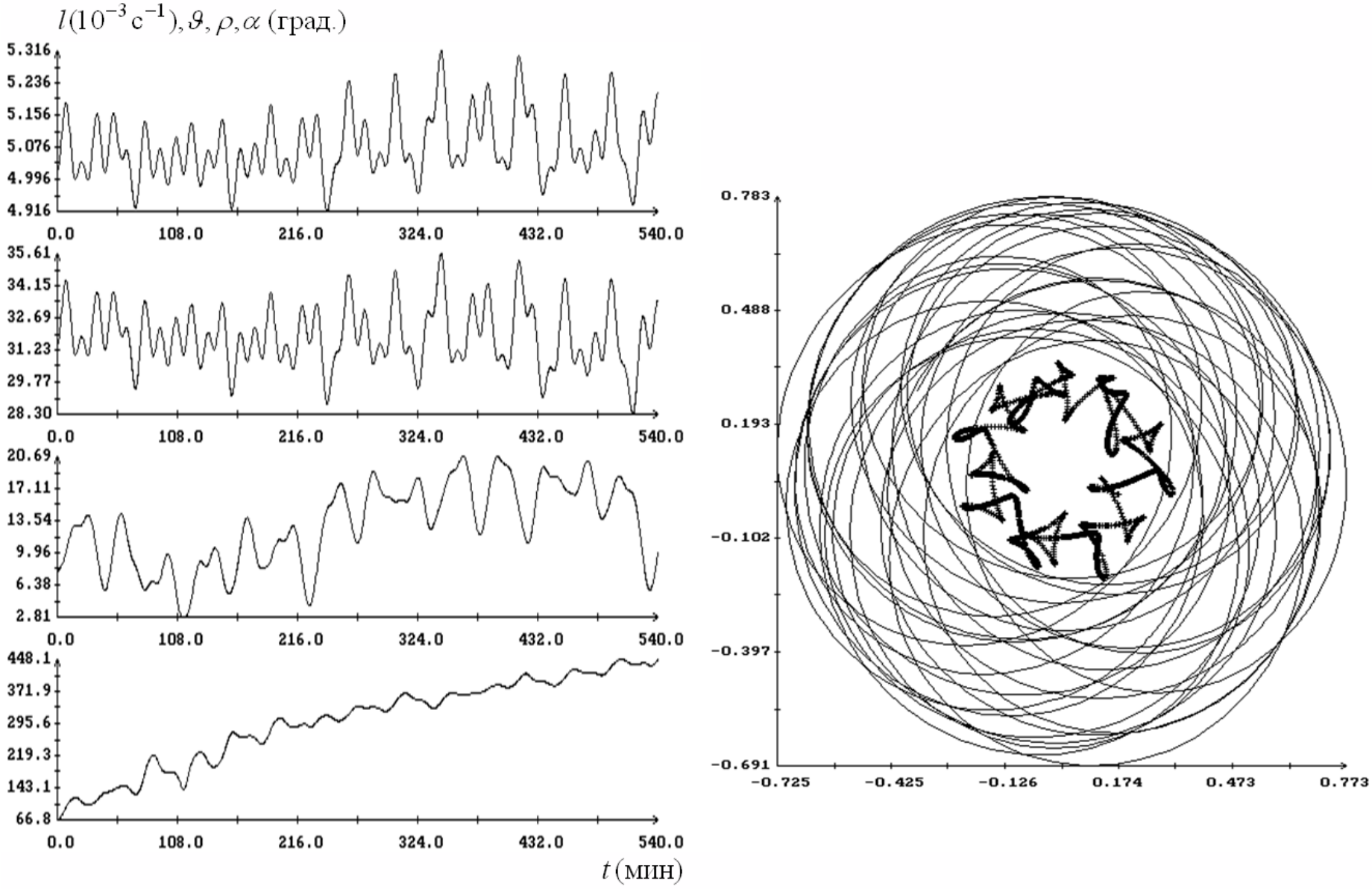


Рис. 21. Интервал 20. Момент $t = 0$ соответствует 19:56:17 UTC 20.09.1919.

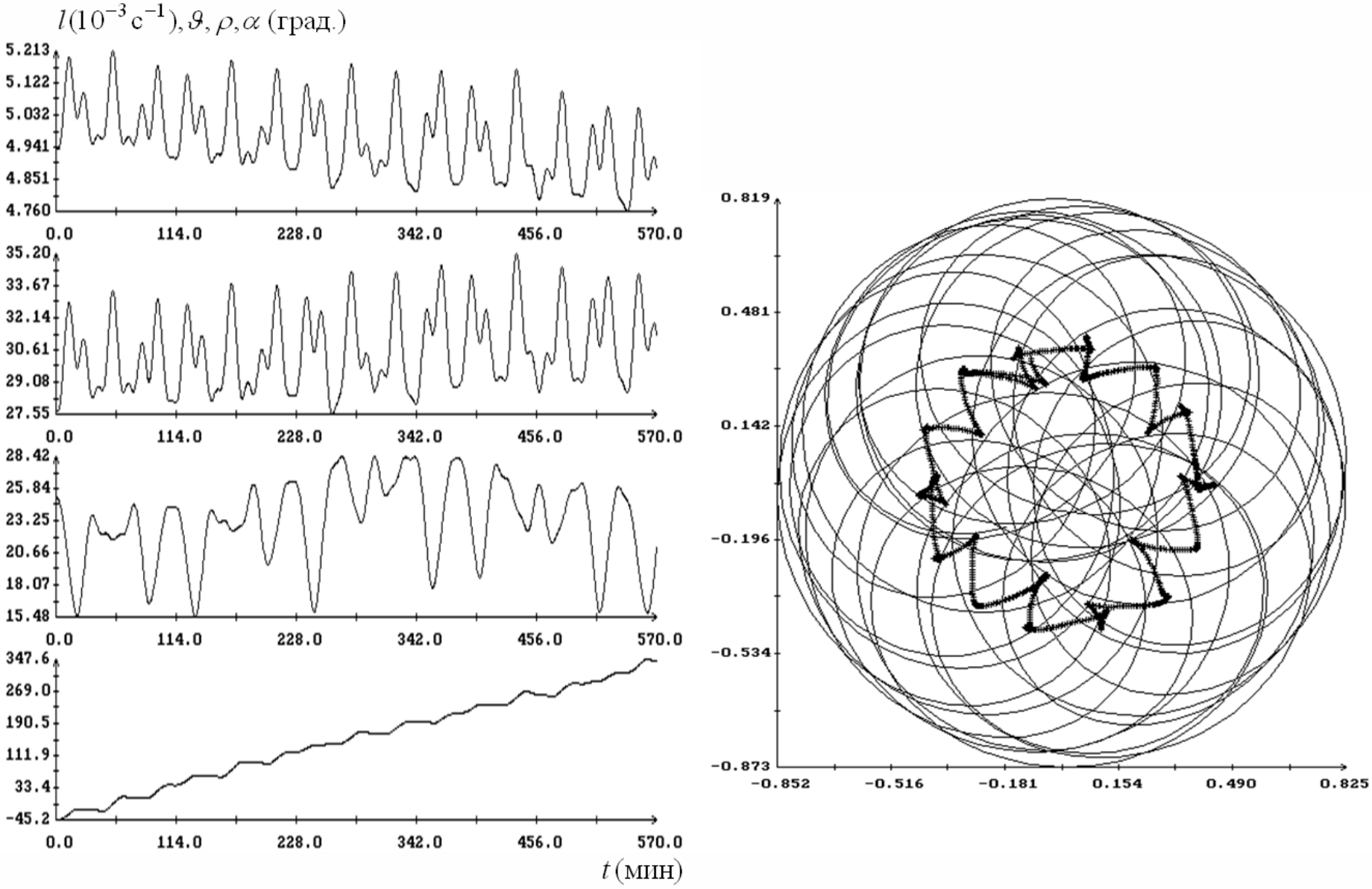


Рис. 22. Интервал 22. Момент $t = 0$ соответствует 21: 13:34 UTC 21.09.1999.

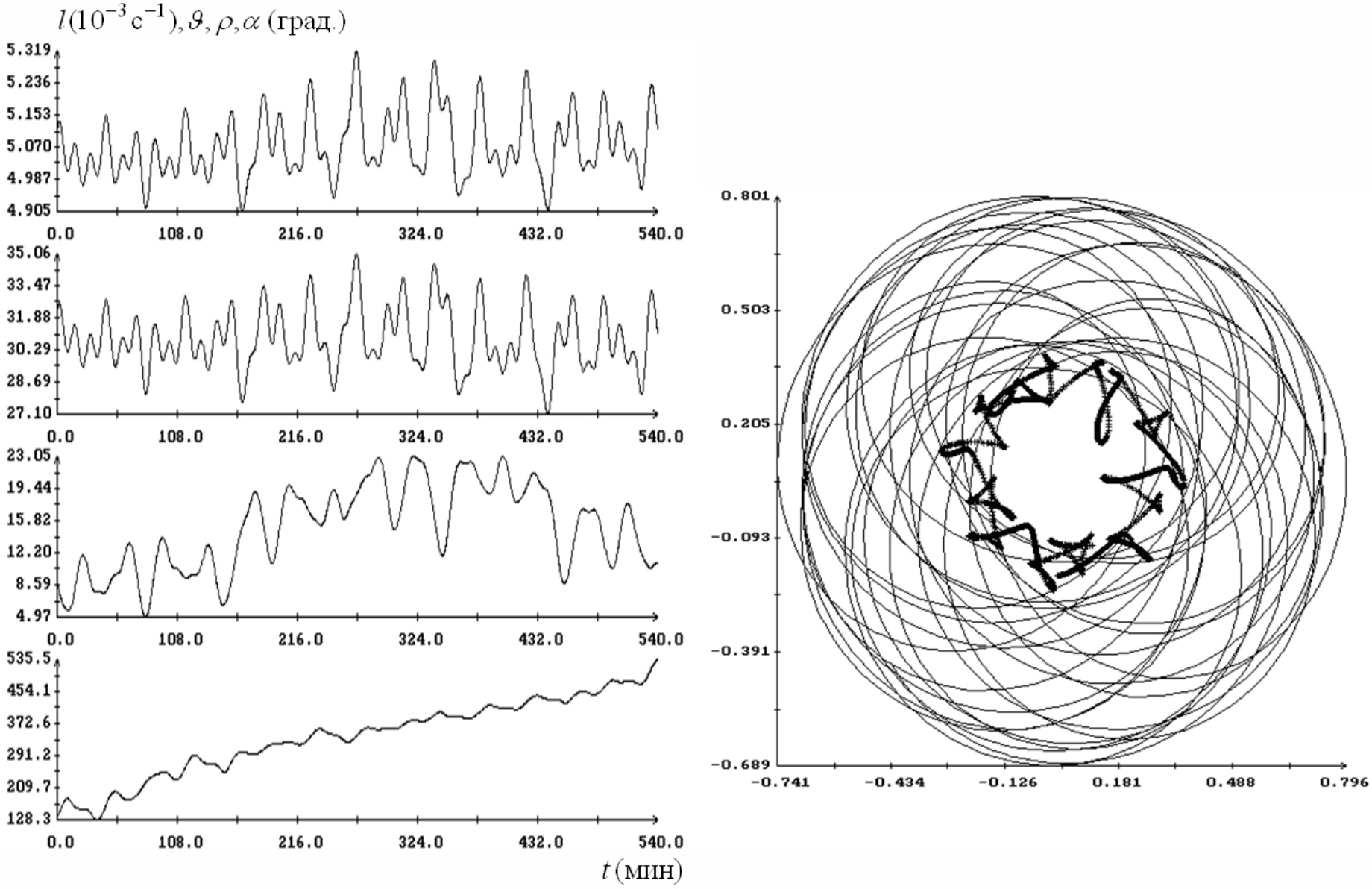


Рис. 23. Интервал 24. Момент $t = 0$ соответствует 22:54:54 UTC 22.09.1999.

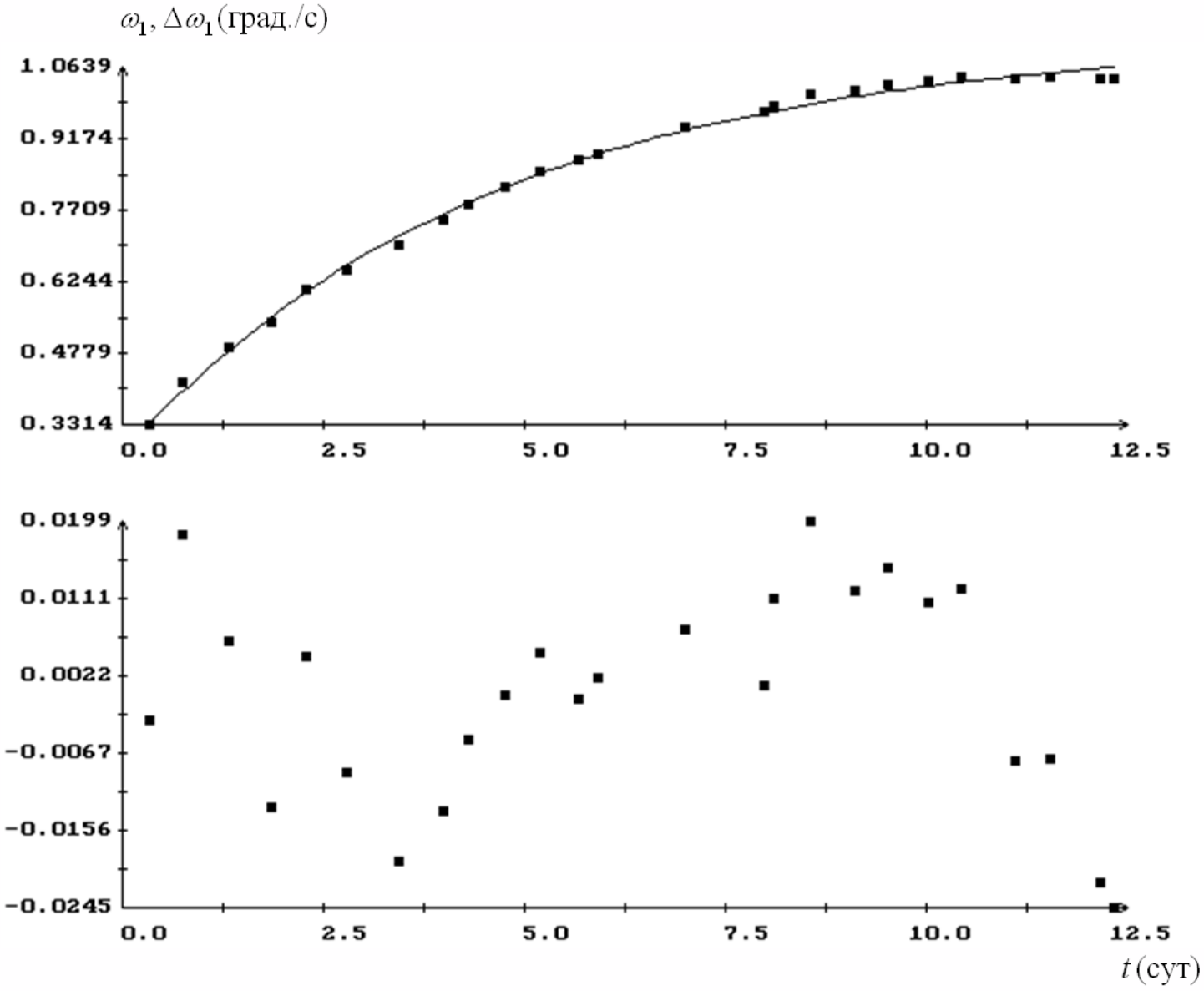


Рис. 24. Увеличение угловой скорости $\bar{\omega}_1$. Момент $t = 0$ соответствует 00:00:00 UTC 11.09.1999.

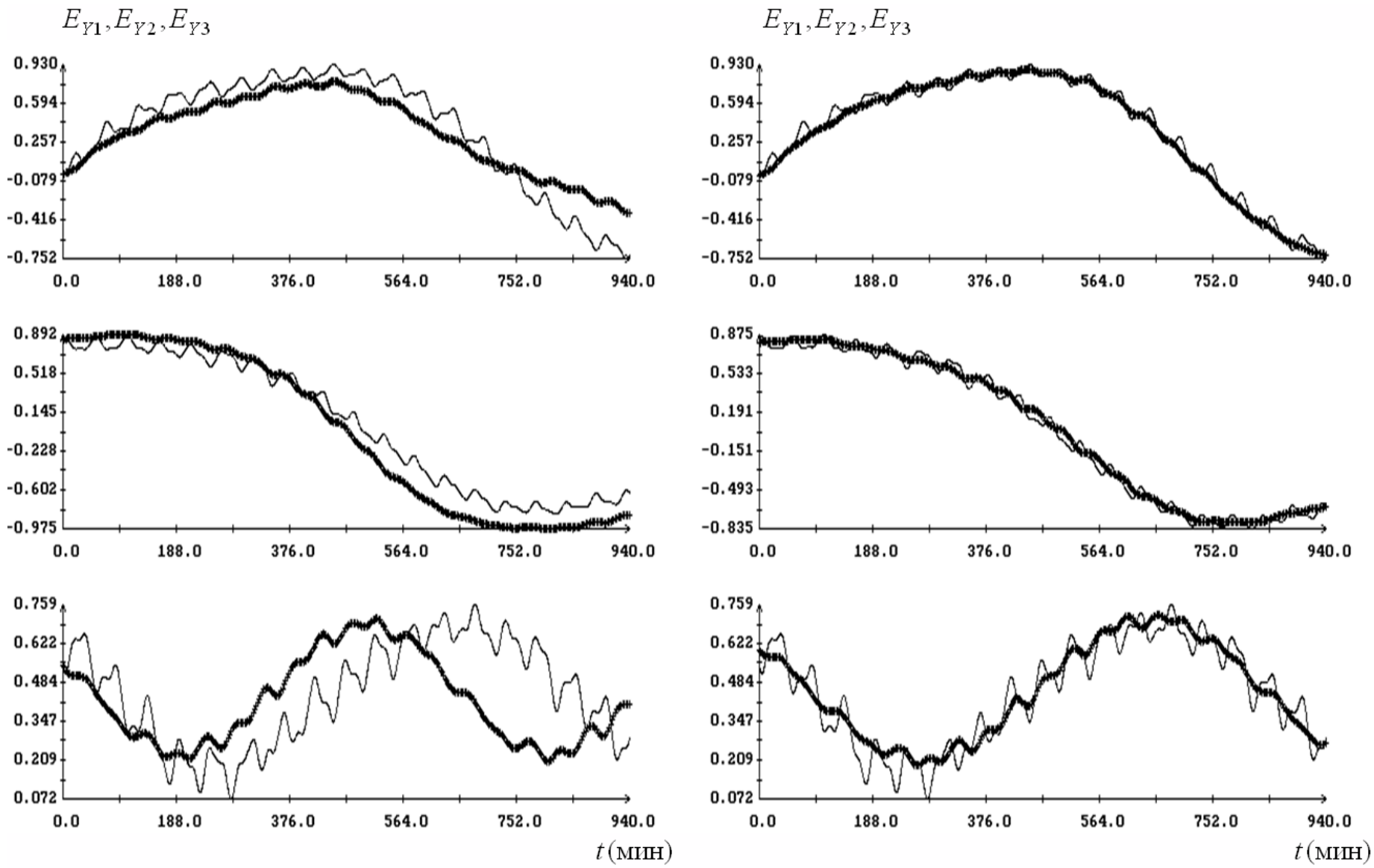


Рис.25. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999. Слева – до подгонки по $\omega_\perp$ и начальным условиям $E_{Y1}(0), E_{Y2}(0), E_{Y3}(0)$, справа – после подгонки.

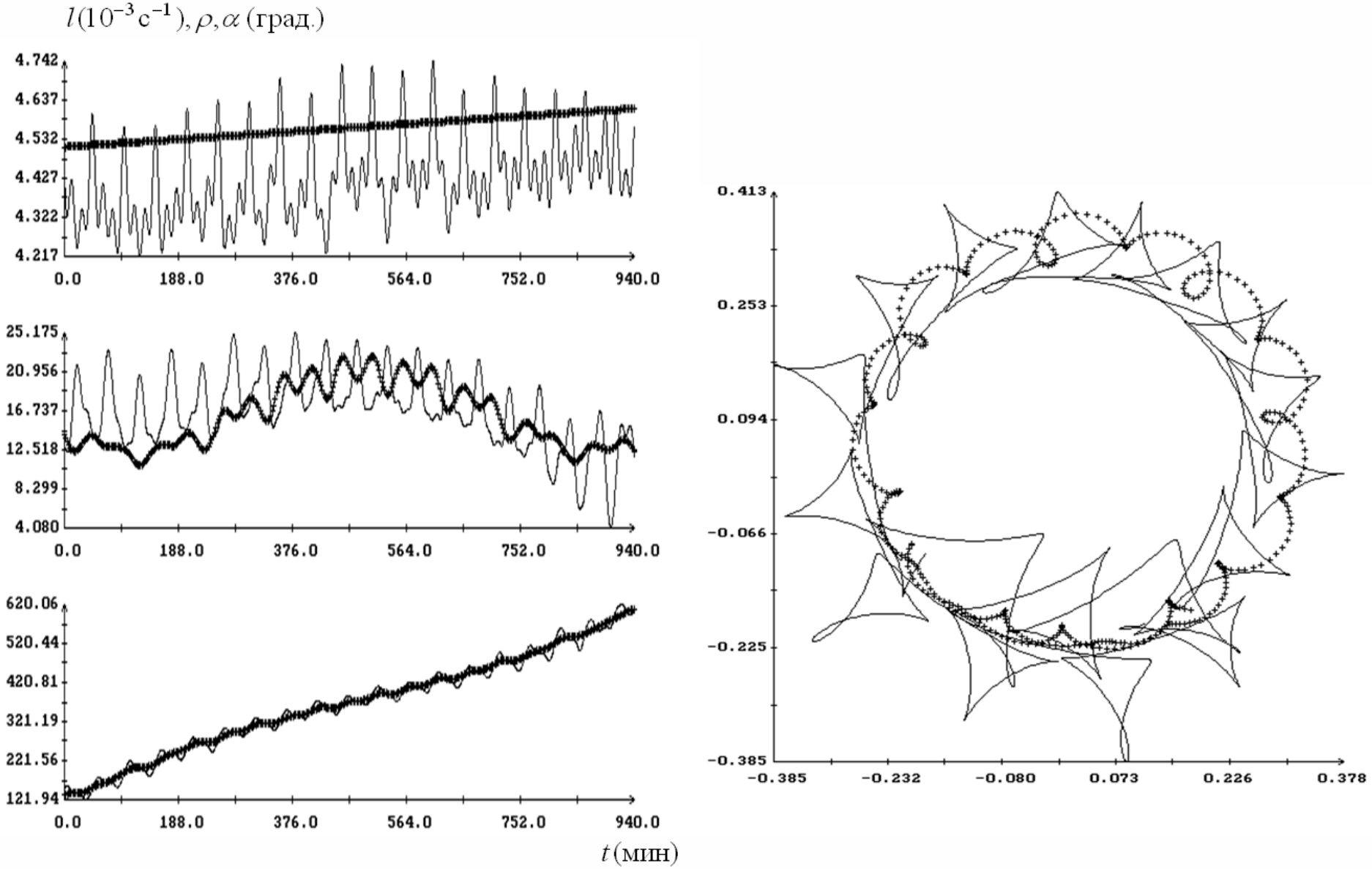


Рис. 26. Интервал 11. Момент $t = 0$ соответствует 23:40:47 UTC 15.09.1999.

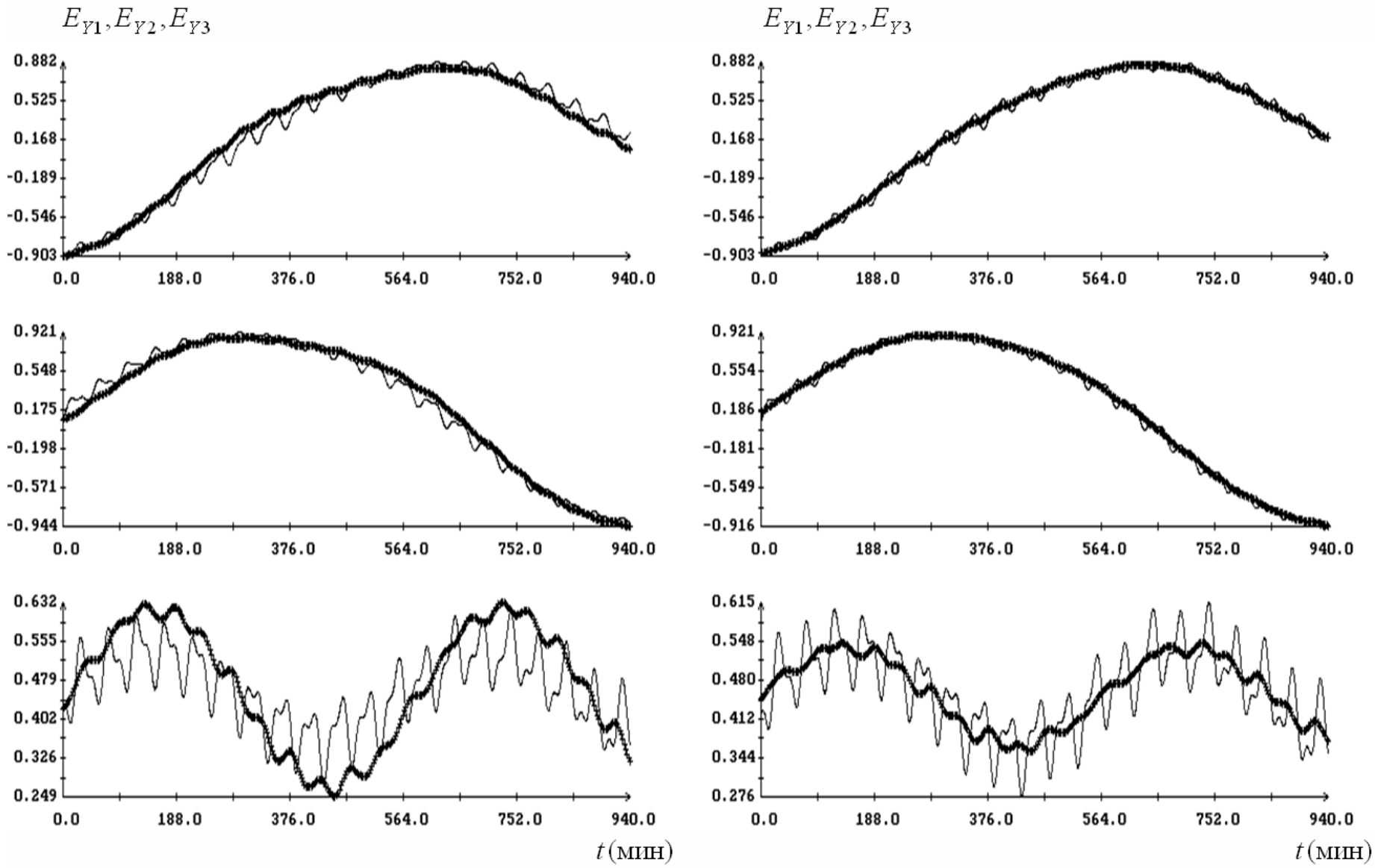
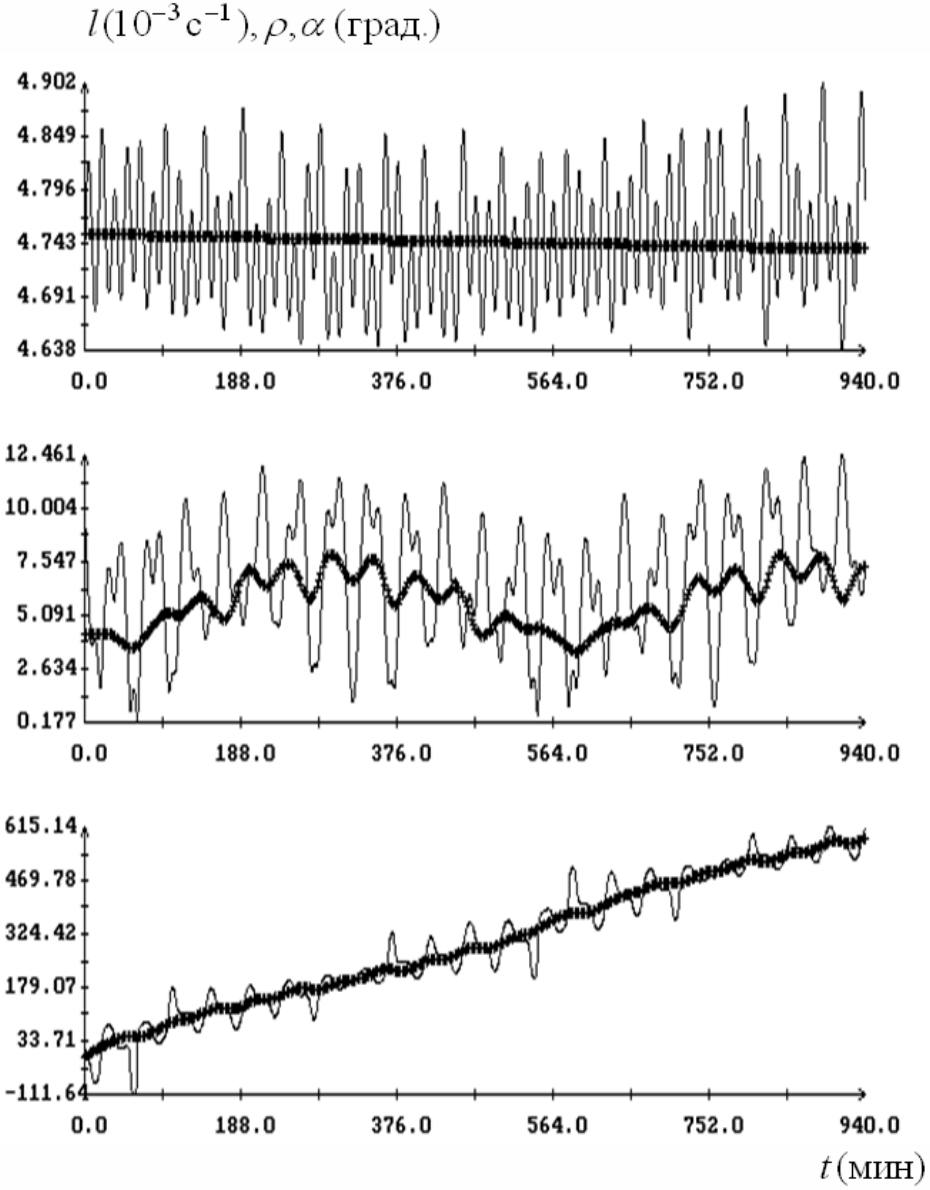


Рис. 27. Интервал 14. Момент $t = 0$ соответствует 19:05:14 UTC 17.09.1999. Слева – до подгонки по $\omega_\perp$ и начальным условиям $E_{Y1}(0), E_{Y2}(0), E_{Y3}(0)$, справа – после подгонки.



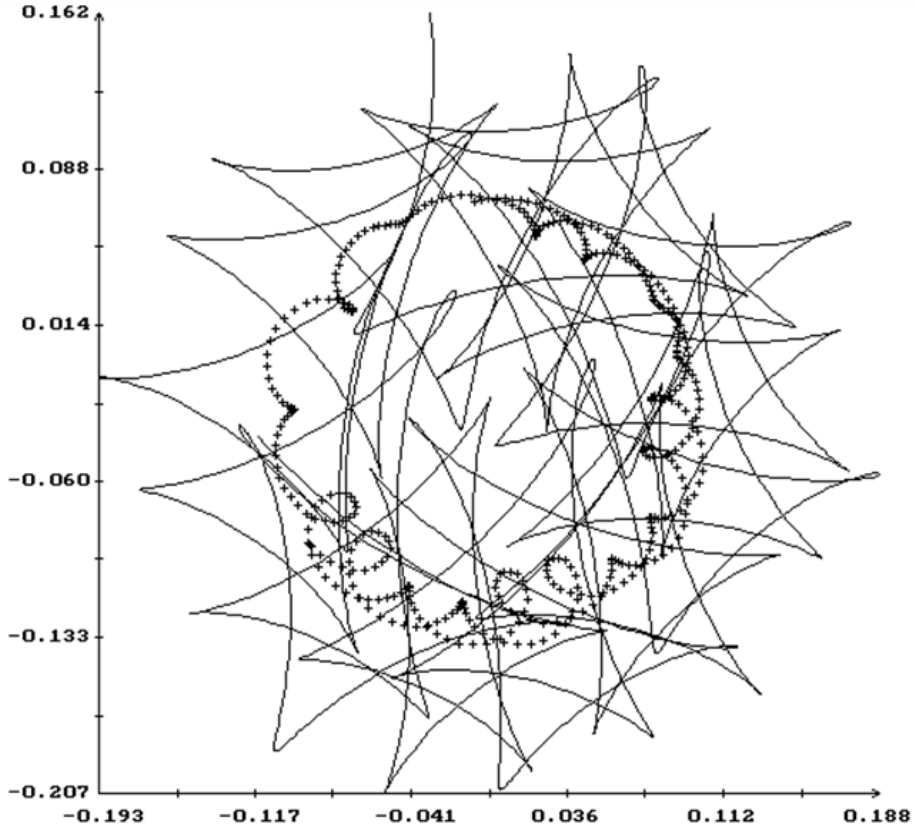


Рис. 28. Интервал 14. Момент $t = 0$ соответствует 19:05:14 UTC 17.09.1999.

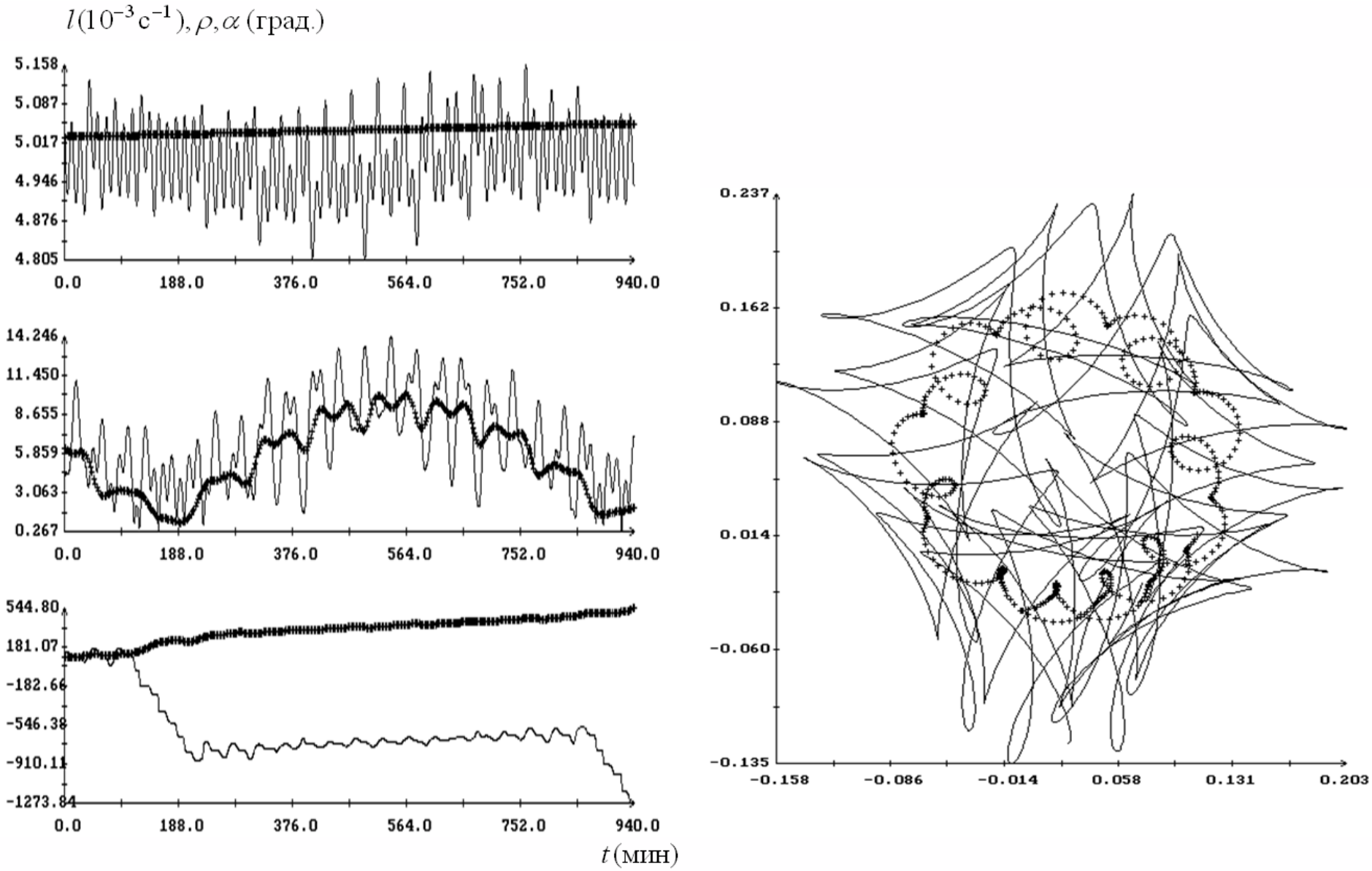
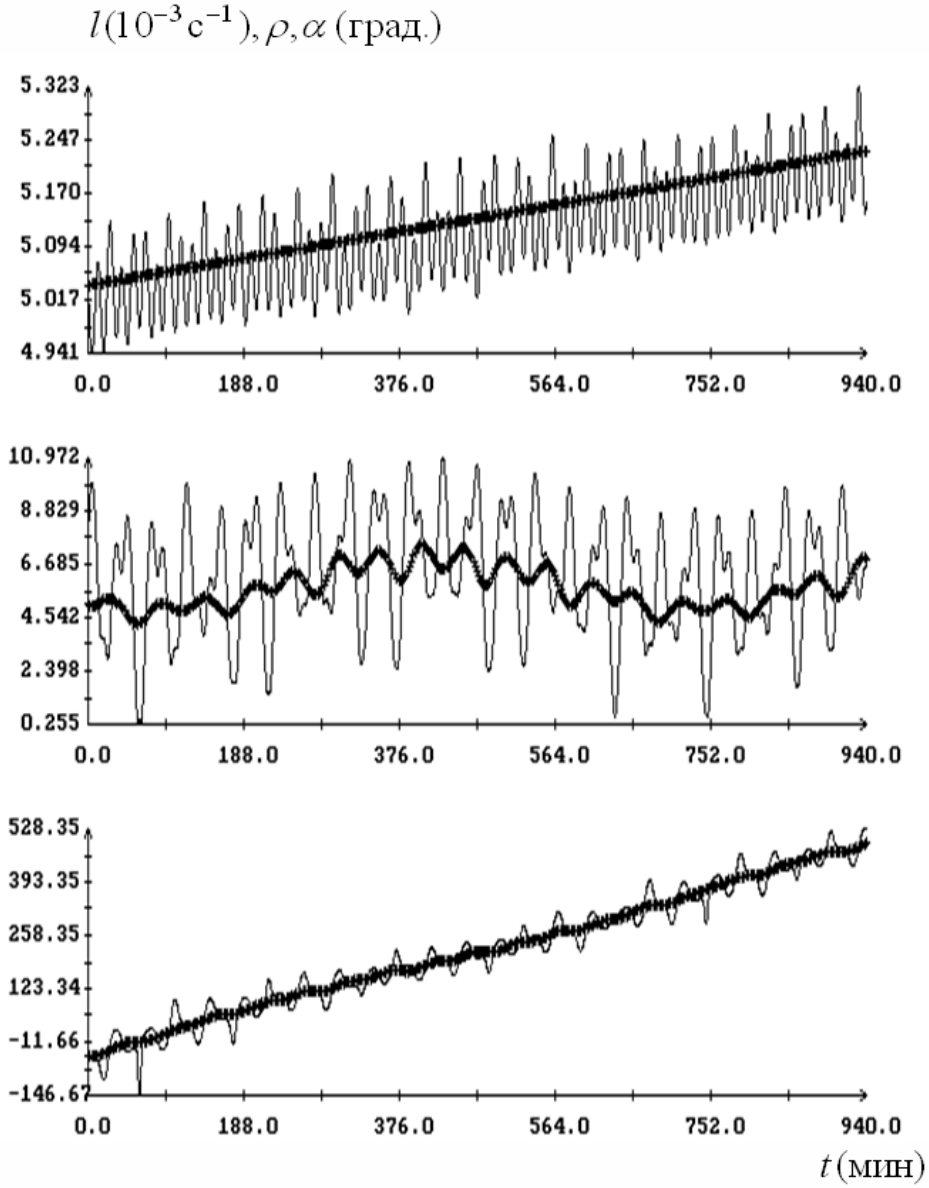


Рис. 29. Интервал 15. Момент $t = 0$ соответствует 18:33:07 UTC 18.09.1999.



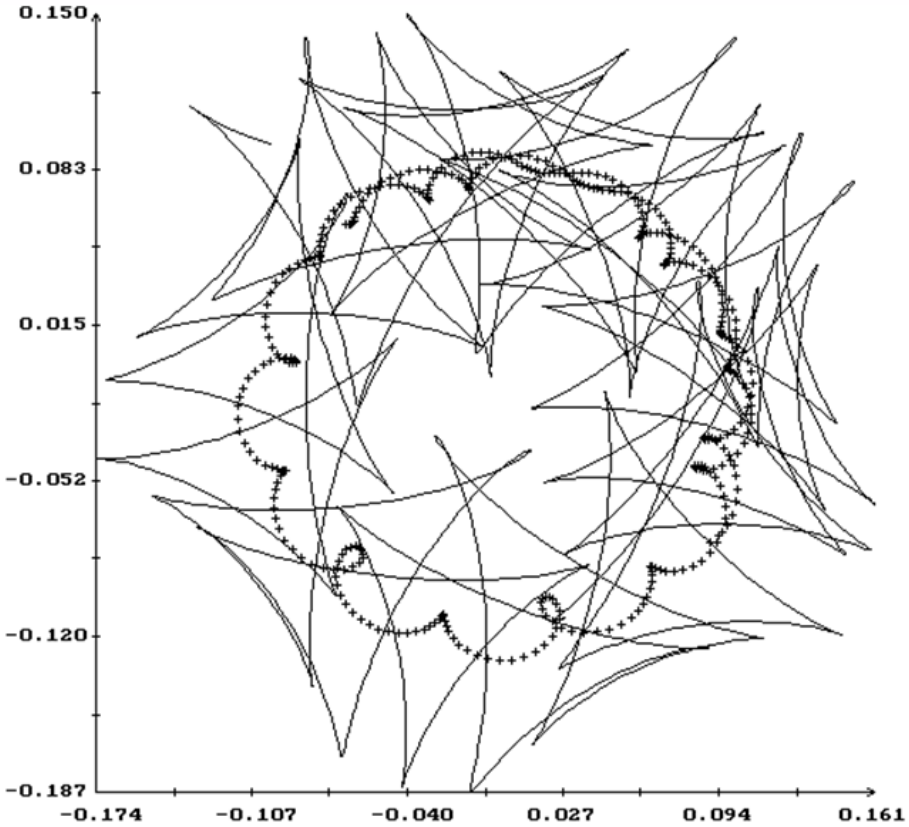
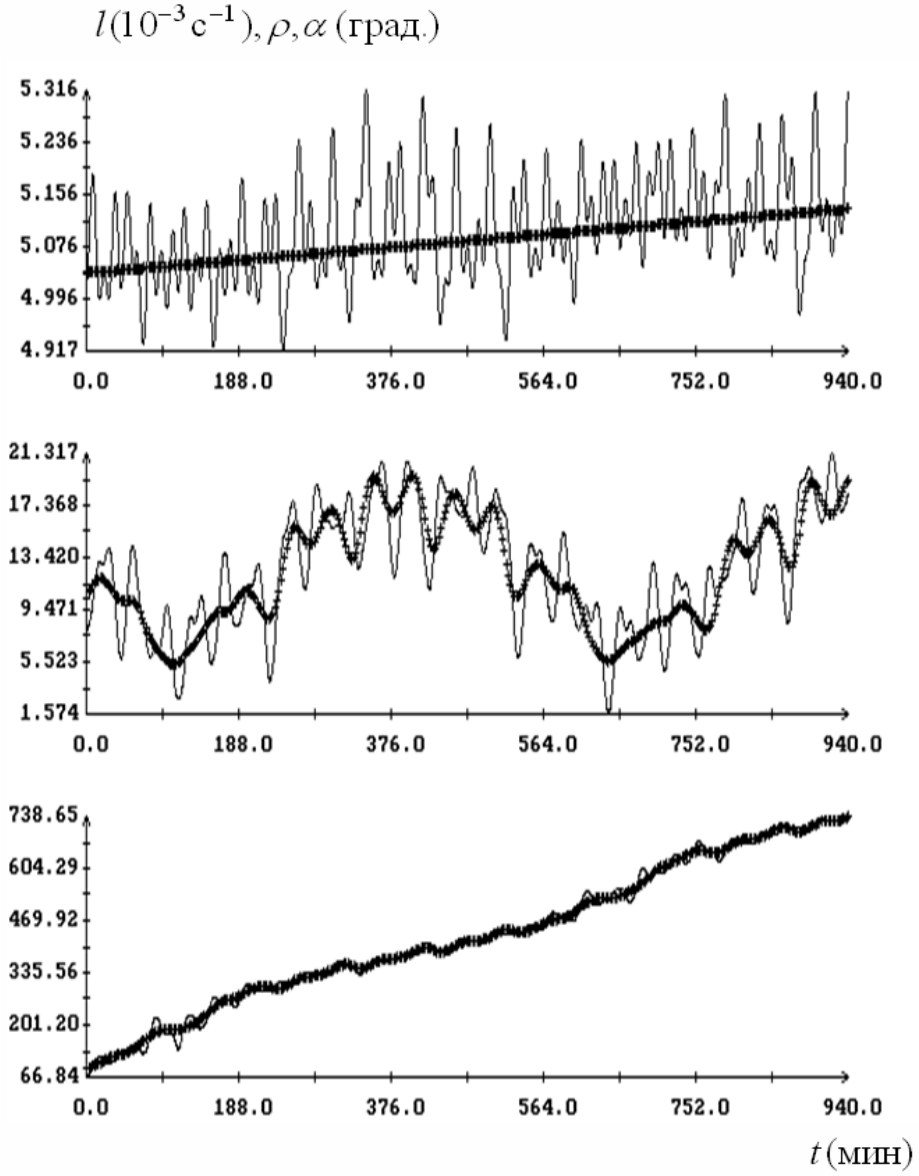


Рис. 30. Интервал 16. Момент $t = 0$ соответствует 21:54:51 UTC 18.09.1999.



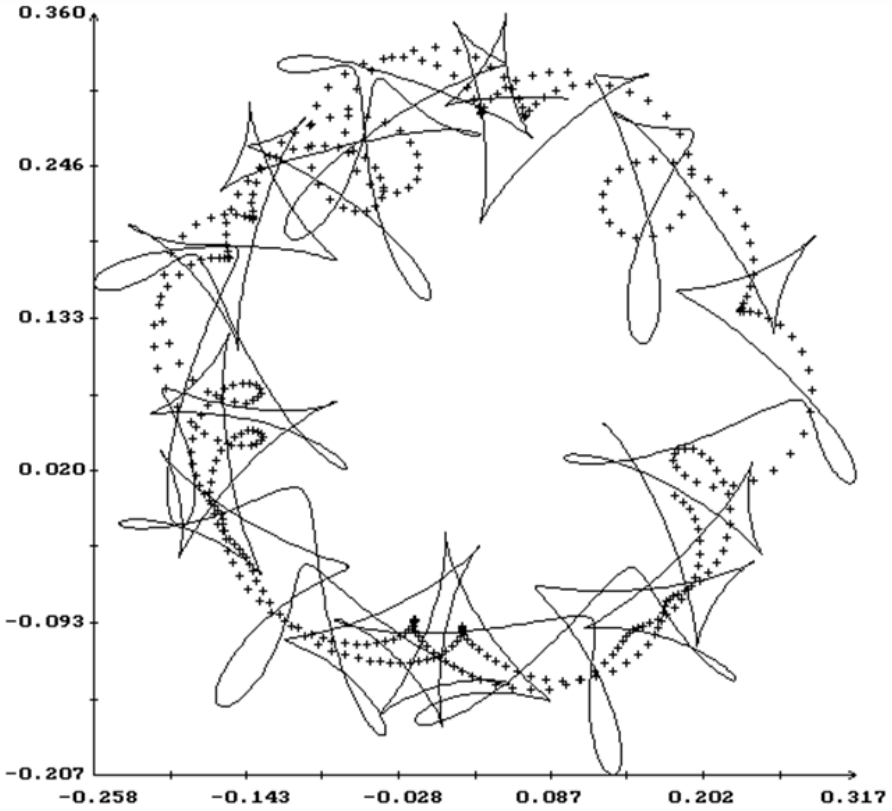


Рис. 31. Интервал 20. Момент $t = 0$ соответствует 19:56:17 UTC 20.09.1919.

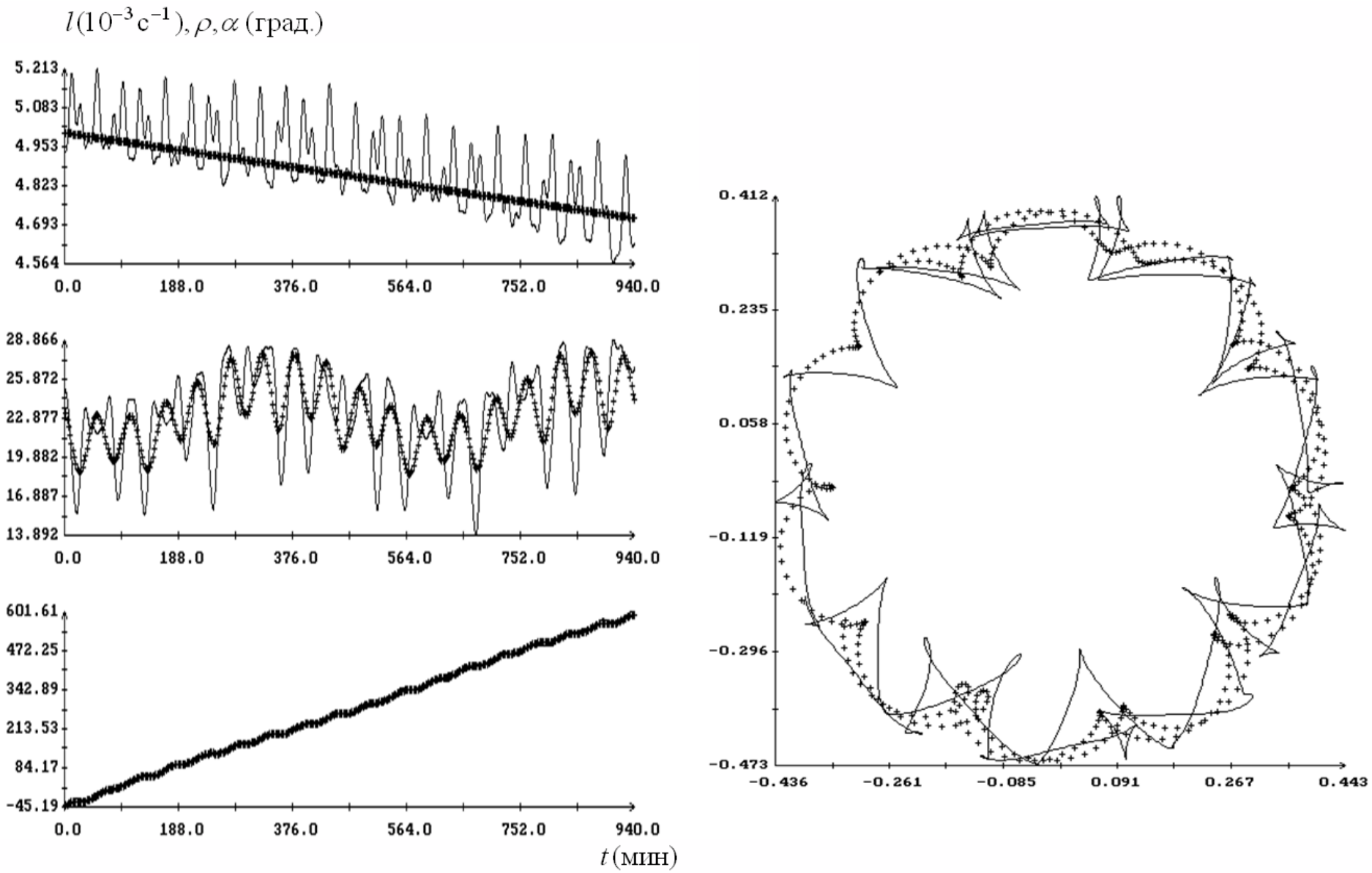


Рис. 32. Интервал 22. Момент $t = 0$ соответствует 21:13:34 UTC 21.09.1999.

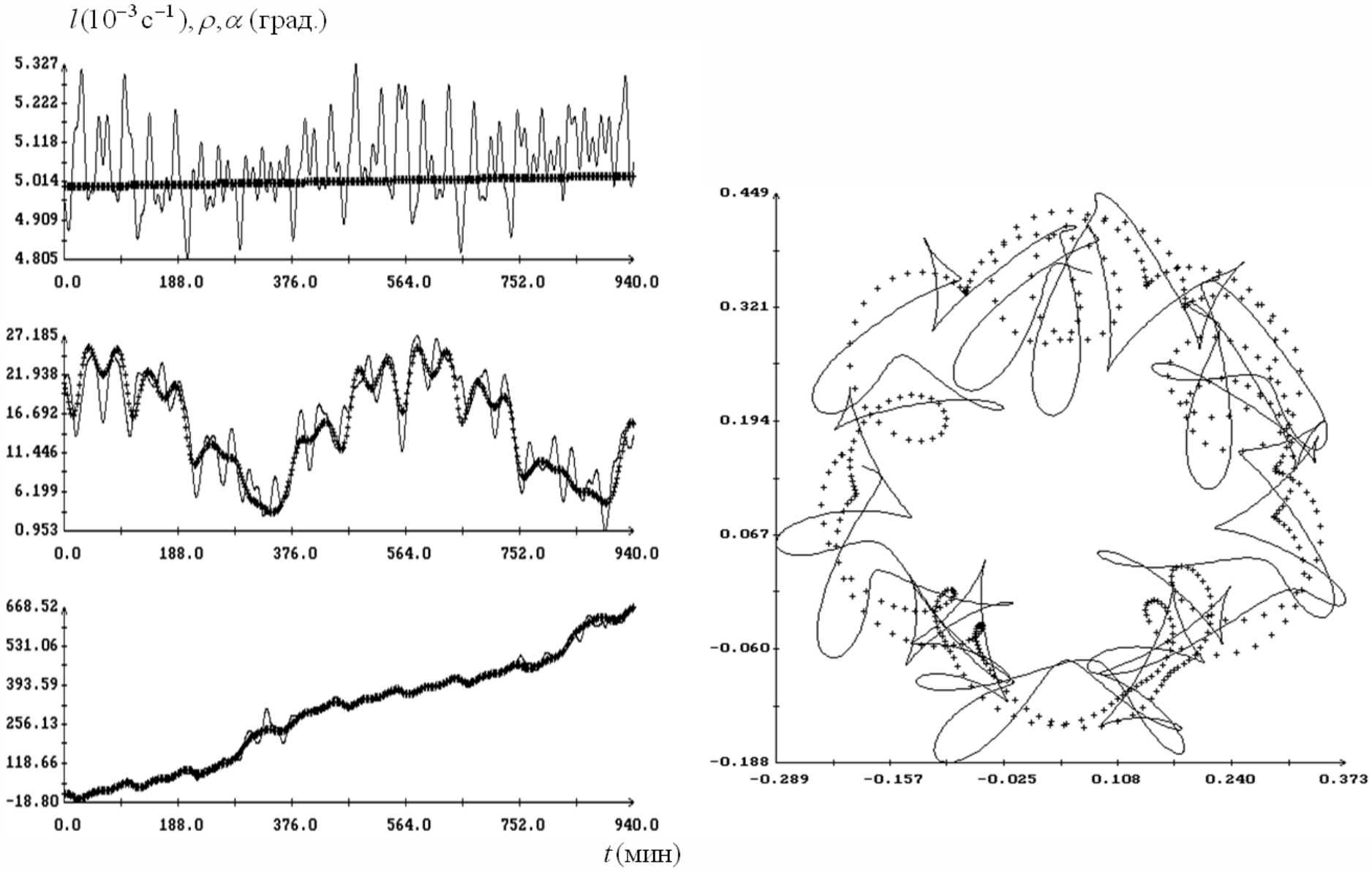


Рис. 33. Интервал 25. Момент $t = 0$ соответствует 02: 53:52 UTC 23.09.1999.