ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Круковский А.Ю.,
Повещенко Ю.А., Клочкова Л.В.,
Сузан Д.В.

Оценки сходимости
итерационных алгоритмов
численного решения
трехмерных нестационарных
задач магнитной
гидродинамики

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Оценки сходимости итерационных алгоритмов численного решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики / А.Ю.Круковский [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 94. 17 с. doi:[10.20948/prepr-2019-94](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-94)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-94>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, Л.В. Клочкова,
Д.В. Сузан**

**Оценки сходимости итерационных алгоритмов
численного решения
трехмерных нестационарных задач
магнитной гидродинамики**

**МОСКВА
2019**

А.Ю. Круковский, Ю.А. Повещенко, Л.В. Клочкова, Д.В. Сузан
**Оценки сходимости итерационных алгоритмов для решения
трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики**

В работе исследуется сходимость примененного к полностью консервативным разностным схемам (ПКРС) трехмерной магнитной гидродинамики (МГД) метода комбинированного и отдельного решения групп разностных уравнений, разбитых по физическим процессам (методы расщепления по физическим процессам). Показана область применимости данных методов. Справедливость полученных в работе оценок подтверждена численными расчетами.

Ключевые слова: трехмерная магнитная гидродинамика, неявная полностью консервативная разностная схема, сходимость итерационного процесса

***Alexander Yuryievich Krukovskiy, Yuriy Andreevich Poveschenko,
Liudmila Viktorovna Klochkova, Dmitriy Valerievich Suzan***

**Convergence estimates of the iterative algorithm for numerical solution of
three-dimensional nonstationary problems of magnetic hydrodynamics**

In this paper, we investigate the convergence of the applied to the completely conservative difference schemes (CCDS) 3-D magnetic hydrodynamics (MHD) methods of the combined and separated solution of groups of difference equations broken down by physical processes (the methods of splitting into processes). The area of applicability of these methods is shown. The validity of the estimates obtained is confirmed by numerical calculations.

Keywords: 3-D magnetic hydrodynamics, implicit completely conservative difference scheme, convergence iterative process.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 17-01-00361_a, 16-29-15081-офи_м, 18-07-00841_a).

ОГЛАВЛЕНИЕ

1. Введение	3
2. Исходная система уравнений	4
3. Разностная схема	5
4. Оценки сходимости алгоритма	9
5. Примеры расчетов	15
6. Заключение.....	17
7. Список литературы	17

1. Введение

При моделировании конкретной трехмерной задачи МГД обычно определяется специфика задачи и исходя из этого выбирается численный метод ее решения. Созданный на основе этого метода решения разностных уравнений комплекс программ (КП) способен решать лишь сравнительно узкий класс задач, а задачи вне данного класса решаются неэффективно или вообще не могут быть решены. Создание же универсального алгоритма для достаточно широкого класса задач очень редко приводит к хорошим результатам из-за чрезвычайной сложности его программной реализации. Кроме того, применение такого алгоритма к конкретной задаче требует машинных ресурсов существенно больше, чем решение той же задачи с помощью алгоритмов, учитывающих его специфику. В случае проведения вычислительного эксперимента (ВЭ), требующего достаточно большого числа трехмерных расчетов, это существенно тормозит работу, а часто делает ее невыполнимой за разумное время.

ПКРС гарантируют не только выполнение разностных аналогов основных законов сохранения (массы, импульса и энергии), но и ряда дополнительных сеточных соотношений, необходимость которых диктуется физическими соображениями [1]. Неявность разностных схем существенно снижает ограничения на величину временного шага интегрирования уравнений. При проведении широкомасштабного ВЭ большое значение имеют затраченные машинные ресурсы на один расчет. Машинное время на расчет зависит от величины временного шага на протяжении всего расчета и "стоимости" одного шага по времени. Кратко требования к алгоритмам и их программным реализациям можно сформулировать следующим образом: 1) экономичность, т.е. минимальные машинные ресурсы при расчете одного варианта задачи; 2) универсальность, т.е. алгоритм должен обеспечивать проведение расчетов в достаточно широкой предметной области; 3) гибкость, т.е. переход от одной конкретной постановки задачи к другой должен требовать минимум затрат труда и времени.

В данной работе исследуется сходимость примененного к неявной ПКРС МГД метода комбинированного решения групп разностных уравнений, разбитых по физическим процессам [2-4] ("динамическая группа", "тепловая группа" и "электромагнитная группа"). Данный метод заключается в том, что эти три группы объединяются следующим образом: в первую "новую" группу включаются уравнения динамики и электромагнитного поля, а во вторую группу – уравнения энергии. Уравнение состояния является уравнением-связкой между двумя группами. Уравнения обеих групп решаются методом Ньютона относительно определенных переменных, а не входящие в эту группу переменные считаются "замороженными", берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом, сходимость которого контролируется по точности выполнения общего баланса энергии и точности распределения полной энергии

по ее отдельным видам. Полученные в данной работе оценки подтверждены численными расчетами.

2. Исходная система уравнений

Мы будем исходить из следующей записи системы уравнений МГД в декартовой системе координат [5].

$$\frac{dx}{dt} = u; \quad \frac{dy}{dt} = w; \quad \frac{dz}{dt} = v; \quad (1)$$

$$\rho \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial w}{\partial y} + \rho \frac{\partial v}{\partial z} = 0; \quad (2)$$

$$\rho \frac{du}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_x^2)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_x B_y)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_x B_z)}{\partial z}; \quad (3)$$

$$\rho \frac{dw}{dt} = -\frac{\partial}{\partial y} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_x B_y)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_y^2)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_y B_z)}{\partial z}; \quad (4)$$

$$\rho \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial}{\partial z} \left(P + \frac{B_x^2}{8\pi} + \frac{B_y^2}{8\pi} + \frac{B_z^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_x B_z)}{\partial x} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_y B_z)}{\partial y} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial (B_z^2)}{\partial z}; \quad (5)$$

$$P \frac{d\varepsilon}{dt} = -\rho P \frac{\partial (1/\rho)}{\partial t} - \frac{\partial W_x}{\partial x} - \frac{\partial W_y}{\partial y} - \frac{\partial W_z}{\partial z} + G_{\text{Джс}}; \quad (6)$$

$$G_{\text{Джс}} = \frac{1}{4\pi} (E_x J_x + E_y J_y + E_z J_z); \quad (7)$$

$$J_x = \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}; \quad J_y = \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}; \quad J_z = \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}; \quad (8)$$

$$W_x = -\kappa_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{xz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (9)$$

$$W_y = -\kappa_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{yz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (10)$$

$$W_z = -\kappa_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} - \kappa_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} - \kappa_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (11)$$

$$\kappa_{\alpha\alpha} = \kappa_{\parallel} \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right)^2 - \kappa_{\perp} \left(1 - \left(\frac{B_{\alpha}}{B} \right)^2 \right), \quad \alpha = x, y, z; \quad (12)$$

$$\kappa_{\alpha\beta} = \kappa_{\beta\alpha} = (\kappa_{\parallel} - \kappa_{\perp}) \frac{B_{\alpha} B_{\beta}}{B^2}, \quad \alpha = x, y, z, \quad \beta = x, y, z, \quad \alpha \neq \beta; \quad (13)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_x}{\rho} \right) = \frac{\partial E_y}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial y} + \left(B_x \frac{\partial u}{\partial x} + B_y \frac{\partial u}{\partial y} + B_z \frac{\partial u}{\partial z} \right); \quad (14)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_y}{\rho} \right) = \frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} + \left(B_x \frac{\partial w}{\partial x} + B_y \frac{\partial w}{\partial y} + B_z \frac{\partial w}{\partial z} \right); \quad (15)$$

$$\rho \frac{d}{dt} \left(\frac{B_z}{\rho} \right) = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} + \left(B_x \frac{\partial v}{\partial x} + B_y \frac{\partial v}{\partial y} + B_z \frac{\partial v}{\partial z} \right); \quad (16)$$

$$E_\alpha = \frac{1}{4\pi\sigma_\perp} J_\alpha + \frac{\sigma_\perp - \sigma_\parallel}{4\pi\sigma_\perp\sigma_\parallel} \frac{B_\alpha}{B^2} (\vec{J}, \vec{B}), \quad \alpha = x, y, z; \quad (17)$$

$$(\vec{J}, \vec{B}) = (J_x B_x + J_y B_y + J_z B_z). \quad (18)$$

Здесь t – время, $\vec{U} = (u, w, v)$ – скорость вещества, ρ – плотность, P – газодинамическое давление, T – температура, ε – удельная внутренняя энергия, отнесенная к единице массы, $\vec{W} = (W_x, W_y, W_z)$ – поток тепла через поперечное сечение области, $\vec{B} = (B_x, B_y, B_z)$ – вектор магнитной индукции, $\vec{E} = (E_x, E_y, E_z)$ – вектор электрического поля, $\vec{J} = (J_x, J_y, J_z)$ – плотность тока, $G_{\text{дж}}$ – массовая плотность энергии джоулева нагрева, σ и κ – коэффициенты электро- и теплопроводности соответственно.

3. Разностная схема

Отметим одно обстоятельство. Анализ сходимости итерационного процесса комбинированного решения системы разностных уравнений МГД был проведен для одномерного плоского случая в [6] и для двумерного случая в декартовых координатах в [5]. Рассматривался случай $\sigma = \infty$ и $\kappa = 0$. Было показано, что для неявных схем процесс будет безусловно устойчивым лишь при выполнении условия

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq (\gamma - 2)P, \quad (19)$$

а при $\frac{B^2}{8\pi} < (\gamma - 2)P$ условие устойчивости в одномерном случае имеет вид

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2\rho \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}, \quad (20)$$

а в двумерном случае условие устойчивости имеет вид

$$\Delta t < \frac{\Delta m}{2(h_x + h_y) \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (21)$$

Дальнейший учет диссипативных процессов, как показано в [7], ослабляет ограничение на временной шаг. Поэтому при исследовании устойчивости процесса решения системы трехмерных разностных уравнений МГД методом комбинированного решения будем считать, что диссипативные процессы отсутствуют. Кроме того, ограничимся случаем течения в магнитном поле,

ориентированным перпендикулярно плоскости течения ($B_x=B_y=0$). Заметим также, что при одновременном решении уравнений динамики и электромагнитного поля учет члена, аппроксимирующего выражение $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial(B_z^2)}{\partial z}$ в (5), и члена, аппроксимирующего выражение $B_z \frac{\partial v}{\partial z}$ в (16), может лишь ослабить ограничение на временной шаг при исследовании устойчивости итерационного процесса. Поэтому при исследовании устойчивости можно пренебречь этими членами.

Введем пространства сеточных функций, определенных в узлах и ячейках разностной сетки, обозначив их H_Ω и H_w соответственно. Для записи сеточных функций $f \in H_\Omega$ будем использовать индексы (i, j, k): $f_{ijk} = f \in H_\Omega$. Сеточные функции $g \in H_w$ будем отмечать индексами (m, l, n): $g_{mln} = g \in H_w$. Положим массы всех ячеек $\Delta m_{mln} = \Delta m = \text{const}$.

В предположениях, описанных выше, система (1)-(18) аппроксимируется неявной ПКРС в лагранжевых переменных:

$$\Delta m u_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x} \right)^{(\sigma_1)} \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (22)$$

$$\Delta m w_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y} \right)^{(\sigma_2)} \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (23)$$

$$\Delta m v_t = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \right)^{(\sigma_3)} \left(R \hat{\rho}_r \hat{T}_r + \frac{\hat{B}_r B_r}{8\pi} \right); \quad (24)$$

$$\hat{B} \hat{V} = B V; \quad (25)$$

$$\Delta m \left(\frac{1}{\rho} \right)_t = V_t = \sum_{q \in III_1} \left(\left(\frac{\partial V}{\partial x_q} \right)^{(\sigma_1)} u_q^{(0,5)} + \left(\frac{\partial V}{\partial y_q} \right)^{(\sigma_2)} w_q^{(0,5)} + \left(\frac{\partial V}{\partial z_q} \right)^{(\sigma_3)} v_q^{(0,5)} \right); \quad (26)$$

$$\frac{1}{\gamma - 1} (\hat{T} - T) = - \frac{\hat{\rho} \hat{T}}{\Delta m} (\hat{V} - V). \quad (27)$$

Здесь объем ячейки

$$V_{mln} = \frac{1}{6} \left[(x_{10} - x_{13})(S_1^x + S_3^x) + (y_{10} - y_{13})(S_1^y + S_3^y) + (z_{10} - z_{13})(S_1^z + S_3^z) + \right. \\ \left. + (x_{12} - x_{11})(S_2^x + S_4^x) + (y_{12} - y_{11})(S_2^y + S_4^y) + (z_{12} - z_{11})(S_2^z + S_4^z) + \right. \\ \left. + (x_{14} - x_9)(S_5^x + S_6^x) + (y_{14} - y_9)(S_5^y + S_6^y) + (z_{14} - z_9)(S_5^z + S_6^z) \right],$$

где

$$r_9 = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_3 + r_4); \quad r_{10} = \frac{1}{4}(r_1 + r_2 + r_5 + r_6); \quad r_{11} = \frac{1}{4}(r_1 + r_4 + r_5 + r_8); \\ r_{12} = \frac{1}{4}(r_2 + r_3 + r_6 + r_7); \quad r_{13} = \frac{1}{4}(r_3 + r_4 + r_7 + r_8); \quad r_{14} = \frac{1}{4}(r_5 + r_6 + r_7 + r_8); \\ r_1 = r_{i+1jk}; \quad r_2 = r_{i+1j+1k}; \quad r_3 = r_{ij+1k}; \quad r_4 = r_{ijk}; \quad r_5 = r_{i+1jk+1}; \quad r_6 = r_{i+1j+1k+1};$$

$$r_7 = r_{ij+1k+1}; \quad r_8 = r_{ijk+1}; \quad r = x, y, z;$$

$$S_1^r = \frac{1}{2}[(\psi_2 - \psi_5)(\theta_6 - \theta_1) + (\psi_6 - \psi_1)(\theta_5 - \theta_2)];$$

$$S_2^r = \frac{1}{2}[(\psi_7 - \psi_2)(\theta_6 - \theta_3) + (\psi_6 - \psi_3)(\theta_2 - \theta_7)];$$

$$S_3^r = \frac{1}{2}[(\psi_3 - \psi_8)(\theta_7 - \theta_4) + (\psi_7 - \psi_4)(\theta_8 - \theta_3)];$$

$$S_4^r = \frac{1}{2}[(\psi_8 - \psi_1)(\theta_5 - \theta_4) + (\psi_5 - \psi_4)(\theta_1 - \theta_8)];$$

$$S_5^r = \frac{1}{2}[(\psi_1 - \psi_3)(\theta_2 - \theta_4) + (\psi_2 - \psi_4)(\theta_3 - \theta_1)];$$

$$S_6^r = \frac{1}{2}[(\psi_5 - \psi_7)(\theta_6 - \theta_8) + (\psi_6 - \psi_8)(\theta_7 - \theta_5)];$$

$r = x, y, z$. Если $r=x$, то $\psi=y$, $\theta=z$; если $r=y$, то $\psi=z$, $\theta=x$; если $r=z$, то $\psi=x$, $\theta=y$.

$$\Delta m_{mln} = \hat{\rho}_{mln} \hat{V}_{mln} = \rho_{mln} V_{mln},$$

σ_k ($k = 1, 2, 3$) – весовые множители.

Сеточные функции x, y, z, u, w и v определены в узлах разностной сетки, а сеточные функции ρ, P, T, B и V – в ячейках.

При записи (22)-(27) использованы безындексные представления сеточных функций [1]. В (22)-(24) и (27) учтено, что $P=R\rho T$, $\varepsilon = \frac{RT}{\gamma - 1}$.

Уравнения (22)-(27) записаны на разностных шаблонах $\Pi_1(m,l,n)$ и $\Pi_2(i,j,k)$.

Π_1 – шаблон ячейки

Π_2 – шаблон узла

При анализе устойчивости ограничимся случаем $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3=0$.

Для анализа устойчивости производные объемов по координатам, входящие в (22)-(24), удобно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_1} &= \frac{1}{12} (S_{18}^r - S_{13}^r - S_{16}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_2} &= \frac{1}{12} (S_{27}^r + S_{24}^r - S_{25}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_3} &= \frac{1}{12} (-S_{36}^r + S_{13}^r - S_{38}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_4} &= \frac{1}{12} (-S_{45}^r - S_{24}^r - S_{47}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_5} &= \frac{1}{12} (S_{45}^r - S_{57}^r + S_{25}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_6} &= \frac{1}{12} (S_{36}^r + S_{68}^r + S_{16}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_7} &= \frac{1}{12} (-S_{27}^r + S_{57}^r + S_{47}^r); \\
 \frac{\partial V_{mln}}{\partial r_8} &= \frac{1}{12} (-S_{18}^r - S_{68}^r + S_{38}^r).
 \end{aligned} \tag{28}$$

При такой форме записи видно, что любой член S_{k1k2}^r входит в k1 и k2 уравнение системы (28), причем с противоположным знаком.

Здесь

$$\begin{aligned}
 S_{18}^r &= \frac{1}{2} (S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_5 - \theta_4) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_4 - \psi_5); \\
 S_{13}^r &= \frac{1}{2} (S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_2 - \theta_4) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_4 - \psi_2); \\
 S_{16}^r &= \frac{1}{2} (S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_2 - \theta_5) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_5 - \psi_2); \\
 S_{27}^r &= \frac{1}{2} (S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_6 - \theta_3) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_3 - \psi_6); \\
 S_{24}^r &= \frac{1}{2} (S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_1 - \theta_3) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_3 - \psi_1); \\
 S_{25}^r &= \frac{1}{2} (S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_6 - \theta_1) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_1 - \psi_6); \\
 S_{36}^r &= \frac{1}{2} (S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_7 - \theta_2) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_2 - \psi_7); \\
 S_{38}^r &= \frac{1}{2} (S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_7 - \theta_4) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_4 - \psi_7); \\
 S_{45}^r &= \frac{1}{2} (S_1^r + S_3^r) + (\psi_{12} - \psi_{11})(\theta_8 - \theta_1) + (\theta_{12} - \theta_{11})(\psi_1 - \psi_8); \\
 S_{47}^r &= \frac{1}{2} (S_5^r + S_6^r) + (\psi_{10} - \psi_{13})(\theta_3 - \theta_8) + (\theta_{10} - \theta_{13})(\psi_8 - \psi_3); \\
 S_{57}^r &= \frac{1}{2} (S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_6 - \theta_8) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_8 - \psi_6);
 \end{aligned}$$

$$S_{68}^r = \frac{1}{2}(S_2^r + S_4^r) + (\psi_{14} - \psi_9)(\theta_5 - \theta_7) + (\theta_{14} - \theta_9)(\psi_7 - \psi_5).$$

4. Оценки сходимости алгоритма

Отметим, что для расчетов течений излучающей многозарядной плазмы исходные модели типа (1)-(18) значительно усложняются – добавляются уравнения кинетики ионизации, радиационного электрообмена, учитывается двухтемпературность, применяются различные модификации закона Ома (например, учитывается эффект Холла), используются табличные данные по состоянию вещества, транспортным коэффициентам и оптическим свойствам. Полный анализ сходимости методов решения нелинейных уравнений (особенно в трехмерном случае), соответствующих таким методам, провести зачастую либо не удастся, либо количество упрощающих предположений таково, что результаты анализа мало пригодны для практического исследования.

В настоящей работе сходимость алгоритма исследуется для линеаризованной системы уравнений (22)-(27). Такой подход к изучению методов решения нелинейной системы МГД-уравнений, несмотря на теоретическую неполноту, позволяет сформулировать физически содержательные критерии сходимости, которыми удобно пользоваться при проведении практических расчетов. Полученные при анализе линеаризованной системы оценки можно далее использовать для изучения сходимости метода решения в нелинейном случае, поскольку линеаризация является центральным пунктом многих методик [1, 8, 9]. Выводы из линейного анализа проверены, как это обычно и делается, в методических расчетах.

При построении алгоритма решения системы нелинейных уравнений МГД используется принцип локального расщепления физических процессов, реализующийся через разделение системы разностных уравнений по видам физических процессов: уравнения динамики плазмы (D), уравнения электромагнитного поля (EM) и уравнения теплового баланса (T), описывающие энергообмен между компонентами плазмы (если рассматривается процесс релаксации температур ионов и электронов), а также энергетику ионизации-рекомбинации и взаимодействия вещества с излучением. В простейшем случае уравнение (T) одно – (27). Оно описывает изменение температуры жидкой частицы при адиабатических изменениях ее объема. Для построения конкретного алгоритма уравнения различных видов объединяются в группы (аналогично [1]). В данной работе рассматривается алгоритм, в котором разбиение на группы происходит следующим образом: к первой группе относят динамические (D) и электромагнитные (EM) уравнения, а ко второй – тепловые (T) уравнения. Уравнения в каждой из этих двух групп решаются относительно определенных переменных, причем переменные, не входящие в данную группу, считаются "замороженными" и берутся с предыдущей итерации. Последовательное решение групп уравнений связывается внешним итерационным процессом, в котором контролируется как точность решения разностных уравнений, так и точность выполнения

энергобаланса.

Линеаризованные уравнения системы (22)-(27), соответствующие принятым выше ограничениям и характеру итерационного процесса, запишем в виде

$$\Delta m \frac{u_{ijk}^{s+1} - u_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (29)$$

$$\Delta m \frac{w_{ijk}^{s+1} - w_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (30)$$

$$\Delta m \frac{v_{ijk}^{s+1} - v_{ijk}}{\Delta t} = \sum_{r \in III_2} \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) \left(R(\rho_r T_r + T_r \delta \rho_r^{s+1} + \rho_r \delta T_r^s) + \frac{B_r^{s+1} B_r}{8\pi} \right); \quad (31)$$

$$\delta \rho_{mln}^{s+1} = -\frac{\rho_{mln}^2}{\Delta m} (V_{mln}^{s+1} - V_{mln}); \quad (32)$$

$$B_{mln}^{s+1} = B_{mln} \left[1 - \frac{\rho_{mln}}{\Delta m} (V_{mln}^{s+1} - V_{mln}) \right]; \quad (33)$$

$$\delta T_{mln}^s = -\frac{\gamma - 1}{\Delta m} \rho_{mln} T_{mln} (V_{mln}^s - V_{mln}); \quad (34)$$

где

$$V_{mln}^{s+1} - V_{mln} = \frac{\Delta t}{12} \sum_{q \in III_1} \left[\left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial x_q} \right) (u_q + u_q^{s+1}) + \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial y_q} \right) (w_q + w_q^{s+1}) + \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial z_q} \right) (v_q + v_q^{s+1}) \right].$$

Здесь искомые величины будем обозначать индексом "s" – соответственно номеру итерации. Исключая из (29)-(31) $\delta \rho_{mln}^{s+1}$, B_{mln}^{s+1} и δT_{mln}^s с помощью (32)-(34), получим систему уравнений, связывающую U_{ijk}^{s+1} и U_{ijk}^s ($\vec{U} = (u, w, v)$),

$$(\Lambda_1 U^{s+1})_{ijk} = -(\Lambda_2 U^s)_{ijk} + F_{ijk}, \quad (35)$$

где $\vec{F}_{ijk} = (F_{ijk}^{(1)}, F_{ijk}^{(2)}, F_{ijk}^{(3)})$, $F_{ijk}^{(1)}$, $F_{ijk}^{(2)}$ и $F_{ijk}^{(3)}$ – свободные члены в преобразованных уравнениях (29), (30) и (31) соответственно, в которые входят величины с предыдущего слоя по времени.

$$(\Lambda_1 U)_{ijk} = (\Lambda_1(u)_{ijk}, \Lambda_1(w)_{ijk}, \Lambda_1(v)_{ijk}), \quad (36)$$

$$(\Lambda_2 U)_{ijk} = (\Lambda_2(u)_{ijk}, \Lambda_2(w)_{ijk}, \Lambda_2(v)_{ijk}),$$

$$\Lambda_1(u)_{ijk} = \kappa u_{ijk} + \sum_{r \in III_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_1(w)_{ijk} = \kappa w_{ijk} + \sum_{r \in III_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_1(v)_{ijk} = \kappa v_{ijk} + \sum_{r \in III_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_2(u)_{ijk} = \sum_{r \in III_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_2(w)_{ijk} = \sum_{r \in \mathcal{M}_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} \right) H_r,$$

$$\Lambda_2(v)_{ijk} = \sum_{r \in \mathcal{M}_2} c2_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} \right) H_r.$$

Здесь

$$\kappa = 2 \left(\frac{\Delta m}{\Delta t} \right)^2,$$

$$c1_{mln} = RT_{mln} \rho_{mln}^2 + \frac{B_{mln}^2 \rho_{mln}}{8\pi} = P_{mln} \rho_{mln} + \frac{B_{mln}^2 \rho_{mln}}{8\pi},$$

$$c2_{mln} = (\gamma - 1) RT_{mln} \rho_{mln}^2 = (\gamma - 1) P_{mln} \rho_{mln},$$

$$H_{mln} = \sum_{q \in \mathcal{M}_1} \left(\frac{\partial V_{mln}}{\partial x_q} u_q^{s+1} + \frac{\partial V_{mln}}{\partial y_q} w_q^{s+1} + \frac{\partial V_{mln}}{\partial z_q} v_q^{s+1} \right).$$
(37)

Рассмотрим итерационный процесс (35) на множестве сеточных функций, принимающих нулевые значения на границе:

$$U \in \Omega_h^\circ, \quad U|_{\Gamma_h} = 0.$$

Покажем, что разностные операторы Λ_1 и Λ_2 обладают следующими свойствами: $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$, $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Вычислим скалярное произведение $(\Lambda_1 U, U)$. Учитывая форму записи производной объема по координатам (28), имеем:

$$\begin{aligned} (\Lambda_1 U, U) &= \sum_{ijk} \left(\Lambda_1(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + \Lambda_1(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + \Lambda_1(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m \right) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \Delta m \sum_{ijk} \left[\sum_{r \in \mathcal{M}_2} c1_r H_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \right] = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \Delta m \sum_{ijk} \left(\sum_{r \in \mathcal{M}_2} c1_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \right) \times \\ &\quad \times \left(\sum_{q \in \mathcal{M}_1} \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_q} u_q + \frac{\partial V_r}{\partial y_q} w_q + \frac{\partial V_r}{\partial z_q} v_q \right) \right) = \\ &= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} c1_{mln} I_{ijk}^2 = (U, \Lambda_1 U) > 0, \end{aligned}$$

т. е. $\Lambda_1 = \Lambda_1^* > 0$.

Здесь суммирование идет по всем узлам, кроме граничных; m=i, l=j, n=k.

$$\begin{aligned}
I = & \left[(u_1 - u_8) S_{18}^x + (u_3 - u_1) S_{13}^x + (u_6 - u_1) S_{16}^x + (u_2 - u_7) S_{27}^x + \right. \\
& + (u_2 - u_4) S_{24}^x + (u_5 - u_2) S_{25}^x + (u_6 - u_3) S_{36}^x + (u_8 - u_3) S_{38}^x + \\
& + (u_5 - u_4) S_{45}^x + (u_7 - u_4) S_{47}^x + (u_7 - u_5) S_{57}^x + (u_6 - u_8) S_{68}^x + \\
& + (w_1 - w_8) S_{18}^y + (w_3 - w_1) S_{13}^y + (w_6 - w_1) S_{16}^y + (w_2 - w_7) S_{27}^y + \\
& + (w_2 - w_4) S_{24}^y + (w_5 - w_2) S_{25}^y + (w_6 - w_3) S_{36}^y + (w_8 - w_3) S_{38}^y + \\
& + (w_5 - w_4) S_{45}^y + (w_7 - w_4) S_{47}^y + (w_7 - w_5) S_{57}^y + (w_6 - w_8) S_{68}^y + \\
& + (v_1 - v_8) S_{18}^z + (v_3 - v_1) S_{13}^z + (v_6 - v_1) S_{16}^z + (v_2 - v_7) S_{27}^z + \\
& + (v_2 - v_4) S_{24}^z + (v_5 - v_2) S_{25}^z + (v_6 - v_3) S_{36}^z + (v_8 - v_3) S_{38}^z + \\
& \left. + (v_5 - v_4) S_{45}^z + (v_7 - v_4) S_{47}^z + (v_7 - v_5) S_{57}^z + (v_6 - v_8) S_{68}^z \right].
\end{aligned}$$

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
(\Lambda_2 U, U) &= \sum_{ijk} \left(\Lambda_2(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + \Lambda_2(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + \Lambda_2(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m \right) = \\
&= \Delta m \sum_{ijk} \left[\sum_{r \in III_2} c 2_r H_r \left(\frac{\partial V_r}{\partial x_{ijk}} u_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial y_{ijk}} w_{ijk} + \frac{\partial V_r}{\partial z_{ijk}} v_{ijk} \right) \right] = \\
&= \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} c 2_{mln} I_{ijk}^2 = (U, \Lambda_2 U) > 0,
\end{aligned}$$

т.е. $\Lambda_2 = \Lambda_2^* > 0$.

Запишем итерационный процесс (35) в каноническом виде:

$$BU_t + AU = F, \quad U_t = \frac{U^{s+1} - U^s}{\tau_s}, \quad (38)$$

где $B = \Lambda_1$, $A = \Lambda_1 + \Lambda_2$, $\tau_s \equiv 1$, причем $B = B^* > 0$, $A = A^* > 0$.

Операторы A и B не зависят от номера итерации, т.е. процесс является стационарным. Как показано в [9], достаточным условием для сходимости этого итерационного процесса является выполнение неравенства:

$$B \geq 0,5 \tau_s A, \quad (39)$$

или, что эквивалентно в силу (35), $\Lambda_1 \geq \Lambda_2$.

Вычислим скалярное произведение

$$\begin{aligned}
R = ((\Lambda_1 - \Lambda_2)U, U) &= \sum_{ijk} \left((\Lambda_1 - \Lambda_2)(u)_{ijk} u_{ijk} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(w)_{ijk} w_{ijk} \Delta m + (\Lambda_1 - \Lambda_2)(v)_{ijk} v_{ijk} \Delta m \right) = \\
&= \Delta m \kappa \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) + \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} (c 1_{mln} - c 2_{mln}) I_{ijk}^2.
\end{aligned}$$

Заметим, что для всех (i, j, k) справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
& \max \left(\left| u_{i+1jk} - u_{ijk+1} \right|, \left| u_{ij+1k} - u_{i+1jk} \right|, \left| u_{i+1j+1k+1} - u_{i+1jk} \right|, \left| u_{i+1j+1k} - u_{ij+1k+1} \right|, \right. \\
& \left| u_{i+1j+1k} - u_{ijk} \right|, \left| u_{i+1jk+1} - u_{i+1j+1k} \right|, \left| u_{i+1j+1k+1} - u_{ij+1k} \right|, \left| u_{ijk+1} - u_{ij+1k} \right|, \\
& \left| u_{i+1jk+1} - u_{ijk} \right|, \left| u_{ij+1k+1} - u_{ijk} \right|, \left| u_{ij+1k+1} - u_{i+1jk+1} \right|, \left| u_{i+1j+1k+1} - u_{i+1jk+1} \right|, \\
& \left| w_{i+1jk} - w_{ijk+1} \right|, \left| w_{ij+1k} - w_{i+1jk} \right|, \left| w_{i+1j+1k+1} - w_{i+1jk} \right|, \left| w_{i+1j+1k} - w_{ij+1k+1} \right|, \\
& \left| w_{i+1j+1k} - w_{ijk} \right|, \left| w_{i+1jk+1} - w_{i+1j+1k} \right|, \left| w_{i+1j+1k+1} - w_{ij+1k} \right|, \left| w_{ijk+1} - w_{ij+1k} \right|, \\
& \left| w_{i+1jk+1} - w_{ijk} \right|, \left| w_{ij+1k+1} - w_{ijk} \right|, \left| w_{ij+1k+1} - w_{i+1jk+1} \right|, \left| w_{i+1j+1k+1} - w_{i+1jk+1} \right|, \\
& \left| v_{i+1jk} - v_{ijk+1} \right|, \left| v_{ij+1k} - v_{i+1jk} \right|, \left| v_{i+1j+1k+1} - v_{i+1jk} \right|, \left| v_{i+1j+1k} - v_{ij+1k+1} \right|, \\
& \left| v_{i+1j+1k} - v_{ijk} \right|, \left| v_{i+1jk+1} - v_{i+1j+1k} \right|, \left| v_{i+1j+1k+1} - v_{ij+1k} \right|, \left| v_{ijk+1} - v_{ij+1k} \right|, \\
& \left. \left| v_{i+1jk+1} - v_{ijk} \right|, \left| v_{ij+1k+1} - v_{ijk} \right|, \left| v_{ij+1k+1} - v_{i+1jk+1} \right|, \left| v_{i+1j+1k+1} - v_{i+1jk+1} \right| \right) \leq \\
& \leq \sqrt{2 \sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \left(u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 \right)}.
\end{aligned}$$

Поэтому для любого U справедливо следующее неравенство:

$$\begin{aligned}
& \sum_{ijk} I_{ijk}^2 \leq 2 \sum_{ijk} \left(\sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \left(u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 \right) \right) \cdot \\
& \left(S_{18}^x + S_{13}^x + S_{16}^x + S_{27}^x + S_{24}^x + S_{25}^x + S_{36}^x + S_{38}^x + \right. \\
& + S_{45}^x + S_{47}^x + S_{57}^x + S_{68}^x + S_{18}^y + S_{13}^y + S_{16}^y + S_{27}^y + S_{24}^y + S_{25}^y + S_{36}^y + S_{38}^y + S_{45}^y + S_{47}^y + S_{57}^y + S_{68}^y + \\
& + S_{18}^z + S_{13}^z + S_{16}^z + S_{27}^z + S_{24}^z + S_{25}^z + S_{36}^z + S_{38}^z + S_{45}^z + S_{47}^z + S_{57}^z + S_{68}^z \Big)^2 \leq \\
& 2 \times 9 \times 144 \times \left(S^x + S^y + S^z \right)^2 \cdot \sum_{ijk} \left(\sum_{k_1=0}^1 \sum_{k_2=0}^1 \sum_{k_3=0}^1 \left(u_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + w_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 + v_{i+k_1j+k_2k+k_3}^2 \right) \right),
\end{aligned}$$

где

$$S^x = h_y h_z; \quad S^y = h_x h_z; \quad S^z = h_x h_y;$$

$$\begin{aligned}
h_x = \max_{ijk} \Big\{ & \left| x_{i+1jk} - x_{ijk+1} \right|, \left| x_{ij+1k} - x_{i+1jk} \right|, \left| x_{i+1j+1k+1} - x_{i+1jk} \right|, \left| x_{i+1j+1k} - x_{ij+1k+1} \right|, \\
& \left| x_{i+1j+1k} - x_{ijk} \right|, \left| x_{i+1jk+1} - x_{i+1j+1k} \right|, \left| x_{i+1j+1k+1} - x_{ij+1k} \right|, \left| x_{ijk+1} - x_{ij+1k} \right|, \\
& \left| x_{i+1jk+1} - x_{ijk} \right|, \left| x_{ij+1k+1} - x_{ijk} \right|, \left| x_{ij+1k+1} - x_{i+1jk+1} \right|, \left| x_{i+1j+1k+1} - x_{i+1jk+1} \right| \Big\};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
h_y = \max_{ijk} & \left\{ |y_{i+1jk} - y_{ijk+1}|, |y_{ij+1k} - x_{i+1jk}|, |y_{i+1j+1k+1} - y_{i+1jk}|, |y_{i+1j+1k} - y_{ij+1k+1}|, \right. \\
& |y_{i+1j+1k} - y_{ijk}|, |y_{i+1jk+1} - y_{i+1j+1k}|, |y_{i+1j+1k+1} - y_{ij+1k}|, |y_{ijk+1} - y_{ij+1k}|, \\
& |y_{i+1jk+1} - y_{ijk}|, |y_{ij+1k+1} - y_{ijk}|, |y_{ij+1k+1} - y_{i+1jk+1}|, |y_{i+1j+1k+1} - y_{ijk+1}| \Big\}; \\
h_z = \max_{ijk} & \left\{ |z_{i+1jk} - z_{ijk+1}|, |z_{ij+1k} - z_{i+1jk}|, |z_{i+1j+1k+1} - z_{i+1jk}|, |z_{i+1j+1k} - z_{ij+1k+1}|, \right. \\
& |z_{i+1j+1k} - z_{ijk}|, |z_{i+1jk+1} - z_{i+1j+1k}|, |z_{i+1j+1k+1} - z_{ij+1k}|, |z_{ijk+1} - z_{ij+1k}|, \\
& |z_{i+1jk+1} - z_{ijk}|, |z_{ij+1k+1} - z_{ijk}|, |z_{ij+1k+1} - z_{i+1jk+1}|, |z_{i+1j+1k+1} - z_{ijk+1}| \Big\}.
\end{aligned}$$

Здесь мы учли, что $S_{k_1k_2}^r \leq 3S^r$, $r=x,y,z$.

Кроме того, справедливо тождество:

$$\begin{aligned}
\sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) = & \frac{1}{8} \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + u_{i+1jk}^2 + u_{ij+1k}^2 + u_{i+1j+1k}^2 + u_{ij+1k+1}^2 + u_{i+1j+1k+1}^2 + \\
& + w_{ijk}^2 + w_{i+1jk}^2 + w_{ij+1k}^2 + w_{i+1j+1k}^2 + w_{ij+1k+1}^2 + w_{i+1j+1k+1}^2 + \\
& + v_{ijk}^2 + v_{i+1jk}^2 + v_{ij+1k}^2 + v_{i+1j+1k}^2 + v_{ij+1k+1}^2 + v_{i+1j+1k+1}^2).
\end{aligned}$$

Поэтому для любого U справедливо неравенство

$$2 \times 9 \times 144 \times 8 \times (S^x + S^y + S^z)^2 \sum_{ijk} (u_{ijk}^2 + w_{ijk}^2 + v_{ijk}^2) \geq \sum_{ijk} I_{ijk}^2.$$

Учитывая последнее неравенство, имеем

$$\begin{aligned}
R & \geq \frac{\Delta m}{144} \sum_{ijk} \left(\frac{\kappa}{9 \times 16 \times (S^x + S^y + S^z)^2} + c1_{mln} - c2_{mln} \right) I_{ijk}^2 \geq \\
& \geq \frac{\Delta m}{144} N \cdot \min_{ijk} \left(\frac{\kappa}{9 \times 16 \times (S^x + S^y + S^z)^2} + c1_{mln} - c2_{mln} \right) I_{ijk}^2
\end{aligned}$$

где N – число узлов разностной сетки, за исключением граничных.

Таким образом, сходимость итерационного процесса (35) имеет место, если условие

$$\frac{\kappa}{9 \cdot 16 \cdot (S^x + S^y + S^z)^2} + c1_{mln} - c2_{mln} \geq 0$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, т.е. при

$$\frac{B^2}{8\pi} \geq (\gamma - 2)P, \quad (40)$$

а в противном случае условие сходимости имеет вид:

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta m}{12\rho(S^x + S^y + S^z) \sqrt{(\gamma - 2) \frac{P}{\rho} - \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (41)$$

Отметим, что критерий устойчивости для трехмерного метода комбинированного решения (40) совпадает с критериями для одномерного и

двумерного аналогов данного метода (19), а ограничения на временной шаг при нарушении условия (40) несколько строже ограничения на временной шаг одномерного (20) и двумерного (21) аналогов.

Заметим, что для большинства задач $\gamma < 2$ и, следовательно, условие сходимости (40) выполняется автоматически.

Рассмотрим сходимость метода раздельного решения основных уравнений системы (22)-(27). В этом случае система разностных уравнений разделяется на три группы: к первой группе относятся динамические уравнения, ко второй – уравнения энергии, к третьей – уравнения электромагнитного поля. Далее решение проводится аналогично предыдущему по группам и связывается общим итерационным циклом.

Анализ устойчивости данного алгоритма проводится таким же способом, как показано выше. Итерационный процесс, соответствующий этому алгоритму, можно свести к виду (36)-(37) при

$$c1_{mln} = RT_{mln}\rho_{mln}^2; \quad c2_{mln} = (\gamma - 1)RT_{mln}\rho_{mln}^2 + \frac{B_{mln}^2\rho_{mln}}{8\pi}.$$

Следовательно, метод раздельного решения МГД-уравнений будет сходящимся, если условие

$$\frac{B^2}{8\pi} \leq (2 - \gamma)P \quad (42)$$

справедливо в каждой ячейке разностной сетки, а в противном случае данный метод сходится при условии

$$\Delta t < \frac{\sqrt{2} \cdot \Delta m}{12\rho(S^x + S^y + S^z) \sqrt{(\gamma - 2)\frac{P}{\rho} + \frac{B^2}{8\pi\rho}}}. \quad (43)$$

5. Примеры расчетов

Проведенное выше исследование алгоритма комбинированного решения групп разностных уравнений носит в основном качественный характер, поэтому справедливость полученных оценок необходимо проверить численными расчетами.

Рассмотрим следующую модельную задачу. В начальный момент времени $t=0$ покоящееся вещество занимает область: $-1 \leq x \leq 1$, $-1 \leq y \leq 1$, $-1 \leq z \leq 1$. Начальная плотность и температура равны соответственно $\rho_0 = 1$, $T_0 = 1$. Вещество – идеальный газ с уравнением состояния $P = \rho T$. Внутренняя энергия $\varepsilon = \frac{T}{\gamma - 1}$.

Газ предполагается нетеплопроводным, $\kappa = 0$; он помещен в однородное

магнитное поле $B = (B_x, B_y, B_z)$, которое является практически «вмороженным»: $\sigma = 10^{20}$. На границах $x = x_{\text{лев}}(t)$ и $x = x_{\text{прав}}(t)$ задана малая скорость $U_{\text{лев}}(t) = -U_{\text{прав}}(t) = \pm 0.01$, на границах $y = y_{\text{лев}}(t)$, $y = y_{\text{прав}}(t)$, $z = z_{\text{лев}}(t)$ и $z = z_{\text{прав}}(t)$ задана нулевая скорость. По всем трем направлениям начальное разбиение сетки было равномерным.

В данной постановке акустические колебания в среде должны распространяться со скоростью, много большей скорости выдвигания (вдвижения) поршня, поэтому в любой момент времени распределение плотности газа и магнитного поля почти однородно.

Задача решалась для различных значений величин γ и $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2 + B_z^2}$: $1 < \gamma \leq 10$, $0 \leq B \leq 1000$.

Расчеты проводились методами отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений.

Практические ограничения на временной шаг хорошо согласуются с полученными в данной работе оценками. Так, при $\gamma \leq 2$ расчеты с любыми магнитными полями комбинированным методом проходили практически без ограничения на временной шаг (в расчетах $\Delta t = 1$). Расчеты отдельным методом абсолютно устойчивы лишь при $B < 4.6$, при $B = 100$ шаг интегрирования $t \approx 0.0013$, а при $B = 1000$ – $\Delta t \approx 0.00012$, что абсолютно неприемлемо при проведении широкомасштабного ВЭ.

Рассмотрим другую модельную задачу. Будем моделировать сжатие плазмы лайнером (газоплазменной оболочкой), ускоряемым электродинамическим импульсом тока (см. [10, 11]). В начальный момент времени неподвижная плазма занимает область $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, $z \leq 1$. Начальная температура $T_0 = 1$. Плазма $\rho_{pl}^{(0)} = 0.2$ моделируется в области $0.2 \leq x \leq 0.8$, $0.2 \leq y \leq 0.8$, $0.2 \leq z \leq 0.8$, а в остальной области моделируется лайнер $\rho_l^{(0)} = 1$. Вещество – идеальный газ с уравнением состояния $P = (z+1)R_p T$, $\varepsilon = R(z+1)T/(\gamma-1)$, $z=1$ (водородная полностью ионизованная плазма), $\gamma = 5/3$, $R = 958$ (R – газовая постоянная в уравнении состояния). Газ предполагается нетеплопроводным, $\kappa = 0$, он помещен в однородное магнитное поле, которое является почти «вмороженным»: $\sigma = 10^{20}$. В начальный момент времени $B_x(0) = B_1$, $B_y(0) = 0$, $B_z(0) = B_3$. На границе области $P(t) = 0$, $B_x(t) = B_1$, $B_z(t) = B_3$, $B_y(t) = B_2 \sin(\pi t/2)$.

Задача решалась для различных значений величины индукции магнитного поля: $0 \leq B_x \leq 1000$, $0 \leq B_y \leq 1000$, $0 \leq B_z \leq 1000$.

Расчеты проводились методами отдельного и комбинированного решения групп разностных уравнений.

6. Заключение

Решение данной задачи, как и предыдущие тесты, подтверждает практическую ценность полученных в данной работе оценок. Метод комбинированного решения устойчив для любых значений магнитных полей B_1 , B_2 и B_3 , а метод отдельного решения устойчив лишь для $B < 4.6$, а при $B \gg 4.6$ приводит к ограничениям на временной шаг, непригодным для практического решения данного класса задач. В то же время при небольших магнитных полях ($B < 4.6$) метод отдельного решения групп разностных уравнений оказывается более предпочтительным из-за его большей простоты и дешевизны по сравнению с комбинированным методом решения групп

разностных уравнений.

7. Список литературы

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука. 1992.
2. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новикова Т.П., Оточин А.А. Оценки сходимости некоторых итерационных алгоритмов численного решения задач двумерной магнитной гидродинамики // Препринт ИММ РАН, № 6, 1995. 20 с.
3. Гасилов В.А., Гуськов В.Ю., Захаров С.В., Круковский А.Ю., Новикова Т.П. Математическая модель и метод расчета имплозии электродинамически ускоряемой плазмы // Препринт ФИАН № 29, 1995. 20 с.
4. Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Ключкова Л.В., Сузан Д.В. Оценка сходимости итерационного алгоритма численного решения двумерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2019, № 28, 15 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-28>
5. Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Цыгвинцев И.П. Численные алгоритмы для решения трехмерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. № 6, 20 с. URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2014-6>
6. Круковский А.Ю. Сходимость метода комбинированных прогонок для разностной схемы одномерной магнитной гидродинамики // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша. №113, 1988. 12 с.
7. Самарский А.А., Волосевич П.П., Волчинская М.И., Курдюмов С.П. Метод конечных разностей для решения одномерных нестационарных задач магнитной гидродинамики // ЖВМ и МФ, 1968, т.8, №5, с. 1025-1038.
8. Федоренко Р.П. Введение в вычислительную физику. М.: Издательство физико-технического института, 1994.
9. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989.
10. Дюдерштадт Дж., Мозес Г. Инерциальный термоядерный синтез. М.: Энергоатомиздат, 1984.
11. Zakharov S.V., Smirnov V.P., Grabovskii E.V., Nedoseev S.L., Oleinik G.M. and Zaitsev V.I. Imploding Liner as Driver for Indirect Driven Target Physics Studies // Proc. of the IAEA Technical Committee Meeting on Drivers for Inertial Confinement Fusion. Paris, 1994 (International Atomic Energy Agency Vienna, 1995), p. 395.