ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Б.В. Рогов

Бикompактная
интерполяционно-
характеристическая схема
третьего порядка
аппроксимации для
линейного уравнения
переноса

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Рогов Б.В. Бикompактная интерполяционно- характеристическая схема третьего порядка аппроксимации для линейного уравнения переноса // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2020. № 106. 20 с.
<https://doi.org/10.20948/prepr-2020-106>
<https://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2020-106>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Б.В.Рогов

**Бикомпактная интерполяционно-
характеристическая схема
третьего порядка аппроксимации
для линейного уравнения переноса**

Москва — 2020

Рогов Б.В.

Бикомпактная интерполяционно-характеристическая схема третьего порядка аппроксимации для линейного уравнения переноса

Построена явная интерполяционно-характеристическая схема для численного решения однородного линейного уравнения переноса. В этой схеме значение искомой функции в узле на верхнем временном слое приравнивается значению функции в точке пересечения характеристики, проходящей через этот узел, с нижним временным слоем. В свою очередь, последнее значение оценивается с помощью локального интерполяционного полинома Эрмита, построенного в пространственной ячейке между двумя целыми узлами, где расположена точка пересечения. В данной работе, в отличие от других работ, для построения полинома Эрмита используются наряду со значениями искомой функции в двух соседних целых узлах также значения ее первообразной, а не значения ее производной. Построенная схема является бикомпактной и предназначена, прежде всего, для расчета задач переноса с негладкими решениями. Проведены вычисления решений тестовых задач с разной гладкостью начальных данных на измельчающихся вложенных сетках. Эти расчеты, в частности, показали третий порядок сходимости бикомпактной схемы в случае гладких решений. Исследованы диссипативные и дисперсионные свойства бикомпактной схемы.

Ключевые слова: уравнение переноса, интерполяционно-характеристический метод, интерполяция Эрмита, явная бикомпактная схема, диссипативные и дисперсионные свойства

Boris Vadimovich Rogov

Bicompact interpolation-characteristic scheme of the third order of approximation for the linear transport equation

An explicit interpolation-characteristic scheme is constructed for the numerical solution of the homogeneous linear transport equation. In this scheme, the value of the unknown function at a node on the upper time layer is equal to the value of the function at the intersection point of the characteristic passing through this node with the lower time layer. In turn, the latter value is estimated using a local Hermite interpolation polynomial built in a spatial cell between two integer nodes where the intersection point is located. In this paper, in contrast to other works, the values of the unknown function in two neighboring integer nodes are used to construct the Hermite polynomial, along with the values of its primitive, and not the values of its derivative. The constructed scheme is bicompact and is intended primarily for computing transfer problems with nonsmooth solutions. Computations of solutions of test problems with different smoothness of initial data on refining nested grids are performed. These calculations, in particular, showed the third order of convergence of the bicompact scheme in the case of smooth solutions. The dissipative and dispersive properties of the bicompact scheme are investigated.

Key words: advection equation, interpolation-characteristic method, Hermite interpolation, explicit bicompact scheme, dissipative and dispersive properties

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857а.

1. Введение

Однородное линейное уравнение переноса

$$Lu \equiv u_t + cu_x = 0, \quad u_t \equiv \partial u(x,t)/\partial t, \quad u_x \equiv \partial u(x,t)/\partial x, \quad c = \text{const} > 0 \quad (1)$$

является одним из основных модельных уравнений математической физики, которое часто рассматривается при разработке численных методов для решения систем уравнений гиперболического типа (см., например, [1]). Важнейшими требованиями, предъявляемыми к современным численным методам для расчета уравнений гиперболического типа, является обеспечение ими высокой разрешающей способности, что, прежде всего, предполагает малые диссипативные и дисперсионные ошибки численного метода. В работе [2] предложена разностная схема, которая имеет достаточно малые диссипативные и дисперсионные ошибки [3] и относится к классу интерполяционно-характеристических методов [4]. В этой схеме значение искомой функции в узле на верхнем временном слое приравняется значению функции в точке пересечения характеристики уравнения (1), проходящей через этот узел, с нижним временным слоем. Последнее значение оценивается с помощью локального интерполяционного полинома Эрмита, построенного в пространственной ячейке между двумя целыми узлами сетки, куда попадает вышеуказанная точка пересечения. Для построения этого полинома используются значения функции $u(x,t)$ и ее пространственной производной u_x в этих узлах. При этом производная u_x определяется из дополнительного уравнения - дифференциального следствия уравнения (1). То есть для построения схемы [2], имеющей третий порядок точности на гладких решениях, используется расширенная система уравнений для функции $u(x,t)$ и ее пространственной производной u_x . Отметим, что в недавней работе [5] был предложен новый способ определения значений производной u_x в узлах сетки, отличный от способа работы [2].

Имея в виду расчеты обобщенных (разрывных) решений уравнения (1), для конструирования разностной схемы, имеющей повышенный порядок аппроксимации в областях гладкости решения и более быструю сходимость в областях вблизи разрывов решения, было бы естественно использовать расширенную систему уравнений для функции $u(x,t)$ и ее первообразной по переменной x вместо производной u_x , как, например, это сделано в [6]. Поэтому в данной работе построена интерполяционно-характеристическая схема на основе расширенной системы уравнений для функции $u(x,t)$ и ее первообразной по x , причем привлекается интегральное следствие уравнения (1) для нахождения первообразной функции. Сконструированная схема является бикомпактной и предназначена, прежде всего, для расчета задач переноса с негладкими решениями. Для определения скорости сходимости

схемы проведены вычисления решений тестовых задач с разной гладкостью начальных данных на измельчающихся вложенных сетках. Исследованы диссипативные и дисперсионные свойства предложенной бикompактной схемы. Эти свойства сравниваются с аналогичными свойствами схемы с разностями против потока первого порядка аппроксимации.

2. Бикompактная интерполяционно-характеристическая схема

Разностную схему будем конструировать для решения двух начально-краевых задач для уравнения переноса (1) в области $D = \{(x, t) \in [0, X] \times [0, T]\}$ – задачи I и задачи II.

В задаче I ставятся такие условия:
начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 \leq x \leq X \quad (2)$$

и граничное условие

$$u(0, t) = \mu(t), \quad 0 < t \leq T; \quad \mu(0) = u_0(0). \quad (3)$$

В задаче II ставятся периодическое начальное условие (2)

$$u_0(x) = u_0(x + X) \quad (4)$$

и периодическое краевое условие

$$u(0, t) = u(X, t), \quad 0 < t \leq T. \quad (5)$$

Сначала построим расширенную систему уравнений для задачи I. Введем первообразную функцию v от решения u уравнения (1) по формуле

$$v_x = u. \quad (6)$$

Решение уравнения (6) можно представить в виде

$$v = \int_0^x u(x', t) dx' + \varphi(t). \quad (7)$$

Выберем функцию $\varphi(t)$ таким образом, чтобы функция $v(x, t)$ являлась решением однородного уравнения переноса. Нетрудно показать, что если функция

$$\varphi(t) = -c \int_0^t \mu(t') dt', \quad (8)$$

то $v(x, t)$ удовлетворяет уравнению

$$v_t + cv_x = 0, \quad (9)$$

начальному условию

$$v(x, 0) = \int_0^x u_0(x') dx' \quad (10)$$

и граничному условию

$$v(0, t) = \varphi(t). \quad (11)$$

Уравнение (9) с учетом формул (7) и (8) является интегральным следствием основного дифференциального уравнения (1), поскольку получается путем интегрирования последнего уравнения по пространственной переменной от 0 до x . Расширенная система уравнений для задачи I состоит из исходного уравнения (1) и дополнительного уравнения (9) с соответствующими начальными и граничными условиями.

Расширенная система уравнений для задачи II отличается от подобной системы для задачи I иным граничным условием для первообразной функции v :

$$v(0, t) = v(X, t) - v(X, 0). \quad (12)$$

Двуслойную разностную схему для начально-краевой задачи построим интерполяционно-характеристическим методом на минимальном четырехточечном шаблоне с узлами (x_j, t_n) , (x_{j+1}, t_n) , (x_j, t_{n+1}) , (x_{j+1}, t_{n+1}) . Эти узлы являются вершинами одной расчетной ячейки (см. рис. 1) в области D .

Рис. 1. Расчетная ячейка.

Для положительной скорости переноса c неизвестными сеточными значениями искомых функций u и v будут значения u_{j+1}^{n+1} , v_{j+1}^{n+1} в узле (x_{j+1}, t_{n+1}) . Для однородных уравнений переноса (1), (9) значения их решений переносятся без изменения вдоль характеристик $x - ct = \text{const}$. Выпустим из точки (x_{j+1}, t_{n+1}) такую характеристику до пересечения либо с нижней, либо с боковой стороной прямоугольной ячейки сетки (рис. 1). Первый случай пересечения соответствует значению числа Куранта $\kappa = c\tau/h \leq 1$, а второй случай – значению $\kappa > 1$, где $\tau = t_{n+1} - t_n$ – шаг по времени, $h = x_{j+1} - x_j$ – шаг по пространству. В данной работе ограничимся рассмотрением первого случая. Обозначим точку пересечения характеристики с нижней границей ячейки (x^*, t_n) . Искомые значения u_{j+1}^{n+1} , v_{j+1}^{n+1} положим равными интерполяционным оценкам функций u и v в этой точке пересечения. Ниже будут получены эти оценки.

Координата x^* определяется формулами

$$x^* - x_j = h(1 - \kappa), \quad x^* - x_{j+1} = -h\kappa. \quad (13)$$

Для оценки значения функции v в точке (x^*, t_n) построим по значениям v_j^n , v_{j+1}^n , u_j^n и u_{j+1}^n кубический интерполяционный полином Эрмита

$$H(x) = v_j^n + (x - x_j) \left\{ u_j^n + (x - x_j) \left[A + B(x - x_{j+1}) \right] \right\}, \quad (14)$$

где

$$A = \frac{1}{h} \left(\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} - u_j^n \right), \quad B = \frac{1}{h^2} \left(u_j^n - 2 \frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h} + u_{j+1}^n \right). \quad (15)$$

Сеточное значение v_{j+1}^{n+1} будем вычислять по формуле

$$v_{j+1}^{n+1} = H(x^*). \quad (16)$$

Подставляя в правую часть формулы (16) значение x^* из (13), получим

$$v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + h(1 - \kappa) \left\{ u_j^n + h(1 - \kappa) [A - Bh\kappa] \right\}. \quad (17)$$

Для оценки значения функции u в точке (x^*, t_n) используем производную от полинома Эрмита (14)

$$H_x(x) = u_j^n + (x - x_j) \left\{ 2A + B \left[(x - x_j) + 2(x - x_{j+1}) \right] \right\}. \quad (18)$$

Нетрудно видеть, что квадратичный полином (18) удовлетворяет условиям

$$H_x(x_j) = u_j^n, \quad H_x(x_{j+1}) = u_{j+1}^n, \quad (19)$$

т.е. является интерполяционным для функции $u(x, t_n)$, а точность его интерполяции на интервале (x_j, x_{j+1}) есть величина $O(h^3)$. Сеточное значение u_{j+1}^{n+1} будем вычислять по формуле

$$u_{j+1}^{n+1} = H_x(x^*), \quad (20)$$

поэтому численный метод имеет третий порядок аппроксимации для достаточно гладких решений. Подставляя в правую часть формулы (20) значение x^* из (13), получим

$$u_{j+1}^{n+1} = \kappa(3\kappa - 2)u_j^n + (1 - \kappa)(1 - 3\kappa)u_{j+1}^n + 6\kappa(1 - \kappa)\frac{v_{j+1}^n - v_j^n}{h}. \quad (21)$$

Формулы (15), (17), (21) определяют алгоритм двуслойной интерполяционно-характеристической схемы. Эта схема является явной и бикомпактной в силу использованного двухточечного пространственного шаблона.

Если ввести интегральные средние $\bar{u}_{j+1/2}^n$ функции u по пространственным ячейкам сетки по формуле

$$\bar{u}_{j+1/2}^n = (v_{j+1}^n - v_j^n)/h, \quad (22)$$

то формулы (15), (17), (21) приведутся к следующему виду:

$$A = \frac{1}{h}(\bar{u}_{j+1/2}^n - u_j^n), \quad B = \frac{1}{h^2}(u_j^n - 2\bar{u}_{j+1/2}^n + u_{j+1}^n), \quad (23)$$

$$v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + h(1 - \kappa)\left[(1 - \kappa)(1 + 2\kappa)\bar{u}_{j+1/2}^n + \kappa^2 u_j^n - \kappa(1 - \kappa)u_{j+1}^n\right], \quad (24)$$

$$u_{j+1}^{n+1} = \kappa(3\kappa - 2)u_j^n + (1 - \kappa)(1 - 3\kappa)u_{j+1}^n + 6\kappa(1 - \kappa)\bar{u}_{j+1/2}^n. \quad (25)$$

После определения v_{j+1}^{n+1} по формуле (24) можно вычислить значение $\bar{u}_{j+1/2}^{n+1}$ на верхнем временном слое $t = t_{n+1}$, используя формулу (22).

В дальнейшем свойства сконструированной бикompактной схемы мы будем сравнивать с явной противопоточной схемой первого порядка аппроксимации

$$u_{j+1}^{n+1} = u_{j+1}^n - \kappa(u_{j+1}^n - u_j^n). \quad (26)$$

Эта схема может быть получена интерполяционно-характеристическим методом, если на нижнем временном слое $t = t_n$ использовать линейную интерполяцию.

3. Результаты тестовых расчетов

Расчеты начально-краевых задач I и II с помощью бикompактной схемы (22), (24), (25) и противопоточной схемы (26) выполнены на равномерной сетке

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau = \{(x_j, t_n), x_j \in \bar{\omega}_h, t_n \in \bar{\omega}_\tau\},$$

$$\bar{\omega}_h = \{x_j = jh, j = \overline{0, N_x}, h = X/N_x\}, \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = \overline{0, N_t}, \tau = T/N_t\}.$$

Проведем сравнительный анализ бикompактной и противопоточной схем на примере следующих трех тестовых задач, в которых взяты такие параметры: $c = 1, X = 1, T = 1$.

Задача 1 относится к задаче типа I (см. (1)-(3)). В этой задаче берутся следующие начальные и граничные условия:

$$u_0(x) = \sin(x), \quad \mu(x) = -\sin(t).$$

Задача 2 относится к задаче типа II (см. (1), (2), (4), (5)) с периодическими начальными и граничными условиями. Начальный профиль $u(x, t)$ берется в виде периодической функции

$$u_0(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0.5, \\ 1 - x, & x > 0.5, \end{cases}$$

имеющей разрыв первой производной в точке $x = 0.5$.

Задача 3 относится к задаче типа II (см. (1), (2), (4), (5)) с периодическими начальными и граничными условиями. Начальный профиль $u(x, t)$ берется в виде периодической разрывной функции

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0.5, \\ 1, & x \geq 0.5. \end{cases}$$

В табл. 1 представлены погрешности численных решений задачи 1 при $t=T$, оцененные в норме C , а также порядки p сходимости схем. Ради краткости бикомпактная и противопоточная схемы в табл. 1 и последующих таблицах обозначены как схема 1 и схема 2 соответственно. Порядки p сходимости рассчитывались по формуле

$$p(2N_x) = \log_2 \left(\frac{Err(N_x)}{Err(2N_x)} \right),$$

где $Err(N_x)$ – ошибка численного решения для функции $u(x,t)$ на сетке ω_{ht} с N_x ячейками по переменной x , оцененная в выбранной сеточной норме. Во всех расчетах сгущение сеток по переменным x и t проводилось синхронно с сохранением числа Куранта.

Из табл. 1 видно, что порядок сходимости бикомпактной и противопоточной схем в случае гладкого решения задачи 1 равен 3.0 и 1.0 соответственно и совпадает с порядком аппроксимации схем.

Таблица 1

**Погрешность численного решения $Err_1 = \|y - u\|_C$ задачи 1
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_1 схема 1	p схема 1	Err_1 схема 2	p схема 2
64	256	$2.31 \cdot 10^{-8}$		$9.23 \cdot 10^{-4}$	
128	512	$2.89 \cdot 10^{-9}$	3.00	$4.65 \cdot 10^{-4}$	0.99
256	1024	$3.61 \cdot 10^{-10}$	3.00	$2.34 \cdot 10^{-4}$	0.99
512	2048	$4.52 \cdot 10^{-11}$	3.00	$1.17 \cdot 10^{-4}$	1.00

Результаты расчетов задачи 2 при $t=T$, полученные по бикомпактной и противопоточной схемам, представлены на рис. 2, 3 и в табл. 2-4.

На рис. 2 решения, полученные по бикомпактной и противопоточной схемам, сравниваются с точным решением. Из рисунка видно существенное превосходство в точности бикомпактной схемы над противопоточной схемой.

На рис. 3 показаны ошибки численных решений при $N_x = 256$ и различных значениях числа Куранта. Из рисунка видно, что ошибки решений обеих схем локализованы вблизи точек разрыва производной точного решения. Однако размер области локализации ошибки и ее величина для бикомпактной схемы существенно меньше, чем для противопоточной схемы.

Рис. 2. Сравнение решений задачи 2 при $N_x = 32$ и числе Куранта $\kappa = 0.25$: толстая сплошная линия – точное решение, тонкая сплошная линия – решение по бикомпактной схеме, штриховая линия – решение по противопоточной схеме.

В табл. 2-4 показаны ошибки численных решений на сгущающихся сетках в нормах C, L_1 и L_2 соответственно. Из этих таблиц видно, что порядки сходимости бикомпактной схемы выше, чем порядки сходимости противопоточной схемы. Разница в этих порядках приблизительно равна 0.25, 0.5 и 0.4 для норм C, L_1 и L_2 соответственно.

Результаты расчетов задачи 3 при $t = T$, полученные по бикомпактной и противопоточной схемам, представлены на рис. 4, 5 и в табл. 5, 6.

На рис. 4 решения, полученные по бикомпактной и противопоточной схемам, сравниваются с точным решением. Из рисунка видно существенное превосходство в точности бикомпактной схемы над противопоточной схемой. Однако если решение противопоточной схемы является монотонным, то решение бикомпактной схемы – немонотонным, причем области немонотонности локализованы вблизи точек разрыва точного решения.

На рис. 5 показаны ошибки численных решений при $N_x = 256$ и различных значениях числа Куранта. Из рисунка видно, что ошибки решений бикомпактной схемы локализованы вблизи точек разрыва производной точного решения.

Рис. 3. Ошибки численных решений задачи 2 при $N_x = 256$ и различных значениях числа Куранта: сплошные линии – решения по бикompактной схеме, штриховые линии – решения по противопоточной схеме.

В табл. 5, 6 показаны ошибки численных решений на сгущающихся сетках в нормах L_1 и L_2 соответственно. Из этих таблиц видно, что порядки сходимости бикompактной схемы выше, чем порядки сходимости противопоточной схемы. Разница в этих порядках равна 0.27 и 0.15 для норм L_1 и L_2 соответственно.

Таблица 2

**Погрешность численного решения $Err_1 = \|y - u\|_C$ задачи 2
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_1 схема 1	p схема 1	Err_1 схема 2	p схема 2
64	256	$1.03 \cdot 10^{-2}$		$8.63 \cdot 10^{-2}$	
128	512	$6.14 \cdot 10^{-3}$	0.75	$6.10 \cdot 10^{-2}$	0.50
256	1024	$3.66 \cdot 10^{-3}$	0.75	$4.32 \cdot 10^{-2}$	0.50
512	2048	$2.18 \cdot 10^{-3}$	0.75	$3.05 \cdot 10^{-2}$	0.50
1024	4096	$1.30 \cdot 10^{-3}$	0.75	$2.16 \cdot 10^{-2}$	0.50
2048	8192	$7.75 \cdot 10^{-4}$	0.75	$1.53 \cdot 10^{-2}$	0.50
4096	16384	$4.61 \cdot 10^{-4}$	0.75	$1.08 \cdot 10^{-2}$	0.50
8192	32768	$2.74 \cdot 10^{-4}$	0.75	$7.63 \cdot 10^{-3}$	0.50

Таблица 3

**Погрешность численного решения $Err_2 = \|y - u\|_{L_1}$ задачи 2
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_2 схема 1	p схема 1	Err_2 схема 2	p схема 2
64	256	$7.75 \cdot 10^{-4}$		$2.46 \cdot 10^{-2}$	
128	512	$2.67 \cdot 10^{-4}$	1.54	$1.22 \cdot 10^{-2}$	1.01
256	1024	$9.33 \cdot 10^{-5}$	1.52	$6.03 \cdot 10^{-3}$	1.02
512	2048	$3.18 \cdot 10^{-5}$	1.55	$2.99 \cdot 10^{-3}$	1.01
1024	4096	$1.06 \cdot 10^{-5}$	1.58	$1.49 \cdot 10^{-3}$	1.00
2048	8192	$3.73 \cdot 10^{-6}$	1.51	$7.40 \cdot 10^{-4}$	1.01
4096	16384	$1.29 \cdot 10^{-6}$	1.53	$3.69 \cdot 10^{-4}$	1.00
8192	32768	$4.47 \cdot 10^{-7}$	1.53	$1.84 \cdot 10^{-4}$	1.00

Таблица 4

**Погрешность численного решения $Err_3 = \|y - u\|_{L_2}$ задачи 2
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_3 схема 1	p схема 1	Err_3 схема 2	p схема 2
64	256	$2.34 \cdot 10^{-3}$		$3.53 \cdot 10^{-2}$	
128	512	$1.01 \cdot 10^{-3}$	1.21	$2.06 \cdot 10^{-2}$	0.78
256	1024	$4.36 \cdot 10^{-4}$	1.21	$1.21 \cdot 10^{-2}$	0.77
512	2048	$1.90 \cdot 10^{-4}$	1.20	$7.16 \cdot 10^{-3}$	0.76
1024	4096	$8.38 \cdot 10^{-5}$	1.18	$4.23 \cdot 10^{-3}$	0.76
2048	8192	$3.71 \cdot 10^{-5}$	1.18	$2.51 \cdot 10^{-3}$	0.75
4096	16384	$1.65 \cdot 10^{-5}$	1.17	$1.49 \cdot 10^{-3}$	0.75
8192	32768	$7.38 \cdot 10^{-6}$	1.16	$8.83 \cdot 10^{-4}$	0.75

Рис. 4. Сравнение решений задачи 3 при $N_x = 128$ и числе Куранта $\kappa = 0.25$: толстая сплошная линия – точное решение, тонкая сплошная линия – решение по бикомпактной схеме, штриховая линия – решение по противопоточной схеме.

Рис. 5. Ошибки численных решений задачи 3 при $N_x = 256$ и различных значениях числа Куранта: сплошные линии – решения по бикомпактной схеме, штриховые линии – решения по противопоточной схеме.

Таблица 5

**Погрешность численного решения $Err_2 = \|y - u\|_{L_1}$ задачи 3
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_2 схема 1	p схема 1	Err_2 схема 2	p схема 2
64	256	$4.11 \cdot 10^{-2}$		0.1804	
128	512	$2.37 \cdot 10^{-2}$	0.79	0.1260	0.52
256	1024	$1.37 \cdot 10^{-2}$	0.79	$8.83 \cdot 10^{-2}$	0.51
512	2048	$7.88 \cdot 10^{-3}$	0.80	$6.20 \cdot 10^{-2}$	0.51
1024	4096	$4.57 \cdot 10^{-3}$	0.79	$4.37 \cdot 10^{-2}$	0.50
2048	8192	$2.68 \cdot 10^{-3}$	0.77	$3.08 \cdot 10^{-2}$	0.50
4096	16384	$1.57 \cdot 10^{-3}$	0.77	$2.17 \cdot 10^{-2}$	0.51
8192	32768	$9.18 \cdot 10^{-4}$	0.77	$1.53 \cdot 10^{-2}$	0.50

Таблица 6

**Погрешность численного решения $Err_3 = \|y - u\|_{L_2}$ задачи 3
и порядок p его сходимости**

N_x	N_t	Err_3 схема 1	p схема 1	Err_3 схема 2	p схема 2
64	256	0.1186		0.2338	
128	512	$8.77 \cdot 10^{-2}$	0.44	0.1943	0.27
256	1024	$6.53 \cdot 10^{-2}$	0.43	0.1621	0.26
512	2048	$4.89 \cdot 10^{-2}$	0.42	0.1355	0.26
1024	4096	$3.68 \cdot 10^{-2}$	0.41	0.1136	0.25
2048	8192	$2.78 \cdot 10^{-2}$	0.40	$9.52 \cdot 10^{-2}$	0.25
4096	16384	$2.11 \cdot 10^{-2}$	0.40	$7.99 \cdot 10^{-2}$	0.25
8192	32768	$1.60 \cdot 10^{-2}$	0.40	$6.71 \cdot 10^{-2}$	0.25

4. Диссипативные и дисперсионные свойства бикомпактной схемы

Следуя практическому совету L.N. Trefethen [7], мы будем проводить Фурье-анализ [8,9] разностных схем не с помощью трудоемких выкладок, использующих преобразование Фурье, а путем выкладок, основанных на подстановке в разностные схемы для уравнения переноса (1) пробных сеточных функций следующего вида:

$$\begin{aligned} u_j^n &= \lambda^n \exp(ij\varphi), \quad \lambda = \rho \exp(-ikc^* \tau) = \rho \exp(-i\varphi \kappa c^* / c), \\ i &= \sqrt{-1}, \quad \rho = |\lambda|, \quad \varphi = kh, \quad \kappa = c\tau/h, \end{aligned} \quad (27)$$

где λ – множитель послойного перехода (в зарубежной литературе его называют *amplification factor* [7-9]), который в общем случае является комплексной величиной; ρ – модуль этой величины; k – действительное волновое число, c^* – численная фазовая скорость. При этом разностная задача для уравнения (1) рассматривается на всей оси x .

Сначала проведем Фурье-анализ бикомпактной схемы. В уравнения (24), (25) подставим выражения типа (27):

$$u_j^n = C_1 \lambda^n \exp(ij\varphi), \quad v_j^n = C_2 \lambda^n \exp(ij\varphi),$$

где C_1, C_2 – коэффициенты. В результате подстановки получим систему двух однородных линейных уравнений относительно C_1, C_2 , которая имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю. Приравняв нулю этот определитель, получим характеристическое уравнение

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 2 \left[(1-\kappa)(1-\kappa-\kappa^2) - \kappa(1-3\kappa+\kappa^2)e^{-i\varphi} \right] \lambda + (1-\kappa)^4 + \\ + 2\kappa(1-\kappa)(\kappa^2 - \kappa - 1)e^{-i\varphi} + \kappa^4 e^{-i2\varphi} = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Квадратное уравнение (28) имеет два корня λ_1 и λ_2 :

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \kappa^3 - 2\kappa + 1 - \kappa(\kappa^2 - 3\kappa + 1)e^{-i\varphi} + \kappa(1-\kappa)\sqrt{s}, \\ \lambda_2 &= \kappa^3 - 2\kappa + 1 - \kappa(\kappa^2 - 3\kappa + 1)e^{-i\varphi} - \kappa(1-\kappa)\sqrt{s}, \\ s &= \kappa^2 + 2\kappa - 2 - 2(\kappa^2 - \kappa - 5)e^{-i\varphi} + (\kappa^2 - 4\kappa + 1)e^{-i2\varphi}. \end{aligned} \quad (29)$$

Эти комплексные корни по модулю не превышают единицу, поэтому бикомпактная схема устойчива, что ранее было подтверждено исследованием сходимости схемы в разделе 3. Среди корней (29) первый корень λ_1 является физически корректным, для него нормированная численная фазовая скорость

$$\frac{c^*}{c} = -\frac{1}{\varphi\kappa} \arg \lambda = -\frac{1}{\varphi\kappa} \operatorname{arctg} \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda}{\operatorname{Re} \lambda} \right) \quad (30)$$

стремится к единице при $\varphi \rightarrow 0$, т.е. при $h \rightarrow 0$ для фиксированного значения волнового числа k . Второй корень λ_2 (29) является «паразитным», его влияние на численное решение исключается путем правильного выбора начальных и граничных условий в разностной задаче.

На рис. 6-9 показаны модуль множителя перехода ρ и нормированная численная фазовая скорость c^*/c (30) для $\lambda = \lambda_1$. Из этих рисунков видно, что при $\kappa = 1$ решение бикомпактной схемы является точным, при $\kappa = 0.5$ схема имеет максимальную диссипацию (минимальное значение ρ) и нулевую дисперсионную ошибку ($c^*/c = 1$).

Рис. 6. Зависимости модуля множителя перехода от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта.

Рис. 7. Зависимость модуля множителя перехода от числа Куранта при $\varphi = \pi$

Проведем анализ Фурье противопоточной схемы (26). Подставляя выражение для u_j^n (27) в (26), получим множитель послыного перехода

$$\lambda = 1 - \kappa + \kappa e^{-i\varphi} = 1 - \kappa + \kappa \cos \varphi - i\kappa \sin \varphi.$$

На рис. 10 показаны модуль множителя перехода ρ и нормированная численная фазовая скорость c^*/c (30) противопоточной схемы.

Рис. 8. Зависимости численной фазовой скорости от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта.

Рис. 9. Зависимость численной фазовой скорости от числа Куранта при $\varphi = \pi$.

Рис. 10. Зависимости модуля множителя перехода и численной фазовой скорости от безразмерного волнового числа φ при различных значениях числа Куранта.

Из рис. 10 видно, что при $\kappa = 1$ решение противоточной схемы является точным, при $\kappa = 0.5$ эта схема имеет максимальную диссипацию (минимальное значение ρ) и нулевую дисперсионную ошибку ($c^*/c = 1$) как в случае бикомпактной схемы.

5. Заключение

Интерполяционно-характеристическим методом построена явная бикомпактная разностная схема для решения одномерного линейного уравнения переноса. Схема основана на интерполяционном полиноме Эрмита. Для построения этого полинома используются значения искомой функции и ее первообразной функции в двух соседних целых узлах сетки. Для нахождения первообразной функции используется интегральное следствие уравнения переноса. В работе проведен сравнительный анализ бикомпактной схемы и схемы первого порядка аппроксимации с разностями против потока. Проведены расчеты решений тестовых начально-краевых задач с разной гладкостью начальных данных на сгущающихся вложенных сетках. Эти расчеты показали третий порядок сходимости бикомпактной схемы в случае гладких решений. В случае задач с разрывом начальных условий бикомпактная схема показала более высокую скорость сходимости в нормах L_2 и L_1 по сравнению с противопоточной схемой. Показано, что диссипативные и дисперсионные ошибки предложенной бикомпактной схемы невелики.

Библиографический список

1. Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 2012. – 656 с.
2. Takewaki H., Nishiguchi A., Yabe T. Cubic interpolated Pseudo-particle method (CiP) for solving hyperbolic-type equations // J. Comput. Phys. 1985. V. 61. P. 261–268. DOI: 10.1016/0021-9991(85)90085-3
3. Ogata Y., Yabe T. Multi-dimensional semi-Lagrangian characteristic approach to the shallow water equations by the CIP method // Int. J. Comput. Eng. Sci. 2004. V. 5, No. 3, P. 699-730. DOI: 10.1142/S1465876304002642
4. Магомедов К.Н., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 1988.
5. Аристова Е.Н., Овчаров Г.И. Эрмитова характеристическая схема для неоднородного линейного уравнения переноса // Матем. моделирование. 2020. Т. 32. № 3. С. 3–18. DOI: 10.20948/mm-2020-03-01
6. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Бикомпактные схемы четвертого порядка аппроксимации для гиперболических уравнений // ДАН. 2010. Т. 430. № 4. С. 470-474. DOI: 10.1134/S1064562410010400
7. Trefethen L.N. Finite difference and spectral methods for ordinary and partial differential equations, unpublished text, 1996; freely available online <http://people.maths.ox.ac.uk/trefethen/pdtext.html>.
8. Vichnevetsky R., Bowles J.B. Fourier analysis of numerical approximations of hyperbolic equations. Philadelphia: SIAM, 1982.
9. Sengupta T.K. High accuracy computing methods: fluid flows and wave phenomena. Delhi: Cambridge University Press, 2013.

Оглавление

1. Введение	3
2. Бикомпактная интерполяционно-характеристическая схема	4
3. Результаты тестовых расчетов	8
4. Диссипативные и дисперсионные свойства бикомпактной схемы	16
5. Заключение	19
Библиографический список	19