ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 28 за 2020 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф.

Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф. Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 28. 19 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2020-28
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-28

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.Ф. Голубев

Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления

Москва — 2020

Голубев Ю.Ф.

Автономная оптимизация колебаний систем с дефицитом управления

Рассмотрена склерономная лагранжева система с n степенями свободы, причем одна степень свободы неуправляема, а остальные управляются сервоприводами. Система находится в окрестности равновесия. Предложен критерий оптимальности управления амплитудой колебаний по неуправляемой степени свободы за счет сервоуправления другими степенями свободы. На примерах конкретных маятниковых систем продемонстрирована эффективность применения предложенного критерия.

Ключевые слова: лагранжева система, колебания, амплитуда, управление, оптимизация

Yury Filippovich Golubev

An Autonomous Optimization of Oscillations of Systems with a Control Deficit

A scleronomic Lagrangian system with n degrees of freedom is considered, with one degree of freedom being uncontrollable and the rest being controlled by servos. The system is located in the vicinity of equilibrium. A criterion for optimal control of the oscillation amplitude by an uncontrollable degree of freedom due to servo control by other degrees of freedom is proposed. Using examples of specific pendulum systems, the effectiveness of the proposed criterion is demonstrated.

Key words: Lagrangian system, oscillation, amplitude, control, optimization

Оглавление

Введение 3
1. Постановка задачи 4
2. Метод оптимизации 5
3. Управление амплитудой маятниковых систем 9
   3.1. Маятник переменной длины 9
   3.2. Т-образный маятник 10
   3.3. Т-маятник переменной длины 12
   3.4. Т-маятник переменной длины с подвижной точкой подвеса 14
Заключение 18
Библиографический список 18

Введение

Задачи управления колебательными системами представляют значительный интерес как с теоретической, так и с практической точек зрения. Явления резонансного возбуждения вынужденных колебаний и параметрического резонанса к настоящему времени в значительной мере изучены и широко используются в практических приложениях [1, 2]. Вместе с тем проблема построения оптимального управления для таких систем имеет существенные отличия от резонансных постановок и, как правило, ставится и исследуется в рамках принципа максимума Л.С. Понтрягина [3, 4]. Особое место занимают колебательные системы с дефицитом управления, когда система содержит степени свободы, для которых невозможно непосредственное управление, а их требуемое изменение достигается опосредованно, за счет подходящего управления по другим степеням свободы [5]. Примеры решения некоторых задач с дефицитом управления системами, находящимися в окрестности положения равновесия и содержащими одну неуправляемую степень свободы, можно найти в [6 – 10]. Как следует из указанных работ, системы могут быть весьма непростыми. На первоначальном этапе исследования таких систем представляется разумным выбрать координаты управляемых степеней свободы в качестве функций управления, считая, что их идеальная реализация возможна с использованием сервоприводов. Это позволяет уменьшить размерность задачи. Основная трудность применения принципа максимума в таком случае состоит в том, что координаты управляемых степеней свободы, как правило, входят в уравнения движения вместе со своими производными. Из-за этого перед исследователем, желающим упростить решение, получаемое с помощью формализма принципа максимума Понтрягина, возникает дилемма: либо искать решение в классе кусочно-постоянных управляющих координат, либо, если такой вариант неприемлем, попытаться осуществить поиск решения в классе кусочно-непрерывных обобщенных управляющих скоростей. В первом случае размерность задачи существенно уменьшается до размерности системы с числом неуправляемых степеней свободы, но класс функций управления может оказаться неоправданно узким. Во втором случае, очевидно, размерность фазового пространства уменьшается, но всего лишь на число управляемых координат системы, что может оказаться недостаточным для возможности полноценного исследования.

В предлагаемом препринте для решения задач оптимального управления колебаниями позиционных [2] систем с дефицитом управления по одной степени свободы развивается оригинальный метод оптимизации, формализм которого объединяет преимущества принципа максимума и подхода Д.Е. Охоцимского, Т.М. Энеева [11] к решению проблем оптимального управления. Метод позволяет получить решение в виде синтеза управления колебаниями в классе кусочно-непрерывных управляющих координат в зависимости от неуправляемой координаты. Управление колебаниями понимается в смысле увеличения или уменьшения амплитуды колебаний, которая служит критерием оптимальности.

1. Постановка задачи

Рассмотрим склерономную голономную механическую систему с кинетической энергией

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n+1}a_{ij}\dot{q}_i\dot{q}_j\,,\quad n\geq 1,$$

где q_i – обобщенные координаты системы, $\dot{q}_i$ – обобщенные скорости, а симметричная матрица (a_{ij}) зависит от координат и положительно определена. Уравнения движения системы представим в форме уравнений Лагранжа 2 рода

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i\,,\ i=\overline{1,n+1}, \tag{1.1}$$

в которых t – время, а позиционные обобщенные силы $Q_i=Q_i(q_1,\cdots q_{n+1})$ стационарны. Пользуясь произволом в нумерации обобщенных координат, выделим первую обобщенную координату, обозначив ее буквой x. Остальные координаты переобозначим: $u_i\triangleq q_{i+1}$, $i=\overline{1,n}$. Кинетическая энергия примет вид

$$T=\frac{1}{2}\left(a_{11}\dot{x}^2+2\dot{x}\sum_{i=1}^{n}a_{1,i+1}\dot{u}_i+\sum_{i,j=1}^{n}a_{i+1,j+1}\dot{u}_i\dot{u}_j\right).$$

В системе (1.1) выделим уравнение для координаты x:

$$\frac{d}{dt}\left(a_{11}\dot{x}+\sum_{i=1}^{n}a_{1,i+1}\dot{u}_i\right)-\frac{\partial T}{\partial x}=F(x,u)\,, \tag{1.2}$$

где $\mathbf{u}=(u_1,...,u_n)\in R^n$. На участке монотонного изменения координаты x возьмем ее в качестве независимой переменной. Тогда уравнение (1.2) примет вид

$$\dot{x}\frac{d}{dx}\left[f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\dot{x}\right]-g(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\dot{x}^2=F(x,\mathbf{u})\,, \tag{1.3}$$

где $\mathbf{u}'=d\mathbf{u}/dx$ и

$$f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')=a_{11}+\sum_{i=1}^{n}a_{1,i+1}u_i'\,,\quad g(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{11}}{\partial x}+2\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial a_{1,i+1}}{\partial x}u_i'+\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial a_{i+1,j+1}}{\partial x}u_i'u_j'\right).$$

Пусть вектор-функция $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x)$ задана и её компоненты удовлетворяют ограничениям

$$\left|u_i^m\leq u_i(x)\leq u_i^M\right|,\quad i=\overline{1,n}. \tag{1.4}$$

Эту вектор-функцию можно рассматривать как сервосвязь, наложенную на систему. Обобщенные силы $Q_2,...,Q_{n+1}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы реализовалась заданная вектор-функция $\mathbf{u}(x)$. Будем считать, что это возможно сделать при выполнении ограничений (1.4), и напишем уравнение

$$\int_{x_0}^{x}\lambda\left\{F(x,\mathbf{u})+g(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\dot{x}^2-\dot{x}\frac{d}{dx}\left[f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\dot{x}\right]\right\}dx=0\,, \tag{1.5}$$

где $\lambda(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')$ – произвольная функция. Уравнение (1.5) есть непосредственное следствие уравнения (1.3). Заметим, что уравнение (1.3) допускает интегрирующий множитель [2]. Выберем его в качестве функции λ:

$$\lambda = f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{g(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')}{f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')}dx\right). \qquad (1.6)$$

Тогда уравнение (1.5) преобразуется к виду

$$\int_{x_0}^{x}\lambda F(x,\mathbf{u})dx - \frac{1}{2}\left[\dot{x}^2 f(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\lambda(x,\mathbf{u},\mathbf{u}')\right]\Big|_{x_0}^{x} = 0. \qquad (1.7)$$

Будем предполагать, что силовая функция

$$U(x,\mathbf{u}(\cdot)) = \int_{x_0}^{x}\lambda F(\tau,\mathbf{u}(\tau))d\tau$$

при фиксированной вектор-функции $\mathbf{u}(\tau)$ имеет изолированный максимум по координате x, который остается изолированным при изменении $\mathbf{u}(\tau)$, и будем рассматривать движение в окрестности этого максимума. Пусть начальные условия выбраны так, что при $x = x_0$ выполняется $\dot{x}_0 = 0$. Обозначим размах колебаний буквой $J = |x_1 - x_0|$, где x_1 – значение координаты x, при котором $\dot{x}$ снова обращается в нуль. В таком случае аргумент изолированного максимума силовой функции $U(x,\mathbf{u}(\cdot))$, изменяясь, вообще говоря, в зависимости от выбранной вектор-функции $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau)$, будет принадлежать отрезку $[x_0, x_1]$. Пусть на концах этого отрезка при любом $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\tau)$ подынтегральная функция $\phi = \lambda F(\tau,\mathbf{u}(\tau))$ отлична от нуля. Тогда на концах отрезка $[x_0, x_1]$ она должна иметь разные знаки:

$$\phi(x_0,\mathbf{u}(x_0),\mathbf{u}'(x_0))\cdot\phi(x_1,\mathbf{u}(x_1),\mathbf{u}'(x_1)) < 0. \qquad (1.8)$$

Кроме того, должно быть выполнено соотношение

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0. \qquad (1.9)$$

Требуется найти кусочно-непрерывное управление $\mathbf{u}(\tau)$, при котором значение функционала J максимально.

2. Метод оптимизации

Следуя [2, 11], найдем первую вариацию уравнения (1.7) по управлению $\mathbf{u}(x)$ при условии (1.9). Для решения $\dot{x}(x)$ уравнения (1.3) член в фигурных скобках уравнения (1.5) обращается в тождественный нуль. В связи с этим при вычислении первой вариации левой части уравнения (1.7) множитель λ варьировать не следует. При варьировании: $\mathbf{u}(\tau) \Rightarrow \mathbf{u}_0(\tau) + \delta\mathbf{u}(\tau)$, $x_0 \Rightarrow x_0 + \delta x_0$, $x_1 \Rightarrow x_1 + \delta x_1$, и вариация уравнения (1.7) с учетом (1.9) принимает вид:

$$\int_{x_0}^{x_1} \lambda \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial u_i} \delta u_i(\tau) d\tau + \phi(x, \mathbf{u}(x), \mathbf{u}'(x)) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} = 0. \qquad (2.1)$$

Следствие°1. Пусть $\delta u(\tau) \equiv 0$, тогда система будет совершать колебания около фиксированного положения равновесия между точками x_0 и x_1, а размах колебаний регулируется заданием начальной точки. Из (2.1) получим

$$\phi(x_1, \mathbf{u}_0(x_1), \mathbf{u}_0'(x_1)) \delta x_1 = \phi(x_0, \mathbf{u}_0(x_0), \mathbf{u}_0'(x_0)) \delta x_0. \qquad (2.2)$$

Отсюда с учетом неравенства (1.8) найдем: $\delta x_0 \delta x_1 \le 0$. Это означает, что при сдвиге какой-либо концевой точки отрезка $[x_0, x_1]$ другая концевая точка этого отрезка обязана сдвинуться в противоположном направлении. Тем самым неизбежно изменяется размах $J = |x_1 - x_0|$ колебаний.

Следствие°2. Пусть $\partial F / \partial \mathbf{u} \equiv 0$ для $\forall \tau \in [x_0, x_1]$ и $\forall \mathbf{u}$, удовлетворяющего ограничениям (1.4). Тогда раскачивание системы по координате x невозможно, даже если левая часть уравнения (1.3) зависит от вектор-функций $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$.

Следствие°3. Пусть $x_1 > x_0$, $\delta x_0 = 0$, $\delta \mathbf{u}(\tau) \ne 0$. Тогда из равенства (2.1) следует

$$\delta x_1 = \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\tau) \delta u_i(\tau) d\tau,$$
$$\Phi_i(\tau) = \frac{\Theta_i(\tau)}{\phi(x_1, \mathbf{u}_0(x_1), \mathbf{u}_0'(x_1))}, \quad \Theta_i(\tau) = -\lambda(\tau, \mathbf{u}_0, \mathbf{u}_0') \frac{\partial F(\tau, \mathbf{u}_0)}{\partial u_i}. \qquad (2.3)$$

Ясно, что если $\Phi_i(\tau) \equiv 0$, то параметр u_i не влияет на колебания системы. В дальнейшем предполагается, что $\exists i : \Phi_i(\tau) \ne 0$. Для того чтобы увеличить координату x_1, достаточно принять

$$\delta u_i(\tau) = \Delta u_i(\tau) = \varepsilon\, \Phi_i(\tau), \quad \varepsilon > 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

В том случае, когда ограничения (1.4) позволяют это сделать, из (2.3) получим

$$\delta x_1 = \varepsilon \int_{x_0}^{x_1} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^2(\tau) d\tau > 0.$$

Другими словами, если, отправляясь от точки x_0, принять $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau)$, получив координату x_1, а затем, снова отправляясь от точки x_0, принять $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau) + \Delta \mathbf{u}(\tau)$, где ε – достаточно мало, то координата x_1 увеличится:

$$x_1^{(1)} = x_1 + \delta x_1 > x_1.$$

Если ограничения (1.4) не позволяют нужным образом изменить какую-нибудь компоненту u_i, тогда на том интервале изменения переменной τ, где такое случилось, следует принять $\Delta u_i(\tau) = 0$. Если неравенства (1.4) запрещают должным образом проварьировать все компоненты вектор функции $\mathbf{u}_0(\tau)$ на

всем отрезке $[x_0, x_1]$, то это означает, что функция $\mathbf{u}_0(\tau)$ является аргументом граничного максимума.

Следствие°4

Пусть при $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau)$ колебания выполнялись на отрезке $[x_0, x_1]$. Выбрав теперь $\mathbf{u}(\tau) = \mathbf{u}_1(\tau) = \mathbf{u}_0(\tau) + \Delta\mathbf{u}(\tau)$, получим новую точку $x_1^{(1)} > x_1$, и при новом $\mathbf{u}(\tau)$ колебания должны происходить на отрезке $[x_0, x_1^{(1)}]$ с увеличенной амплитудой. Рассмотрим обратное движение от точки $x_1^{(1)}$ к точке x_0. Тогда формулы (2.3) перепишутся следующим образом

$$\delta x_0 = \int_{x_0}^{x_1^{(1)}} \sum_{i=1}^{n} \Phi_i(\tau)\delta u_i(\tau)d\tau,$$

$$\Phi_i(\tau) = \frac{\Theta_i(\tau)}{\phi(x_0, \mathbf{u}_1(x_0), \mathbf{u}_1'(x_0))}, \quad \Theta_i(\tau) = \lambda(\tau, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1')\frac{\partial F(\tau, \mathbf{u}_1)}{\partial u_i}. \tag{2.4}$$

Если теперь положить

$$\delta\mathbf{u}(\tau) = \Delta^{(1)}\mathbf{u}(\tau) = -\varepsilon\ \Phi(\tau), \quad \varepsilon > 0,$$

то получим

$$\delta x_0 = -\varepsilon \int_{x_0}^{x_1^{(1)}} \Phi^2(\tau)d\tau < 0.$$

Другими словами, окажется, что $x_0^{(1)} = x_0 + \delta x_0 < x_0$. В итоге имеем

$$J^{(0)} = | x_1 - x_0 | < J^{(1)} = | x_1^{(1)} - x_0^{(1)} |.$$

Отправляясь от новой точки $x_0^{(1)}$ и выполнив указанные в следствиях 3, 4 операции, получим точки $x_0^{(2)} < x_0^{(1)}$ и $x_1^{(2)} > x_1^{(1)}$ и т.д. В итоге имеем монотонно возрастающую последовательность размахов колебаний

$$J^{(0)} < J^{(1)} < J^{(2)} < \ldots$$

Описанная процедура раскачивания системы доказывает лишь принципиальную возможность постепенного увеличения амплитуды качаний и не претендует на оптимальность. В случае необходимости её легко улучшить с помощью тех же формул (2.3), (2.4), найдя минимум (максимум) приращения начальной (конечной) координаты. В итоге имеем:

Теорема°1. (**Принцип наилучшего раскачивания**). Предположим, что существуют две точки x_0 и x_1, причем $x_0 < x_1$ и $\dot{x}_0 = \dot{x}_1 = 0$. Кроме того, пусть $\phi(x_0, \mathbf{u}(x_0), \mathbf{u}'(x_0)) > 0$ и $\phi(x_1, \mathbf{u}(x_1), \mathbf{u}'(x_1)) < 0$. Тогда

I. Необходимым условием оптимальности управления $\mathbf{u} = \mathbf{u}_M(\tau)$, удовлетворяющего ограничениям (1.4) и обеспечивающего максимум значения $x = x_1 > x_0$, при котором $\dot{x}_1 = 0$, будет уравнение

$$\mathbf{u}_M(\tau) = \arg\max_{\mathbf{u}} \left[\lambda(\tau, \mathbf{u}_M, \mathbf{u}_M')F(\tau, \mathbf{u})\right], \tag{2.5}$$

где λ вычисляется по формуле (1.6).

II. Необходимым условием оптимальности управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}_m(\tau)$, удовлетворяющего ограничениям (1.4) и обеспечивающего минимум значения $x=x_0<x_1$, при котором $\dot{x}_0=0$, будет уравнение

$$\mathbf{u}_m(\tau)=\arg\min_{\mathbf{u}}\left[\lambda(\tau,\mathbf{u}_m,\mathbf{u}'_m)F(\tau,\mathbf{u})\right], \tag{2.6}$$

где λ определено формулой (1.6).

Доказательство. Рассмотрим утверждение I. Здесь начальной точкой служит $x=x_0$, которая не варьируется. Функционалом служит значение x_1, и требуется найти его максимум. Поэтому можно воспользоваться формулами следствия 3. В них $\phi(x_1,\mathbf{u}(x_1),\mathbf{u}'(x_1))<0$. Значит, знак градиента x_1 по компоненте $u_i(\tau)$ вектор-функции $\mathbf{u}(\tau)$ противоположен знаку функции $\Theta_i(\tau)$, которая, в свою очередь, есть частная производная функции $\left[-\lambda F(\tau,\mathbf{u}(\tau))\right]$ при условии, что λ не зависит от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$. Следовательно, знак градиента x_1 по компоненте $u_i(\tau)$ совпадает со знаком частной производной от функции $\lambda F(\tau,\mathbf{u}(\tau))$. При фиксированных значениях τ и u_i увеличение функционала x_1 невозможно лишь в двух случаях: либо когда функция достигла максимума по компоненте u_i внутри области (1.4), либо на границе этой области. В этом состоит смысл уравнения (2.5), что и доказывает утверждение I.

Рассмотрим утверждение II. Здесь начальной точкой служит $x=x_1>x_0$, а функционалом служит значение x_0 и требуется найти его минимум. Поэтому целесообразно воспользоваться формулами следствия 4. В них $\phi(x_0,\mathbf{u}(x_0),\mathbf{u}'(x_0))>0$. Следовательно, знак градиента x_0 по компоненте $u_i(\tau)$ вектор-функции $\mathbf{u}(\tau)$ совпадает со знаком функции $\Theta_i(\tau)$, которая представляет собой частную производную функции $\lambda F(\tau,\mathbf{u}(\tau))$ при условии, что λ не зависит от $\mathbf{u}$ и $\mathbf{u}'$. При фиксированном значении τ уменьшение функционала x_0 невозможно лишь в двух случаях: либо когда функция достигла минимума по компоненте u_i внутри области (1.4), либо на границе этой области. В этом состоит смысл уравнения (2.6), что и доказывает утверждение II.

Теорема°2. (**Принцип наилучшего успокоения колебаний**). Предположим, что существуют две точки x_0 и x_1, причем $x_0<x_1$ и $\dot{x}_0=\dot{x}_1=0$. Кроме того, пусть $\phi(x_0,\mathbf{u}(x_0),\mathbf{u}'(x_0))>0$ и $\phi(x_1,\mathbf{u}(x_1),\mathbf{u}'(x_1))<0$. Тогда

I. Необходимым условием оптимальности управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}_M(\tau)$, удовлетворяющего ограничениям (1.4) и обеспечивающего минимум значения $x=x_1>x_0$, при котором $\dot{x}_1=0$, будет уравнение

$$\mathbf{u}_M(\tau)=\arg\min_{\mathbf{u}}\left[\lambda(\tau,\mathbf{u}_M,\mathbf{u}'_M)F(\tau,\mathbf{u})\right], \tag{2.7}$$

где λ вычисляется по формуле (1.6).

II. Необходимым условием оптимальности управления $\mathbf{u}=\mathbf{u}_m(\tau)$, удовлетворяющего ограничениям (1.4) и обеспечивающего максимум значения $x=x_0<x_1$, при котором $\dot{x}_0=0$, будет уравнение

$$\mathbf{u}_m(\tau)=\arg\max_{\mathbf{u}}\left[\lambda(\tau,\mathbf{u}_m,\mathbf{u}'_m)F(\tau,\mathbf{u})\right], \tag{2.8}$$

где λ определено формулой (1.6).

Доказательство теоремы 2 очевидно в связи с тем, что она является взаимной по отношению к теореме 1.

3. Управление амплитудой маятниковых систем

Для того чтобы продемонстрировать работоспособность предложенного метода оптимизации колебаний, рассмотрим несколько маятниковых систем разного уровня сложности.

3.1. Маятник переменной длины

Пусть маятник представляет собой материальную точку, подвешенную на невесомой штанге. Длина $l(t)$ отрезка штанги от неподвижной точки O подвеса до материальной точки может изменяться в диапазоне $0<l_1\le l(t)\le l_2$. Известно [4], что маятник можно раскачивать, меняя подходящим образом длину $l(t)$, которая в этом случае будет рассматриваться как управление (рис. 1).

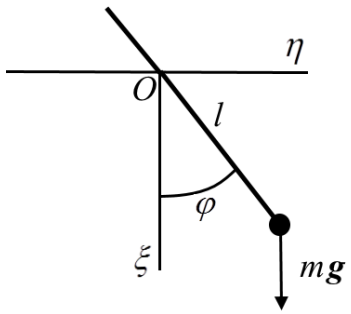

Рис. 1. Маятник переменной длины

Уравнение движения маятника имеет вид [5]

$$\frac{d}{dt}(l^2\dot{\varphi})=-gl\sin\varphi. \tag{3.1.1}$$

Здесь g – ускорение силы тяжести, φ – угол отклонения маятника от вертикали, а $l(t)$ выступает в качестве управления. Из формулы (1.6) найдем $\lambda=l^2>0$. Подынтегральная функция в (1.7) принимает вид

$$\phi=-\lambda gl\sin\varphi. \tag{3.1.2}$$

Заметим, что подставлять найденное значение λ в формулу (3.1.2) не следует, т.к. согласно теореме 1 множитель λ считается независимым при поиске экстремумов функции ϕ по управлению l. Важен только знак λ. Видим, что

положение $\varphi = 0$ оказывается нейтральным, и из него, как из начальной точки, раскачивание невозможно.

Воспользуемся утверждением°I теоремы°1. Пусть $\varphi_0 < 0$ – левая граница предельного отклонения по углу φ, а $\varphi_1 > 0$ – соответственно правая граница и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$. Получаем, что $\phi(\lambda, l, \varphi) > 0$ при $\varphi_0 \le \varphi < 0$ и $\phi(\lambda, l, \varphi) < 0$ при $0 < \varphi \le \varphi_1$. Следовательно, наилучшим для достижения максимального значения положительного полуразмаха будет режим

$$l = \begin{cases} l_2, & \varphi_0 \le \varphi < 0, \\ l_1, & 0 < \varphi \le \varphi_1. \end{cases}$$

В момент времени, когда $\varphi = 0$, происходит скачкообразное изменение длины маятника.

Воспользуемся утверждением°II теоремы°1. Пусть теперь в начальный момент $\varphi = \varphi_1 > 0$. Тогда нужно, наоборот, минимизировать значение φ_0 отрицательного полуразмаха. Из (2.6) заключаем, что наилучшим для достижения минимального значения отрицательного полуразмаха будет режим

$$l = \begin{cases} l_1, & \varphi_0 \le \varphi < 0, \\ l_2, & 0 < \varphi \le \varphi_1. \end{cases}$$

Объединяя полученные результаты, синтезируем оптимальный режим раскачивания маятника, а именно: при достижении максимального положительного отклонения маятника надо дать ему максимальную длину и сохранять ее до момента прохождения нижнего положения равновесия. Затем надо дать маятнику минимальную длину и, сохраняя ее, дождаться минимального отрицательного отклонения маятника. При достижении минимального отрицательного отклонения маятника надо скачком дать маятнику максимальную длину и т.д. в обратном порядке. Найденное решение согласуется с указанным в работе [4].

Применив теорему°2, укажем оптимальный закон успокоения колебаний маятника: при достижении максимального положительного отклонения маятника надо дать ему минимальную длину и сохранять ее до момента прохождения нижнего положения равновесия. Затем надо дать маятнику максимальную длину и, сохраняя ее, дождаться минимального отрицательного отклонения маятника. При достижении минимального отрицательного отклонения маятника надо скачком дать маятнику минимальную длину и т.д. в обратном порядке

3.2. Т-образный маятник

Пусть физический маятник представляет собой штангу длины l, точка O которой закреплена неподвижно (точка подвеса), а к концевой точке жестко прикреплена под прямым углом поперечная планка длины $2b$, так что точка прикрепления приходится на середину планки. Масса маятника равна M, а его центр масс D лежит на штанге на расстоянии a от точки подвеса. На планке находится материальная точка массы m. Её положение на планке задаётся координатой u, отсчитываемой от середины планки, так что $u \in [-b, b]$ (рис. 2).

Маятник можно раскачивать, заставляя точку m двигаться вдоль планки. Надо найти закон оптимального управления колебаниями маятника.

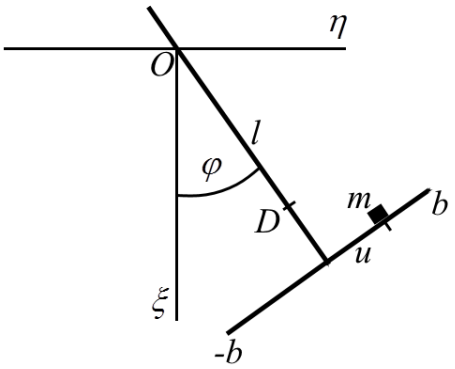

Рис. 2. Т-образный маятник

Для того чтобы описать движение системы, выберем начало координат O в точке подвеса маятника, ось $O\xi$ направим по вертикали вниз, ось $O\eta$ – горизонтально в правой координатной полуплоскости. Положение стержня будем задавать углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси $O\xi$. Координаты и скорости точки m примут вид

$$\xi = l\cos\varphi - u\sin\varphi, \quad \dot{\xi} = -\dot{\varphi}(l\sin\varphi + u\cos\varphi) - \dot{u}\sin\varphi,$$

$$\eta = l\sin\varphi + u\cos\varphi, \quad \dot{\eta} = \dot{\varphi}(l\cos\varphi - u\sin\varphi) + \dot{u}\cos\varphi.$$

Кинетический момент K системы выражается формулой

$$K = \dot{\varphi}[I + m(l^2 + u^2)] + \dot{u}ml,$$

где I – момент инерции физического маятника относительно точки O. Найдем координаты (ξ_c, η_c) центра масс системы:

$$\xi_c = \frac{1}{M+m}[(Ma + ml)\cos\varphi - mu\sin\varphi], \quad \eta_c = \frac{1}{M+m}[(Ma + ml)\sin\varphi + mu\cos\varphi].$$

Уравнение изменения кинетического момента представим в виде

$$\frac{d}{dt}\{[I + m(l^2 + u^2) + u'ml]\dot{\varphi}\} = -g[(Ma + ml)\sin\varphi + mu\cos\varphi], \qquad (3.2.1)$$

где g – ускорение силы тяжести, а u' – производная от координаты u по углу φ.

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = I + m(l^2 + u^2) + u'ml. \qquad (3.2.2)$$

Подынтегральная функция в (1.7) принимает вид

$$\phi = -\lambda g[(Ma + ml)\sin\varphi + mu\cos\varphi]. \qquad (3.2.3)$$

Выражение в квадратных скобках (3.2.3) линейно зависит от u. Следовательно, экстремумы функции ϕ по u, найденные в предположении, что λ – независимая переменная, могут быть только на границах отрезка $u \in [-b, b]$. На границе должно быть выполнено $u' = 0$. Поэтому экстремумы в формулах (2.5), (2.6) следует искать при условии $\lambda > 0$. Заметим, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}=-\lambda gm\cos\varphi\begin{cases}<0, & -\pi/2<\varphi<\pi/2,\\ \geq 0, & -\pi\leq\varphi\leq-\pi/2 \ \vee \ \pi/2\leq\varphi\leq\pi.\end{cases} \tag{3.2.4}$$

Воспользуемся утверждением°I теоремы°1. Пусть $\varphi_0<0$ – левая граница предельного отклонения по углу φ, и пусть в начальный момент $\varphi=\varphi_0$, $\dot{\varphi}_0=0$. Тогда из формулы (2.5) следует

$$u=\begin{cases} b, & -\pi\leq\varphi\leq-\pi/2,\\ -b, & -\pi/2<\varphi<\pi/2,\\ b, & \pi/2\leq\varphi\leq\pi.\end{cases} \tag{3.2.5}$$

Воспользуемся утверждением°II теоремы°1. Пусть $\varphi_1>0$ – правая граница предельного отклонения по углу φ, и пусть в начальный момент $\varphi=\varphi_1$, $\dot{\varphi}_1=0$. Из формулы (2.6) следует

$$u=\begin{cases} -b, & -\pi\leq\varphi\leq-\pi/2,\\ b, & -\pi/2<\varphi<\pi/2,\\ -b, & \pi/2\leq\varphi\leq\pi.\end{cases} \tag{3.2.6}$$

Объединяя полученные результаты, синтезируем оптимальный режим раскачивания маятника, а именно, после достижения максимального положительного отклонения маятника надо пользоваться формулами (3.2.6). После достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (3.2.5) и т.д. в обратном порядке.

Из теоремы 2 следует оптимальный закон успокоения колебаний маятника: после достижении максимального положительного отклонения маятника надо применять формулы (3.2.5), а после достижения минимального отрицательного отклонения маятника – формулы (3.2.6) и т.д. до полного успокоения.

Механический смысл скачка управления при $\varphi=\pm\pi/2$ состоит в том, что при этих значениях угла происходит изменение знака проекции планки, по которой движется точка m, на ось $O\eta$.

3.3. Т-маятник переменной длины

Пусть физический маятник представляет собой штангу, которая в любой момент времени своего движения проходит через неподвижную точку O и может вращаться вокруг этой точки (точки подвеса маятника). Масса маятника равна M, а его центр масс D лежит на штанге на расстоянии $l(t)$ от точки подвеса. К концевой точке, расположенной на продолжении луча, проведенного из точки O в центр масс маятника, на фиксированном расстоянии a от его центра масс, жестко прикреплена под прямым углом поперечная планка длины $2b$, так что точка прикрепления приходится на середину планки. На планке находится материальная точка массы m. Её положение на планке определено координатой u, отсчитываемой от середины планки, так что $u\in[-b,b]$ (Рис. 2). Маятник можно раскачивать, как заставляя точку m двигаться вдоль перекладины,

так и меняя расстояние l в пределах $0 < l_m \le l \le l_M$. Требуется найти законы оптимального управления колебаниями маятника.

Как и в примере°2, выберем начало координат O в точке подвеса маятника, ось $O\xi$ направим по вертикали вниз, ось $O\eta$ – горизонтально в правой координатной полуплоскости. Положение стержня будем задавать углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси $O\xi$. Координаты и скорости точки m примут вид

$$\xi = (l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi, \quad \dot{\xi} = -\dot{\varphi}[(l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi] + \dot{l}\cos\varphi - \dot{u}\sin\varphi,$$

$$\eta = (l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi, \quad \dot{\eta} = \dot{\varphi}[(l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi] + \dot{l}\sin\varphi + \dot{u}\cos\varphi.$$

Кинетический момент K системы относительно точки O выражается формулой

$$K = \dot{\varphi}[I + (M+m)l^2 + mu^2] + \dot{u}ml,$$

где I – момент инерции физического маятника относительно его центра масс. Найдем координаты (ξ_c, η_c) центра масс системы:

$$\xi_c = \frac{1}{M+m}\{[(M+m)l + ma]\cos\varphi - mu\sin\varphi\},$$

$$\eta_c = \frac{1}{M+m}\{[(M+m)l + ma]\sin\varphi + mu\cos\varphi\}.$$

Уравнение изменения кинетического момента представим в виде

$$\frac{d}{dt}\{[I + (M+m)l^2 + mu^2 + u'ml]\dot{\varphi}\} = -g\{[(M+m)l + ma]\sin\varphi + mu\cos\varphi\}, \quad (3.3.1)$$

где g – ускорение силы тяжести, а u' – производная от координаты u по углу φ.

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = I + (M+m)l^2 + mu^2 + u'ml. \quad (3.3.2)$$

Подынтегральная функция в (1.7) принимает вид

$$\phi = -\lambda g\{[(M+m)l + ma]\sin\varphi + mu\cos\varphi\}. \quad (3.3.3)$$

Выражение в фигурных скобках (3.3.3) линейно зависит от u и l. Следовательно, экстремумы функции ϕ по u, найденные в предположении, что λ – независимая переменная, могут быть только на границах области $u \in [-b, b]$, $l \in [l_m, l_M]$. При этом на границе должно быть выполнено $u' = 0$. Поэтому экстремумы в формулах (2.5), (2.6) следует искать при условии $\lambda > 0$. Заметим, что

$$\frac{\partial\phi}{\partial u} = -\lambda gm\cos\varphi \begin{cases} < 0, & -\pi/2 < \varphi < \pi/2, \\ \ge 0, & -\pi \le \varphi \le -\pi/2 \ \vee \ \pi/2 \le \varphi \le \pi. \end{cases}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial l} = -\lambda g(M+m)\sin\varphi \begin{cases} \ge 0, & -\pi < \varphi < 0, \\ < 0, & 0 \le \varphi \le \pi. \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Воспользуемся утверждением°I теоремы°1. Пусть $\varphi_0 < 0$ – левая граница предельного отклонения по углу φ, и пусть в начальный момент $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Тогда из формулы (2.5) следует

$$u=\begin{cases} b, & -\pi\le\varphi\le-\pi/2,\\ -b, & -\pi/2<\varphi<\pi/2,\\ b, & \pi/2\le\varphi\le\pi.\end{cases}\qquad l=\begin{cases} l_M, & -\pi\le\varphi<0,\\ l_m, & 0\le\varphi\le\pi.\end{cases}\tag{3.3.5}$$

Воспользуемся утверждением°II теоремы°1. Пусть $\varphi_1>0$ – правая граница предельного отклонения по углу φ, и пусть в начальный момент $\varphi=\varphi_1$, $\dot\varphi_1=0$. Из формулы (2.6) следует

$$u=\begin{cases} -b, & -\pi\le\varphi\le-\pi/2,\\ b, & -\pi/2<\varphi<\pi/2,\\ -b, & \pi/2\le\varphi\le\pi.\end{cases}\qquad l=\begin{cases} l_m, & -\pi\le\varphi<0,\\ l_M, & 0\le\varphi\le\pi.\end{cases}\tag{3.3.6}$$

Объединяя полученные результаты, синтезируем оптимальный режим раскачивания маятника, а именно, после достижения максимального положительного отклонения маятника надо пользоваться формулами (3.3.6). После достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (3.3.5) и т.д. в обратном порядке.

Из теоремы 2 следует оптимальный закон успокоения колебаний маятника. После достижении максимального положительного отклонения маятника надо применять формулы (3.3.5), а после достижения минимального отрицательного отклонения маятника – формулы (3.3.6) и т.д. до полного успокоения.

Механический смысл скачка управления при $\varphi=\pm\pi/2$ по-прежнему состоит в том, что при этих значениях угла происходит изменение знака проекции планки, по которой движется точка m, на ось Oy.

3.4. Т-маятник переменной длины с подвижной точкой подвеса

Пусть физический маятник представляет собой штангу, которая в любой момент времени своего движения проходит через подвижную вдоль горизонтали точку A подвеса и может вращаться вокруг этой точки. Масса маятника равна M, а его центр масс D лежит на штанге на расстоянии l от точки подвеса. К концевой точке, расположенной на продолжении луча, проведенного из точки A в центр масс маятника, на фиксированном расстоянии a от его центра масс, жестко прикреплена под прямым углом поперечная планка длины $2b$, так что точка прикрепления приходится на середину планки. На планке находится материальная точка массы m. Её положение на планке определено координатой u, отсчитываемой от середины планки, так что $u\in[-b,b]$. Маятник можно раскачивать, заставляя точку m двигаться вдоль перекладины, меняя расстояние l в пределах $0<l_m\le l\le l_M$ и смещая горизонтально точку подвеса в заданных пределах (рис. 3).

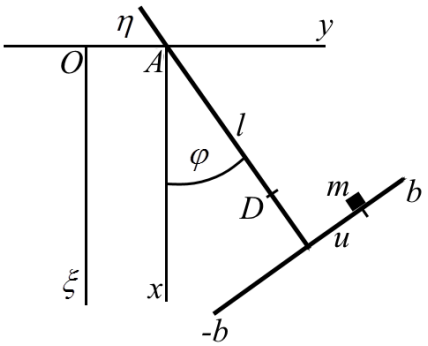

Рис. 3. Т-маятник с подвижной точкой подвеса

Требуется найти законы оптимального управления колебаниями маятника.

Выберем начало O неподвижной системы координат на горизонтальной прямой, вдоль которой может двигаться точка A подвеса маятника, ось $O\xi$ направим по вертикали вниз, ось $O\eta$ – горизонтально в правой координатной полуплоскости. Смещение точки A будет тогда происходить вдоль оси $O\eta$. С точкой A свяжем подвижную систему координат $Axyz$, так что ось Ax сонаправлена с осью $O\xi$, ось Ay сонаправлена с осью $O\eta$, ось Az дополняет систему координат до правой тройки. Положение стержня будем задавать координатой η точки A и углом φ, отсчитываемым от положительного направления оси Ax. Будем считать, что $-w \le \ddot{\eta} \le w$, где w – постоянная. Относительные координаты и скорости точки m в системе $Axyz$ примут вид

$$x = (l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi, \qquad \dot{x} = -\dot{\varphi}[(l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi] + \dot{l}\cos\varphi - \dot{u}\sin\varphi,$$

$$y = (l+a)\sin\varphi + u\cos\varphi, \qquad \dot{y} = \dot{\varphi}[(l+a)\cos\varphi - u\sin\varphi] + \dot{l}\sin\varphi + \dot{u}\cos\varphi.$$

Кинетический момент K механической системы относительно точки A выразится формулой

$$K = \dot{\varphi}[I + (M+m)l^2 + mu^2] + \dot{u}ml,$$

где I – момент инерции физического маятника относительно его центра масс. Найдем относительные координаты (x_c, y_c) центра масс механической системы:

$$x_c = \frac{1}{M+m}\{[(M+m)l + ma]\cos\varphi - mu\sin\varphi\},$$

$$y_c = \frac{1}{M+m}\{[(M+m)l + ma]\sin\varphi + mu\cos\varphi\}.$$

Уравнение изменения кинетического момента относительно точки A в движущейся с ускорением $\ddot{\eta}$ вдоль оси $O\eta$ системе координат $Axyz$ примет вид [5]

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\{[I + (M+m)l^2 + mu^2 + u'ml]\dot{\varphi}\} = \\ &= -[(M+m)l + ma](\ddot{\eta}\cos\varphi + g\sin\varphi) + mu(\ddot{\eta}\sin\varphi - g\cos\varphi) \end{aligned}, \qquad (3.4.1)$$

где g – ускорение силы тяжести, u' – производная от координаты u по углу φ.

Из формулы (1.6) найдем

$$\lambda = I + (M+m)l^2 + mu^2 + u'ml. \qquad (3.4.2)$$

Подынтегральная функция в (1.7) выражается равенством

$$\phi = \lambda\{mu(\ddot{\eta}\sin\varphi - g\cos\varphi) - [(M+m)l + ma](\ddot{\eta}\cos\varphi + g\sin\varphi)\}. \qquad (3.4.3)$$

Пусть угол α определен соотношениями

$$\sin\alpha = \frac{\ddot{\eta}}{\sqrt{g^2+\ddot{\eta}^2}}, \quad \cos\alpha = \frac{g}{\sqrt{g^2+\ddot{\eta}^2}}, \quad \alpha = \arcsin\left(\frac{\ddot{\eta}}{\sqrt{g^2+\ddot{\eta}^2}}\right). \qquad (3.4.4)$$

Тогда

$$\phi = -\lambda\sqrt{\ddot{\eta}^2+g^2}\left\{mug\cos(\varphi+\alpha) + [(M+m)l+ma]\sin(\varphi+\alpha)\right\}. \qquad (3.4.5)$$

Для раскачивания маятника воспользуемся формулами (2.5), (2.6). При любом фиксированном значении $\ddot{\eta}$, в том числе и при оптимальном, выражение в фигурных скобках (3.4.5) линейно зависит от u и l. Следовательно, экстремумы по u и l функции ϕ, найденные в предположении, что λ – независимая переменная, могут быть только на границах области $u \in [-b,b]$, $l \in [l_m, l_M]$. При этом на границе должно быть выполнено $u' = 0$. Поэтому экстремумы в формулах (2.5), (2.6) следует искать при условии $\lambda > 0$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial u} &= -\lambda gm\sqrt{g^2+\ddot{\eta}^2}\cos(\varphi+\alpha), \\ \frac{\partial\phi}{\partial l} &= -\lambda g(M+m)\sqrt{g^2+\ddot{\eta}^2}\sin(\varphi+\alpha), \end{aligned} \qquad (3.4.6)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial\ddot{\eta}} = -\lambda(M+m)x_c. \qquad (3.4.7)$$

Из формул (3.4.5) видно, что $\partial\phi/\partial u$ и $\partial\phi/\partial l$ не могут одновременно обратиться в нуль.

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\phi}{\partial u}\begin{cases} <0, & -\pi/2 < \varphi+\alpha < \pi/2, \\ \geq 0, & -\pi \leq \varphi+\alpha \leq -\pi/2 \ \vee \ \pi/2 \leq \varphi+\alpha \leq \pi. \end{cases} \\ &\frac{\partial\phi}{\partial l}\begin{cases} \geq 0, & -\pi < \varphi+\alpha < 0, \\ <0, & 0 \leq \varphi+\alpha \leq \pi. \end{cases} \quad \frac{\partial\phi}{\partial\ddot{\eta}}\begin{cases} \geq 0, & x_c \leq 0, \\ <0, & x_c > 0. \end{cases} \end{aligned} \qquad (3.4.8)$$

Заметим, что $\partial\phi/\partial\ddot{\eta}$ обращается в 0 только в единственном положении маятника, когда $x_c = 0$, и в этом положении маятника функция ϕ вообще не зависит от $\ddot{\eta}$. Для всех других положений маятника $\ddot{\eta} = \pm w$ в зависимости от знака x_c и рассматриваемого полуразмаха колебаний. Воспользуемся утверждением°I теоремы°1. Пусть $\varphi_0 + \alpha < 0$ определяет левую границу предельного отклонения по углу φ, т.е. в начальный момент $\varphi = \varphi_0$, $\dot{\varphi}_0 = 0$. Тогда из формулы (1.14) по аналогии с формулой (2.3.5) следует, что должно быть $\ddot{\eta} = -w\ \mathrm{sign}\, x_c$ и

$$u=\begin{cases} b, & -\pi\le\varphi+\alpha\le-\pi/2,\\ -b, & -\pi/2<\varphi+\alpha<\pi/2,\\ b, & \pi/2\le\varphi+\alpha\le\pi.\end{cases}\qquad l=\begin{cases} l_M, & -\pi\le\varphi+\alpha<0,\\ l_m, & 0\le\varphi+\alpha\le\pi.\end{cases}\qquad (2.4.9)$$

Воспользуемся утверждением°II теоремы°1. Пусть $\varphi_1>0$ – правая граница предельного отклонения по углу φ, и пусть в начальный момент $\varphi=\varphi_1$, $\dot\varphi_1=0$. Из формулы (1.15) следует $\ddot\eta=w\,\mathrm{sign}\,x_c$ и

$$u=\begin{cases} -b, & -\pi\le\varphi+\alpha\le-\pi/2,\\ b, & -\pi/2<\varphi+\alpha<\pi/2,\\ -b, & \pi/2\le\varphi+\alpha\le\pi.\end{cases}\qquad l=\begin{cases} l_m, & -\pi\le\varphi+\alpha<0,\\ l_M, & 0\le\varphi+\alpha\le\pi.\end{cases}\qquad (3.4.10)$$

Полученные результаты можно интерпретировать следующим образом. Пусть центр масс маятника находится в нижней координатной полуплоскости: $x_c>0$, и пусть $\varphi=\varphi_0$, $\dot\varphi_0=0$ соответствует левой границе отклонения по углу φ. Тогда $\alpha<0$. Положение равновесия маятника в этом случае соответствует значению $\varphi=-\alpha>0$. Возьмем систему координат $O\xi_1\eta_1$, повернутую относительно $O\xi\eta$ в положительном направлении вокруг точки O на угол $(-\alpha)$. Движение маятника в системе $O\xi_1\eta_1$ будет аналогично движению маятника в примере 3 для случая, соответствующего формулам (3.3.5). Если в таком движении будет достигнуто значение $x_c=0$, то в этот момент следует принять новое значение $\ddot\eta=w\,\mathrm{sign}\,x_c$. Тогда будет $\alpha>0$, и система координат $O\xi_1\eta_1$ окажется повернутой относительно $O\xi\eta$ в отрицательном направлении вокруг точки O на угол $(-\alpha<0)$. В соответствии с этим управления u и l следует пересчитать по формулам (3.4.9), что может изменить значение x_c. Если при этом окажется, что $x_c\le0$, то новое управление следует сохранить. Если же окажется, что при новом управлении будет снова $x_c>0$, то в некотором диапазоне углов φ возникает неопределенность управления. Строго говоря, в диапазоне углов, для которых управление не определено, возникает скользящий режим, который, например, может быть преодолен, если в диапазоне неопределенности придать компонентам управления их средние значения.

После достижения максимального положительного отклонения маятника надо пользоваться формулами (3.4.10) с учетом аналогичных замечаний относительно возможности возникновения скользящего режима. После достижения минимального отрицательного отклонения следует применять формулы (3.4.9) и т.д. в обратном порядке.

Оптимальное успокоение колебаний будет достигнуто, если для положительного полуразмаха применить правило минимизации амплитуды (2.7), а для отрицательного полуразмаха – правило максимизации амплитуды (2.8).

Во всех рассмотренных выше примерах вместо уравнений Лагранжа второго рода была применена теорема об изменении кинетического момента отно-

сительно неподвижной точки. Применение этой теоремы для угловой координаты приводит к уравнению, эквивалентному соответствующему уравнению Лагранжа, но более простому из-за меньшего числа взаимно уничтожающихся слагаемых.

Заключение

Полученные в препринте необходимые условия оптимальности управления амплитудой колебаний справедливы для уравнений типа (1.2), где t служит независимой переменной и важна структура функции T, или для уравнений типа (1.3), где в качестве независимой переменной выбрана оптимизируемая координата, а структура функций f и g уже не имеет существенного значения для вывода условий оптимальности. Вместе с тем уравнение (1.2) оказывается справедливым для широкого класса механических колебательных систем, что свидетельствует о практической применимости предложенных методов.

Реализация алгоритмов управления, получаемых с помощью предлагаемых в препринте условий оптимальности (2.5) – (2.8), предполагает учет информации о моментах достижения экстремальных значений координаты, по которой происходит раскачивание колебаний, значений самой координаты, а также информации о направлении полуразмаха колебаний.

Условия оптимальности (2.5) – (2.8) не содержат сопряженных переменных в смысле принципа максимума Л.С. Понтрягина, что облегчает применение этих условий в конкретных случаях и подтверждается решениями изученных в препринте примеров. Дополнительное преимущество представленного метода состоит в том, что оптимальное управление получается сразу в виде зависимости от контролируемой координаты. С помощью указанных условий оптимальности удалось найти аналитическое решение нескольких новых нетривиальных модельных задач.

Приведенные примеры свидетельствуют о том, что предложенные в препринте необходимые условия оптимального управления амплитудой колебаний упрощают по сравнению с известными методами решение многомерных задач. Они оказываются эффективными как при необходимости раскачивания колебательных систем, так и при необходимости успокоения их колебаний.

На основе следствий 3, 4 раздела 2 сформулировано правило вычисления функционального градиента, следуя которому можно надежно увеличивать или уменьшать амплитуду колебаний, не используя оптимальные законы управления. При этом достижение требуемого результата будет происходить несколько дольше.

Библиографический список

1. Магнус К. Колебания: Введение в исследование колебательных систем. 1982. Москва. Мир. 304 с.

2. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е издание, переработанное и дополненное. – М.: Издательство Московского университета, 2019. – 728 с. ISBN 978-5-19-011288-7

3. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. – М.: Наука, 1976. – 393 с.

4. Черноусько Ф.Л., Акуленко Л.Д., Соколов Б.Н. Управление колебаниями. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. – 384 с.

5. Формальский А.М. Управление движением неустойчивых объектов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. – 232 с. – ISBN 978-5-9221-1460-8.

6. Голубев Ю.Ф., Хайруллин Р.З. К построению оптимальных режимов раскачивания двузвенного физического маятника // ПММ. ISSN 0032-8235 – 2000. – Т.64. – вып.2. – С. 217-226.

7. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Приведение инсектоморфного робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами» // Известия РАН. Теория и системы управления. ISSN: 0002-3388 — 2019. — № 6. — С. 163–176. DOI: 10.1134/S0002338819060052
Golubev Yu.F., Koryanov V.V., Melkumova E.V. Bringing an Insectomorphic Robot to a Normal Position from an Abnormal Upside Down Position // Journal of Computer and Systems Sciences International, ISSN PRINT 1064-2307, 2019. Vol. 58, No. 6, pp. 987-999. © Pleiades Publishing, Ltd., 2019. DOI: 10.1134/S1064230719060054.

8. Голубев Ю.Ф., Корянов В.В., Мелкумова Е.В. Переворачивание шагающего робота в рабочее состояние из аварийного положения «вверх ногами» // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2019. № 48. 22 с. doi:10.20948/prepr-2019-48, ISSN 2071-2898,
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-48

9. Мартыненко Ю.Г., Формальский А.М. Управление продольным движением одноколесного аппарата по неровной поверхности // Изв. РАН. ТиСУ. 2005. №4. С. 165 – 173.
Martynenko Yu.G., Formal'skii A.M. A control of the longitudinal motion of a single-wheel robot on an uneven surface Journal of Computer and Systems Sciences International. 2005. Т. 44. № 4. С. 662-670.

10. Лавровский Э.К., Формальский А.М. О качении колеса посредством управления его дисбалансом // ПММ. Т. 70. вып. 3. 2006. с. 371-383. Lavrovskii E.K., Formal’skii A.M. Control of the rolling of a wheel by changing its imbalance // Elsevier Ltd. Journal of Applied Mathematics and Mechanics V. 70 (2006). Pp. 334–345. doi:10.1016/j.jappmathmech.2006.07.006

11. Охоцимский Д.Е., Энеев Т.М. Некоторые вариационные задачи, связанные с запуском искусственного спутника Земли. – М.: Гос. Изд-во технико-теор. лит-ры. (Успехи физических наук. Т. 63, вып. 1а), 1957. – С. 5-32.