ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 65 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гавриков М.Б.

Основные положения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД)

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гавриков М.Б. Основные положения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД) // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 65. 36 с. doi:10.20948/prepr-2019-65
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-65

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.Б. Гавриков

Основные положения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД)

Москва — 2019

Гавриков М.Б.

Основные положения электромагнитной гидродинамики плазмы (ЭМГД)

В работе рассмотрены основные положения ЭлектроМагнитной ГидроДинамики (ЭМГД) плазмы, являющейся теоретической основой исследования нерелятивистских процессов в реальной плазме. Выдвинутые положения иллюстрируются при анализе трёх важных плазменных эффектов и демонстрируют принципиальное различие ЭМГД- и МГД-теорий плазмы.

Ключевые слова: классическая МГД, электромагнитная гидродинамика (ЭМГД).

Mikhail Borisovich Gavrikov

Main positions of electromagnetic hydrodynamics of plasma (EMHD)

The paper discusses the main positions of ElectroMagnetic HydroDynamics (EMHD) of plasma, which is the theoretical basis for the study of nonrelativistic processes in real plasma. The proposed positions are illustrated by analyzing three important plasma effects and demonstrate the fundamental difference between the EMHD and MHD plasma theories.

Key words: classical MHD, electromagnetic hydrodynamics (EMHD).

Оглавление

Введение 3
Часть I. Основы ЭМГД-теории 4
Часть II. Приложения ЭМГД-теории 22
Список литературы 35

Введение

Плазмой обычно называется ионизованный газ. Первая математическая модель плазмы была предложена шведским физиком Х. Альфвеном в 1950 г. [1] и составила содержание классической МагнитоГидроДинамической (МГД) теории плазмы. Однако область применимости МГД-теории оказалась довольно узкой – это преимущественно плазма жидких металлов [2] и холодная космическая плазма. Для исследования лабораторной плазмы во многих установках (z-пинчи, рельсотроны, плазменные ускорители, стационарные плазменные двигатели, магнитные ловушки и пр.) применимость МГД-теории вызывает обоснованные сомнения. Это фактически признал и Х. Альфвен, назвавший в [3] МГД-уравнения теорией псевдоплазмы, т.е. несуществующей субстанции.

В 1988 г. автором для моделирования реальной плазмы (перетяжек z-пинчей и плазменного фокуса) была предложена [4] более сложная система уравнений, отличающаяся от МГД-уравнений несколькими принципиальными дополнительными слагаемыми и названная ЭлектроМагнитной ГидроДинамикой (ЭМГД) плазмы. Тридцатилетние исследования плазменных процессов на базе ЭМГД-теории, подытоженные в монографии автора [5], оказались весьма продуктивными и доказали дееспособность предложенной теоретической конструкции. Однако переход от научной МГД-парадигмы к новым представлениям, содержащимся в ЭМГД-теории, оказался весьма болезненным и потребовал преодоления ряда устойчивых мифов, связанных с плазмой. Это показали в том числе дискуссии, проведённые в разное время в формате докладов на научных конференциях и семинарах. Последнее выступление автора в апреле 2019 г. на одном из семинаров в ИПМ им. М.В. Келдыша, посвящённое основам ЭМГД-теории, приводится ниже с небольшими дополнениями.

Представленный на семинаре доклад имел целью рассмотреть новую математическую модель реальной плазмы – ЭМГД. Он делится на две части.

В первой части рассмотрена ЭМГД-модель и обсуждены её преимущества по сравнению с МГД-моделями плазмы.

Во второй части эти преимущества демонстрируются при анализе трёх важных плазменных эффектов: аномальное ускорение дейтонов в перетяжках z-пинчей [6]; ускорение плазмы в каналах плазменных ускорителей постоянного сечения; особенности плазменных равновесий в магнитных ловушках θ-пинч.

Главную идею доклада можно сформулировать следующим образом.

При исследовании нерелятивистских процессов во многих установках и природных явлениях нас интересуют прежде всего низкочастотные составляющие параметров плазмы. Высокочастотные составляющие, которые всегда есть, обусловлены колебаниями плазмы с высокими частотами типа ленгмюровской, но малыми амплитудами и не оказывают существенного влияния на низкочастотные составляющие, и ими следует пренебречь, написав

уравнения динамики плазмы исключительно на низкочастотные составляющие её параметров. По умолчанию считается, что искомые уравнения определяются МГД-теорией, но, оказывается, это не так. Для получения нужных уравнений необходимо построить теорию возмущений по высокочастотному фону и вывести уравнения для нулевого приближения – они и будут искомыми. Эта работа проделана в 1-й части доклада, где посредством некоторой теории возмущений выводятся уравнения на низкочастотные составляющие, попутно даётся их математическое определение. Эти уравнения совпадают с уравнениями ЭМГД-теории, а не с МГД-уравнениями, как это обычно считается, что предопределяет востребованность и высокую практическую ценность ЭМГД-теории, которая, таким образом, является теоретической основой расчёта низкочастотных плазменных процессов.

Часть I. Основы ЭМГД-теории

1. Что такое плазма? Плазма – это четвёртое состояние вещества [7]. Из курса физики известны твёрдое, жидкое, газообразное состояния. Если газ нагреть до высокой температуры (температура газа $T \to +\infty$), то электроны отрываются от атомных ядер (ионизация) и возникает смесь свободных электронов и ионов. Это и есть плазма.

$$\boxed{\text{твёрдое}} \Longrightarrow \boxed{\text{жидкое}} \Longrightarrow \boxed{\text{газообразное}} \xRightarrow{T\to\infty} \boxed{\text{плазма}}$$

В реальности картина, конечно, более сложная. Параллельно с процессом ионизации идёт обратный процесс рекомбинации, как правило, наряду с электронами и ионами присутствуют нейтральные атомы (нейтралы) и ионы других сортов (так что ионы обычно делятся на основные и примесные), кроме того, степень ионизации может быть различной у разных ионов и т.д. Ниже, для простоты, мы абстрагируемся от этих, по сути, технических аспектов и считаем плазму двухкомпонентной и полностью ионизованной.

Следует выделить два момента.

- При образовании плазменной среды из газовой отсутствуют фазовые переходы.
- Поскольку плазменные частицы – электроны и ионы – заряжены, то каждая частица плазмы, благодаря дальнодействующим кулоновским силам электрического притяжения-отталкивания, взаимодействует с любой другой частицей плазмы. Это кардинально отличает плазму от газовой среды, где каждая частица взаимодействует (≡сталкивается) только со своими ближайшими соседями, и приводит к появлению новых необычных плазменных эффектов, обозначаемых собирательным названием “коллективные явления”. Ключевая роль коллективных явлений при исследовании плазменных процессов подчёркивалась многими классиками

плазмодинамики. Например, академик Б.Б. Кадомцев назвал свой основной труд по теории плазмы “Коллективные явления в плазме” [8]. Интересно суждение знаменитого поэта и актёра В.С. Высоцкого, как человека, далёкого от физики, у которого в силу этого обстоятельства не “замылился” взгляд на проблемы незнакомой ему области знаний. С присущей всем недюжинным натурам проницательностью он на иррациональном уровне уловил кардинальное отличие плазменной среды от остальных известных из физики сред и отразил это понимание в поэтической художественной форме в известном четверостишии (В.С. Высоцкий “Марш студентов-физиков”, 1964):

Жидкие, твёрдые, газообразные –
Просто, понятно, вольготно!
А с этой плазмой дойдёшь до маразма, и
Это довольно почётно.

Если говорить серьёзно, плазма представляет значительные проблемы для математического моделирования. Простейшей и исторически первой математической моделью плазмы являются уравнения классической МГД [1].

2. Классическая МГД-модель (Х. Альфвен, 1950). Согласно Х. Альфвену, плазма – это сжимаемый проводящий электрический ток газ, взаимодействующий с магнитным полем. Если ρ, p, $\boldsymbol{U}$ – гидродинамические параметры газа, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ – напряжённости магнитного и электрического полей, то функции ρ, p, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ в классической МГД подчиняются уравнениям (1) –(3)

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{U}=0,\quad \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}+\nabla p=\frac{1}{c}[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}],\quad \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\,\mathrm{div}\boldsymbol{U}=(\gamma-1)\frac{j^2}{\sigma},\qquad (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla,$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0\ (\text{закон Фарадея}),\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,\\ &\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\ (\text{закон Ампера}),\end{aligned}\qquad (2)$$

$$\boldsymbol{E}=\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}](\text{закон Ома})\Leftrightarrow \boldsymbol{E}'=\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma},\qquad (3)$$

σ – проводимость плазмы, $\boldsymbol{E}'\underset{\mathrm{def}}{=}\boldsymbol{E}+c^{-1}[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}]$ – электрическое поле в системе отсчёта движущейся плазмы, и для простоты считалось, что газ идеальный политропный с показателем адиабаты $\gamma>1$.

Система (1) – это обычный гидродинамический формализм, состоящий из уравнения неразрывности ($\equiv$закон сохранения массы), уравнения импульсов ($\equiv$2-ой закон Ньютона), уравнения энергии, записанного относительно

давления. Поскольку плазма проводит ток, а на ток $\boldsymbol{j}$ в магнитном поле $\boldsymbol{H}$ действует пондеромоторная сила ($\equiv$сила Ампера) $c^{-1}[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}]$, то в правую часть уравнения импульсов добавлена сила Ампера, действующая на единичный объём плазмы. Учитывая, что любой ток в среде с конечной проводимостью σ выделяет тепло ($\equiv$джоулев нагрев), в правую часть уравнения энергии добавлено слагаемое, равное мощности джоулева нагрева плазмы, $\sim j^2/\sigma$.

Система (2) – это уравнения электродинамики Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля. Закон Ома (3) обычно записывают относительно электрического поля $\boldsymbol{E}'$ в системе отсчёта движущейся плазмы. Исключая посредством законов Ома и Ампера $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{E}$ из числа неизвестных функций, приходим к замкнутой определённой системе уравнений в частных производных относительно неизвестных функций ρ, p, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$ (в силу закона Фарадея уравнение $\mathrm{div}\boldsymbol{H}=0$ есть ограничение только на начальное значение поля $\boldsymbol{H}$). Уравнение импульсов в (1) часто записывают в тензорной дивергентной форме:

$$\rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{Div}\left(p\mathrm{I}_3+\Pi^p\right)=0,$$

где $\Pi^p=\dfrac{H^2}{8\pi}\mathrm{I}_3-\dfrac{\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}}{4\pi}$ – пондеромоторный тензор, I_3 – трёхмерный единичный тензор. Дивергентная форма является следствием очевидного преобразования:

$$\mathrm{Div}\Pi^p=-\frac{1}{4\pi}[\mathrm{rot}\boldsymbol{H},\boldsymbol{H}]=-\frac{1}{c}[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}]$$

и показывает, что тензор внутренних напряжений $p\mathrm{I}_3+\Pi^p$ в классической МГД отличается добавкой Π^p от тензора внутренних напряжений $p\mathrm{I}_3$ в гидродинамике.

За 70 лет существования МГД-теории написаны горы научной литературы [9–11], анализирующей свойства решений МГД-уравнений, в которой, однако, проблемы МГД-теории обычно “заметаются под ковёр”.

Выделим три проблемные болевые точки МГД-теории.

3. Проблемы МГД-теории

1) В МГД-теории электрон-ионная структура плазменного вещества выносится за скобки и не рассматривается. Парадоксально, но, согласно п. 2, в МГД-теории плазмы – субстанции, состоящей из свободных электронов и ионов – вообще нет понятий “электрон” и “ион”. Отсюда, во-первых, возникает проблема интерпретации, физического смысла гидродинамических параметров ρ, p, $\boldsymbol{U}$ в МГД-уравнениях (1)–(3). Во-вторых, поскольку в любой математической модели плазмы должен быть алгоритм вычисления параметров

электронов и ионов, то возникает *проблема дихотомии*: как по одному комплекту гидродинамических параметров МГД-теории ρ, p, $\boldsymbol{U}$ вычислить два комплекта гидродинамических параметров электронов и ионов $\rho_\pm$, $p_\pm$, $\boldsymbol{v}_\pm$ так, чтобы

- для электронов и ионов выполнялись законы сохранения массы, энергии, импульса,
- выполнялось равенство

$$e_+ n_+ \boldsymbol{v}_+ - e_- n_- \boldsymbol{v}_- = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}, \quad n_\pm \underset{\mathrm{def}}{=} \rho_\pm / m_\pm, \tag{4}$$

означающее совпадение плотностей модельного тока и физического тока, обусловленного движением электронов и ионов ($m_\pm$, $e_\pm$ – массы и абсолютные величины зарядов электронов и ионов).

2) В МГД-теории невозможно рассмотрение коллективных явлений в плазме, что ставит под сомнение способность МГД-модели исследовать процессы в реальной плазме. Постулируем следующий критерий, определяющий возможность учёта коллективных явлений в математических моделях нерелятивистской плазмы, содержащих закон Ома: *для учёта коллективных явлений необходимо и достаточно, чтобы электрическое поле* $\boldsymbol{E}'$ *в каждой точке области, занятой плазмой, в силу закона Ома зависело от значений плотности тока* $\boldsymbol{j}$ *и других параметров плазмы во всех точках указанной области*. Закон Ома (3) в классической МГД этому критерию очевидно не удовлетворяет.

3) Классическая МГД-теория является феноменологической – отсутствует математически корректный вывод уравнений МГД-модели (1)–(3) из первых принципов, т.е. из математических уравнений, выражающих фундаментальные физические законы. Ниже будет показано, что уравнения классической МГД математически корректно получаются из ЭМГД-уравнений в пределе $[N] \to +\infty$, где $[N] = [n][L]^2$ – характерное погонное число частиц плазмы (квадратными скобками здесь и ниже обозначается характерный масштаб физической величины, $[L]$ – длины, $[n]$ – концентрации числа частиц и т.д.). Этот результат приводит к научной легитимации МГД-модели, но одновременно показывает, что МГД-теория описывает только далёкую асимптотику параметров реальной плазмы, подчинённых фундаментальным уравнениям (типа РЭМГД – см. ниже), физический смысл которой неочевиден.

Каждая из трёх перечисленных проблем позволяет забраковать МГД-теорию. Чтобы преодолеть проблемы классической МГД, добавим в её уравнения (1)–(3) несколько дополнительных слагаемых. На этом пути мы приходим к ЭМГД-модели плазмы.

4. ЭМГД-модель плазмы (М.Б. Гавриков, 1988). Согласно ЭМГД, плазма – это сплошная двухтемпературная среда с гидродинамическими параметрами ρ,

p_+, p_-, $\boldsymbol{U}$ и напряжённостями магнитного и электрического полей $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, подчиняющимися уравнениям

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}+\rho\mathrm{div}\boldsymbol{U}=0,\quad \rho\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t}+\mathrm{Div}\left(p_\Sigma \mathrm{I}_3+\Pi^p+\boxed{\Pi^c}\right)=0,$$
$$\frac{\mathrm{d}p_\pm}{\mathrm{d}t}+\gamma p_\pm\mathrm{div}\boldsymbol{U}=\boxed{\mp\lambda_\mp\rho^{\gamma-1}\boldsymbol{j}\cdot\nabla\left(\frac{p_\pm}{\rho^\gamma}\right)}+\frac{m_\mp}{m_\Sigma}(\gamma-1)\frac{j^2}{\sigma},\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla, \tag{5}$$

где $\lambda_\pm=m_\pm/e_\pm$ – материальные константы, $\gamma>1$, $m_\Sigma=m_++m_-$, $p_\Sigma=p_++p_-$, $\Pi^c\underset{\mathrm{def}}{=}\lambda_+\lambda_-\dfrac{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}}{\rho}$. Поля $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0\ (\text{закон Фарадея}),\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,$$
$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}\ (\text{закон Ампера}), \tag{6}$$

$$\boldsymbol{E}+\boxed{\frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E}}=\frac{\boldsymbol{j}}{\sigma}-\frac{1}{c}[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}]+\boxed{\frac{1}{\rho}\mathrm{Div}\mathrm{W}}\ (\text{обобщённый закон Ома}), \tag{7}$$

где $\mathrm{W}=(\lambda_--\lambda_+)(\Pi^p+\Pi^c)+(\lambda_-p_+-\lambda_+p_-)\mathrm{I}_3+\lambda_+\lambda_-(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{U})$ – тензор холловских напряжений. Система (5)–(7) является замкнутой и определённой относительно неизвестных функций ρ, $p_\pm$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, в которой рамками обведены дополнительные слагаемые. Если их отбросить и сложить “$\pm$”-уравнения для давлений $p_\pm$, то получаются уравнения классической МГД (1)–(3). ЭМГД-система (5)–(7) написана в предположении, что уравнения состояния электронов и ионов совпадают с уравнениями состояния идеального политропного газа с показателем адиабаты γ. В случае произвольных уравнений состояния электронов и ионов в системе (5)–(7) изменятся уравнения для давлений $p_\pm$ [5]. Из (5)–(7) следует, что основные различия ЭМГД- и МГД-теорий сводятся к

1) появлению добавки Π^c (токовый тензор) в тензоре внутренних напряжений,
2) трёхпараметричности термодинамики плазмы – ρ, p_+, p_- – независимые термодинамические параметры,
3) существенному усложнению обобщённого закона Ома, который в ЭМГД становится системой дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка относительно компонент поля $\boldsymbol{E}$.

Перечисленные различия приводят к важным следствиям, в частности, позволяют преодолеть указанные в п. 3 проблемы МГД-теории.

• **Проблема дихотомии.** Этой проблемы в ЭМГД-теории не существует в силу следующего результата.

Теорема 1. *Если* ρ, $p_\pm$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *удовлетворяют ЭМГД-уравнениям* (5)–(7), *а* $\boldsymbol{v}_\pm$, $\rho_\pm$ *вычисляются по формулам*

$$\boldsymbol{v}_\pm = \boldsymbol{U} \pm \frac{\lambda_\mp}{\rho}\boldsymbol{j}, \quad \rho_\pm = \frac{\lambda_\pm}{\lambda_\Sigma}\rho, \quad \lambda_\Sigma = \lambda_+ + \lambda_-, \tag{8}$$

то:

1) *ионы и электроны с гидродинамическими параметрами* $\rho_\pm$, $p_\pm$, $\boldsymbol{v}_\pm$ *удовлетворяют законам сохранения массы, энергии, импульса для идеального политропного газа с показателем адиабаты* γ:

$$\frac{\partial \rho_\pm}{\partial t} + \operatorname{div}\rho_\pm \boldsymbol{v}_\pm = 0 \quad (\textit{уравнение неразрывности}),$$

$$\frac{\partial \rho_\pm \boldsymbol{v}_\pm}{\partial t} + \operatorname{Div}(\rho_\pm \boldsymbol{v}_\pm \cdot \boldsymbol{v}_\pm) = -\nabla p_\pm \pm e_\pm n_\pm \left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}_\pm, \boldsymbol{H}] \right) \mp \frac{e_\pm n_\pm \boldsymbol{j}}{\sigma},$$

$$(\textit{уравнение импульсов}) \tag{9}$$

$$\frac{\partial p_\pm}{\partial t} + \boldsymbol{v}_\pm \cdot \nabla p_\pm + \gamma p_\pm \operatorname{div}\boldsymbol{v}_\pm = (\gamma - 1)\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma},$$

$$(\textit{уравнение энергии})$$

где $\boldsymbol{j} = e_+ n_+ \boldsymbol{v}_+ - e_- n_- \boldsymbol{v}_-$, $n_\pm = \rho_\pm / m_\pm$;

2) *плазма квазинейтральная*: $e_+ n_+ - e_- n_- = 0$;

3) *выполнено равенство* $en(\boldsymbol{v}_+ - \boldsymbol{v}_-) = \dfrac{c}{4\pi}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}$. #

Из **Теоремы 1** вытекают два важных следствия. Во-первых, проясняется физический смысл гидродинамических параметров ρ, $p_\pm$, $\boldsymbol{U}$ в ЭМГД-уравнениях (5)–(7). Из (8) следуют равенства

$$\rho = \rho_+ + \rho_-, \quad \boldsymbol{U} = (\rho_+ \boldsymbol{v}_+ + \rho_- \boldsymbol{v}_-)/\rho. \tag{10}$$

Значит, ρ – суммарная плотность электронов и ионов, $\boldsymbol{U}$ – массовая скорость ($\equiv$скорость центров масс единичных объёмов плазмы), $p_\pm$ – давления электронов и ионов. Во-вторых, несложно показать, что из справедливости уравнений (9), выражающих законы сохранения массы, энергии, импульса для электронов и ионов, и уравнений Максвелла (6) для $\boldsymbol{U}$, ρ, определяемых равенствами (10) с добавлением функций $p_\pm$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, справедлива ЭМГД-система (5)–(7). Отсюда следует, что в классической МГД проблема дихотомии в принципе неразрешима, если в уравнениях (1)–(3) под ρ и $\boldsymbol{U}$ понимать суммарную плотность электронов и ионов и массовую скорость плазмы.

• **Коллективные явления.** Согласно обобщённому закону Ома (7), для нахождения электрического поля $\boldsymbol{E}$ в каждый момент времени необходимо

поставить и решить в области, занятой плазмой, некоторую краевую задачу для системы дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка на компоненты поля $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{E} + a\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}, \quad a \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}, \quad \boldsymbol{F} \underset{\mathrm{def}}{=} \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}] + \frac{1}{\rho}\mathrm{DivW}. \qquad (11)$$

Однако оператор (старших) вторых производных в (11) не является эллиптическим. Можно показать, что характеристическая форма оператора $\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E} = \Delta\boldsymbol{E} - \nabla\mathrm{div}\boldsymbol{E}$ тождественно равна нулю. Тем не менее, как показывает следующая теорема, нахождение поля $\boldsymbol{E}$ можно свести к решению некоторой краевой задачи для эллиптической системы в области, занятой плазмой.

Теорема 2. *Поле* $\boldsymbol{E}$ *является решением уравнения* (11) *в области* D *тогда и только тогда, когда поле* $\boldsymbol{G} \underset{\mathrm{def}}{=} \mathrm{rot}\boldsymbol{E}$ *является решением в* D *эллиптической системы уравнений*

$$\boldsymbol{G} - a\Delta\boldsymbol{G} + [\nabla a, \mathrm{rot}\boldsymbol{G}] = \mathrm{rot}\boldsymbol{F}, \qquad (12)$$

удовлетворяющим условию $(\mathrm{div}\boldsymbol{G})\big|_{\partial D} = 0$. *По полю* $\boldsymbol{G}$ *поле* $\boldsymbol{E}$ *восстанавливается формулой* $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F} - a\mathrm{rot}\boldsymbol{G}$. #

Из свойств решений эллиптических систем, в том числе типа (12), следует, что в каждый момент времени в каждой точке области, занятой плазмой, значение $\boldsymbol{E}$ определяется значениями плотности тока и других параметров плазмы *во всех* точках указанной области. Значит, коллективные явления в квазинейтральной нерелятивистской плазме на базе ЭМГД-модели могут быть учтены и исследованы в полном объёме.

• **Сила инерции.** Рассмотрим физический смысл дополнительной силы $(-\mathrm{Div}\Pi^c)$ в правой части уравнения импульсов в ЭМГД. Воспользуемся следующим результатом.

Теорема 3. *Пусть* $\boldsymbol{v}_\pm$ *вычисляются по формулам* (8), *тогда имеет место тождество*:

$$\mathrm{Div}\Pi^c = \sum_{\pm} m_\pm \left[\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{v}_\pm - \boldsymbol{U}) + (\boldsymbol{v}_\pm - \boldsymbol{U})\cdot\nabla(\boldsymbol{v}_\pm - \boldsymbol{U})\right]. \qquad (13)$$

Электроны и ионы участвуют в сложном движении: двигаются вместе с плазмой с массовой скоростью $\boldsymbol{U}$ и одновременно двигаются относительно плазмы со скоростями $\boldsymbol{v}_\pm - \boldsymbol{U}$. Ускорения электронов и ионов в относительном движении, как известно из гидродинамики [12], совпадают с квадратными скобками в правой части формулы (13). Значит, по второму закону Ньютона, на электроны и ионы со стороны плазмы действуют силы, равные слагаемым в правой части (13). Тогда, по третьему закону Ньютона и на основании **Теоремы 3**, величина $(-\mathrm{Div}\Pi^c)$ равна суммарной силе, действующей со

стороны электронов и ионов на единичный объём двигающейся со скоростью $\boldsymbol{U}$ плазмы и обусловленной *неравномерностью и криволинейностью относительного движения электронов и ионов*. Силы такого рода в физике называются *силами инерции*, $\boldsymbol{F}_{\text{in}} = -\text{Div}\Pi^c$. Они играют огромную роль, например, при нахождении равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках (см. ниже).

• **Эффект Холла.** Эффект Холла состоит в отклонении направления вектора $\boldsymbol{j}$ от направления вектора $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{E}' \not\parallel \boldsymbol{j}$ и обычно обусловлен наличием магнитного поля. Тем не менее в классической МГД, как следует из равенства (3), $\boldsymbol{E}' \parallel \boldsymbol{j}$ и эффект Холла отсутствует. В так называемой *холловской МГД* [13], уравнения которой мы не приводим, закон Ома имеет вид

$$\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\text{Div}\text{W}_{\text{HMHD}} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{\lambda_+}{c\rho}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] - \frac{\lambda_+}{\rho}\nabla p_-,$$

где $\text{W}_{\text{HMHD}} = -\lambda_+(\Pi^p + p_-\text{I}_3)$. Поэтому в холловской МГД эффект Холла присутствует, но зависимость $\boldsymbol{E}'$ от $\boldsymbol{j}$ является линейной и её исследование сводится к задаче линейной алгебры и потому тривиально. В ЭМГД эффект Холла имеет двоякую природу. Во-первых, резко увеличивается число холловских слагаемых в правой части обобщённого закона Ома (7), записанного относительно поля $\boldsymbol{E}'$:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{E}' + \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\text{rotrot}\boldsymbol{E}' = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} + \frac{1}{\rho}\boldsymbol{G}_{\text{Hall}}, \\ &\boldsymbol{G}_{\text{Hall}} = \frac{c^2\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\text{rotrot}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}] + \frac{1}{\rho}\text{Div}\text{W}. \end{aligned} \tag{14}$$

Эти слагаемые, ответственные за неколлинеарность векторов $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{j}$, в сумме дают выражение $\frac{1}{\rho}\boldsymbol{G}_{\text{Hall}}$, являющееся нелинейным дифференциальным оператором первого порядка относительно $\boldsymbol{j}$. Во-вторых, эффект Холла обусловлен также отклонением линейного дифференциального оператора второго порядка в левой части (14) от единичного. Вследствие этого, даже если $\boldsymbol{G}_{\text{Hall}} = 0$, то $\boldsymbol{E}'$ и $\boldsymbol{j}$ всё равно будут неколлинеарными, если только $\boldsymbol{j}$ не является собственной функцией указанного дифференциального оператора второго порядка. Исследование зависимости $\boldsymbol{E}'$ от $\boldsymbol{j}$ в ЭМГД – нетривиальная нерешённая задача. Сложный объёмный характер эффекта Холла в ЭМГД (в частности, большое количество слагаемых в правой части (14)) открывает огромные возможности для обнаружения и исследования новых плазменных эффектов. Количество холловских слагаемых в правой части обобщённого закона Ома увеличивается при учёте гидродинамических вязкостей электронов

и ионов (см. ниже), что приводит к дополнительным возможностям при исследовании плазмы на базе ЭМГД-теории.

• **Предел исчезающей плазмы.** При

$$\rho \to 0, \quad p_{\pm} \to 0, \quad \boldsymbol{j} \to 0 \tag{15}$$

ЭМГД-система (5)–(7) переходит, очевидно, в систему уравнений Максвелла для квазистационарного электромагнитного поля в вакууме

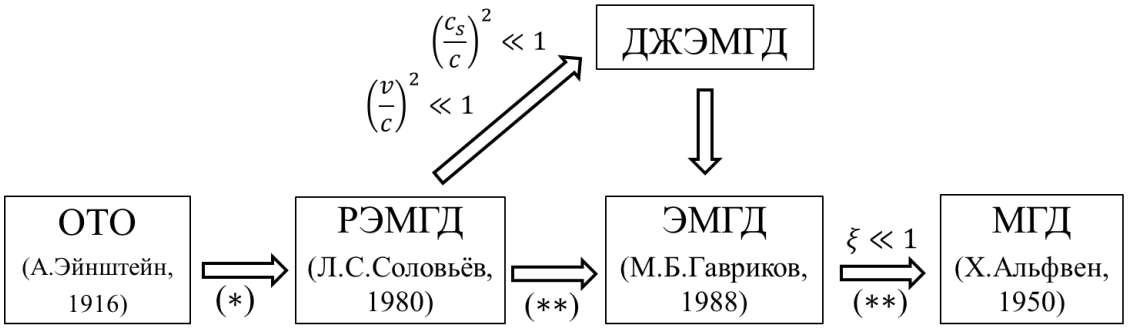
$$\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \mathrm{rot}\boldsymbol{H} = 0.$$

При этом предполагается, что предельные соотношения (15) можно дифференцировать по времени и пространственным координатам, а $\boldsymbol{U}$ вместе с первыми производными и отношения $p_{\pm}/\rho$, $\boldsymbol{j}/\rho$ ограничены. Последнее, учитывая формулы (8), означает, что в пределе исчезающей плазмы температуры и гидродинамические скорости электронов и ионов считаются ограниченными.

Таким образом, ЭМГД-уравнения единообразным способом описывают плотную, разреженную плазму и вакуумное электромагнитное поле, что делает ЭМГД-уравнения незаменимыми для расчёта динамики плазменных сгустков со свободной границей, имеющих, как правило, огромное различие по плотности в ядре сгустка и его короне. Указанное свойство ЭМГД-модели не имеет место для других известных математических моделей нерелятивистской квазинейтральной плазмы (классическая МГД, холловская МГД и т.д.).

5. Обоснование ЭМГД-уравнений. Перейдём к выводу ЭМГД-уравнений из первых принципов, ограничиваясь сначала, для простоты, случаем $\sigma = \infty$. За отправную точку возьмём уравнения общей теории относительности А. Эйнштейна [14] (ОТО) для непрерывно распределённой материи, являющейся на сегодня общепризнанным фундаментом современной физики. Из них, как показано Л.С. Соловьёвым [15,16], для системы электронов, ионов и электромагнитного поля математически корректно выводятся уравнения Релятивистской ЭлектроМагнитной ГидроДинамики (РЭМГД) плазмы, которые в дальнейшем построении фактически играют роль первых принципов. При этом мы ограничимся рассмотрением РЭМГД-системы, предполагая, что движение электронов и ионов практически не влияет на заданное статическое гравитационное поле, определяемое математическими соотношениями специальной теории относительности (СТО): $g_{00} = 1$, $g_{\alpha\beta} = -\delta_{\alpha\beta}$, $1 \le \alpha, \beta \le 3$. С этими оговорками ЭМГД-уравнения получаются из РЭМГД-системы в два этапа. На первом этапе посредством некоторой теории возмущений строится нерелятивистский предел РЭМГД-уравнений и получается промежуточная система уравнений ДвухЖидкостной ЭлектроМагнитной ГидроДинамики (ДЖЭМГД) плазмы. На второй этапе из ДЖЭМГД-уравнений заменой переменных получаются искомые ЭМГД-уравнения. Кроме того, доказывается,

что классические МГД-уравнения получаются как нулевое приближение теории возмущений по параметру $\xi \sim 1/\sqrt{[N]}$ (N – погонное число частиц) решений ЭМГД-уравнений. Все указанные выше импликации сведены в следующую диаграмму:



$$\xi = \frac{cm_-^{1/2}}{2\pi^{1/2} e Z^{1/2} [N]^{1/2}},$$

где $[N]$ – характерное погонное число частиц плазмы, Z – кратность заряда ионов.

• **РЭМГД-система.** Рассмотрим РЭМГД-систему (16). На неё стоит обратить внимание по двум причинам. Во-первых, её трудно найти в литературе – в основных руководствах по теории плазмы она отсутствует. Во-вторых, она является своего рода “альма-матер” всех существующих гидродинамических моделей плазмы. Например, из неё нетрудно вывести уравнения Хоффмана-Теллера Релятивистской Магнитной Гидродинамики (РМГД) плазмы [17] или уравнения холловской МГД [13]. Если в (16) всюду положить $\Gamma_\pm = 1$, $\mathscr{E}_\pm = c^2$ (т.е. считать $(v_\pm / c^2) << 1$, $\varepsilon_\pm + p_\pm / \rho_\pm << c^2$), то придём к упрощённой РЭМГД-системе, которая обычно используется для исследования плазменных процессов. Однако система уравнений упрощённой РЭМГД оказывается релятивистски неинвариатной, на что впервые обратил внимание, вероятно, Л.С. Соловьёв. Он же указал поправки, которые надо внести в упрощённую РЭМГД-систему, чтобы получить релятивистски инвариантную РЭМГД-систему (16). В системе (16) все величины, за исключением t, c, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, имеют индексы “$\pm$”, а гидродинамические и термодинамические уравнения представляют собой пары уравнений, записанных для электронной и ионной сплошных сред.

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho}{\Gamma} + \operatorname{div}\frac{\rho \boldsymbol{v}}{\Gamma} = 0, \quad \Gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2},$$

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathscr{E}\boldsymbol{v}}{c^2\Gamma}\right) + \nabla p = \pm\frac{en}{\Gamma}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}]\right), \mathscr{E} = c^2 + \varepsilon + \frac{p}{\rho}, \rho = mn,$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla,\\ p=p(\rho,T),\quad \varepsilon=\varepsilon(\rho,T),\\ TdS=d\varepsilon+pd\left(\dfrac{1}{\rho}\right),\end{array}\right\}\underset{\substack{\text{идеальные}\\ \text{политропные}\\ \text{газы}}}{\Leftrightarrow}\ \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\frac{\gamma p}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0, \tag{16}$$

$$-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\frac{4\pi}{c}\left(\frac{e_+n_+\boldsymbol{v}_+}{\Gamma_+}-\frac{e_-n_-\boldsymbol{v}_-}{\Gamma_-}\right),\ \mathrm{div}\boldsymbol{E}=4\pi\left(\frac{e_+n_+}{\Gamma_+}-\frac{e_-n_-}{\Gamma_-}\right),$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0.$$

• **Нерелятивистский предел РЭМГД-уравнений ($\sigma=\infty$).** Для получения нерелятивистского предела обезразмерим РЭМГД-систему (16). Безразмерная РЭМГД-система (17) представляет собой систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно безразмерных значений величин, зависящую как от параметров от нескольких безразмерных констант – чисел подобия ζ, ξ, M, N, ε, ν

$$\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial t}\dfrac{\rho}{\Gamma}+\mathrm{div}\dfrac{\rho\boldsymbol{v}}{\Gamma}=0,\quad \Gamma=\left(1-\nu v^2\right)^{1/2},\\ \dfrac{\rho}{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{\mathscr{E}\boldsymbol{v}}{\Gamma}\right)+\dfrac{\nabla p}{M}=\pm\dfrac{enN}{\Gamma}\left(\boldsymbol{E}+\zeta[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]\right),\quad \mathscr{E}=1+\dfrac{\gamma}{\gamma-1}\dfrac{p}{\rho}\dfrac{\nu}{M}\\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\dfrac{\gamma p}{\Gamma}\dfrac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=0,\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla,\\ -\varepsilon\dfrac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}+\xi\mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\dfrac{e_+n_+\boldsymbol{v}_+}{\Gamma_+}-\dfrac{e_-n_-\boldsymbol{v}_-}{\Gamma_-},\quad \varepsilon\mathrm{div}\boldsymbol{E}=\dfrac{e_+n_+}{\Gamma_+}-\dfrac{e_-n_-}{\Gamma_-},\\ \zeta\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0.\end{array} \tag{17}$$

Система (17) *это и есть математический объект, подлежащий исследованию математическими методами*. Напомним, квадратными скобками обозначаются характерные масштабы соответствующих величин, а в (18) указаны выражения чисел подобия через характерные масштабы:

$$\begin{array}{l}\varepsilon=\dfrac{[E]}{4\pi[e][n][L]},\quad \xi=\dfrac{c[H]}{[E][v]}\cdot\varepsilon=\dfrac{c[H]}{4\pi[e][n][v][L]},\quad \zeta=\dfrac{[H][v]}{c[E]},\\ M=\dfrac{[v]^2[\rho]}{[p]},\quad N=\dfrac{[e][E][L]}{[v]^2[m]},\quad \nu=\dfrac{[v]^2}{c^2}=\varepsilon\zeta\xi^{-1}.\end{array} \tag{18}$$

Для сокращения количества чисел подобия при обезразмеривании приняты два соотношения между характерными масштабами

$$[\rho]=[m][n], \quad [L]=[v][t]$$

и считалось, что характерные масштабы компонент любой векторной величины совпадают. Если отказаться от этих требований, то появятся новые числа подобия, которые не влияют на нерелятивистский предел. *С точки зрения математики физический предельный переход сводится к выбору фиксированной* ($\equiv$*предельной*) *точки в пространстве чисел подобия и построении теории возмущений по числам подобия решений рассматриваемой системы дифференциальных уравнений в предположении, что числа подобия стремятся к предельной точке определённым образом. Последнее означает, что числа подобия лежат в пространстве чисел подобия на некоторой гладкой поверхности, для которой выбранная фиксированная точка является предельной* (*отсюда её название*). *При этом считается, что решение системы дифференциальных уравнений является аналитической функцией по числам подобия, принадлежащим гладкой поверхности, а значение решения в предельной точке – это и есть искомый физический предел*. Выбор предельной точки и указанной гладкой поверхности в пространстве чисел подобия – это самый сложный, нестандартный и неформальный шаг при построении теории возмущений. В рассматриваемом случае пространство чисел подобия определяется независимыми константами $\{(\varepsilon,\xi,\zeta,M,N)\}$. Для нерелятивистского предела предельная точка имеет вид $(\varepsilon=0,\xi,\zeta,M,N)$, где ζ, ξ, M, N – фиксированные положительные константы, а гладкая поверхность – это прямая, параллельная оси ε и проходящая через предельную точку, а ε – локальная координата на этой прямой. Теперь построение теории возмущений по параметру ε – дело техники, и мы получим нерелятивистский предел. Действительно, при $\varepsilon\to 0$ и фиксированных ξ, ζ, M, N имеем

$$\left(\frac{[v]}{c}\right)^2=\nu=\varepsilon\zeta\xi^{-1}\to 0, \quad \left(\frac{c_s}{c}\right)^2=\frac{\gamma[p]}{[\rho]c^2}=\frac{\gamma\nu}{M}=\frac{\gamma\varepsilon\zeta\xi^{-1}}{M}\to 0,$$

где $c_s=\gamma[p]/[\rho]$ – характерная скорость звука. Значит, при $\varepsilon\to 0$ характерные скорости макроскопического и микроскопического движений оказываются нерелятивистскими, но в этом и заключается физический смысл нерелятивистского предела.

Считая все неизвестные функции в (17) аналитическими по ε в точке $\varepsilon=0$, ищем решение безразмерной РЭМГД-системы (17) в виде степенных рядов по параметру ε с коэффициентами разложений, зависящими от t, $\boldsymbol{x}$ и, как от параметров, чисел подобия ξ, ζ, M, N:

$$\rho_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} \rho_k^{\pm} \varepsilon^k, \quad \boldsymbol{v}_{\pm} = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{v}_k^{\pm} \varepsilon^k, \ldots \tag{19}$$

Подставляя разложения (19) в каждое уравнение системы (17), выполняя действия над рядами и приводя подобные члены, получим ряд по целым неотрицательным степеням ε, тождественно равный нулю. Приравнивая нулю коэффициенты полученного ряда и поступая так для каждого уравнения системы (17), приходим к счётной системе (цепочке) дифференциальных уравнений в частных производных на счётное число коэффициентов разложений. Из этой счётной системы дифференциальных уравнений все коэффициенты разложений, как показывает следующая теорема, в принципе могут быть найдены.

Теорема 4. *Пусть* $\boldsymbol{u}_k = (\rho_k^{\pm}, \boldsymbol{v}_k^{\pm}, p_k^{\pm}, \boldsymbol{H}_k, \boldsymbol{E}_k)$, $k = 0,1,2,\ldots$ *Тогда*:

1) $\boldsymbol{u}_0$ − *решение замкнутой определённой нелинейной системы дифференциальных уравнений в частных производных* $L(\boldsymbol{u}) = 0$, *совпадающей в размерном виде с ДЖЭМГД-системой*

$$\text{ДЖЭМГД:} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \boldsymbol{v} = 0, \\ \rho \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = -\nabla p \pm en \left(\boldsymbol{E} + \dfrac{1}{c} [\boldsymbol{v}, \boldsymbol{H}] \right), \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} + \gamma p \operatorname{div} \boldsymbol{v} = 0, \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla, \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0, \quad \operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0, \\ e_+ n_+ - e_- n_- = 0, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{H} = \dfrac{4\pi}{c} \left(e_+ n_+ \boldsymbol{v}_+ - e_- n_- \boldsymbol{v}_- \right), \end{cases} \tag{20}$$

где все величины за исключением t, c, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *имеют индексы* “$\pm$”, *а первые три равенства суть пары уравнений, записанные для электронной и ионной сплошных сред*.

2) *При* $k > 0$ *функция* $\boldsymbol{u}_k$ − *решение линейной системы*

$$L'(\boldsymbol{u}_0) \boldsymbol{u}_k = D_k(\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}), \tag{21}$$

где $L'(\boldsymbol{u})$ − *производная Фреше дифференциального оператора* $L(\boldsymbol{u})$, *а* D_k − *некоторый дифференциальный оператор, применённый к функциям* $\boldsymbol{u}_0, \ldots, \boldsymbol{u}_{k-1}$.#

Из **Теоремы 4** вытекают важные выводы.

(а) Дополненные граничными условиями (на которых мы не останавливаемся) системы $L(\boldsymbol{u}) = 0$ и (21) для $k > 0$ позволяют в принципе найти все коэффициенты разложений $\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{u}_1, \ldots$ в области D, занятой плазмой. Так что

цепочка уравнений на коэффициенты разложений (19), как говорят, расцепляется.

(б) Если $\boldsymbol{u}=(\rho_\pm,\boldsymbol{v}_\pm,p_\pm,\boldsymbol{H},\boldsymbol{E})=\boldsymbol{u}(\varepsilon,\xi,\zeta,N,M,t,\boldsymbol{x})$ − вектор неизвестных РЭМГД-системы (17), то $\boldsymbol{u}_0=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\boldsymbol{u}(\varepsilon)$ − нерелятивистский предел решений РЭМГД-системы, который может быть найден в размерном виде из решения уравнений ДЖЭМГД-системы (20).

В случае $\sigma=\infty$ ЭМГД-система (5)–(7) получается из ДЖЭМГД-системы (20) простой заменой переменных. Более того, ЭМГД- и ДЖЭМГД-системы математически эквивалентны. Точнее, справедлив следующий результат.

Теорема 5. *Пусть* ρ, $\boldsymbol{U}$, $p_\pm$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *– решение ЭМГД-системы* (5)–(7) *с* $\sigma=\infty$, *а* $\boldsymbol{v}_\pm$, $\rho_\pm$ *выражаются через* ρ, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{j}$ *по формулам* (8). *Тогда* $\rho_\pm$, $p_\pm$, $\boldsymbol{v}_\pm$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *удовлетворяют ДЖЭМГД-системе* (20). *Обратно, если* $\rho_\pm$, $p_\pm$, $\boldsymbol{v}_\pm$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *– решение ДЖЭМГД-системы* (20), *а* $\rho=\rho_++\rho_-$, $\boldsymbol{U}=(\rho_+\boldsymbol{v}_++\rho_-\boldsymbol{v}_-)/\rho$, *то* ρ, $\boldsymbol{U}$, $p_\pm$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$ *– решение ЭМГД-системы* (5)–(7) *с* $\sigma=\infty$. #

• **Нерелятивистский предел РЭМГД-уравнений ($\sigma<\infty$).** Полученные выше результаты переносятся на случай конечной проводимости. Основная проблема, как в РЭМГД-системе (16) в релятивистски инвариантной форме учесть трение электронов и ионов и джоулево тепло. Соответствующие изменения касаются только двух уравнений в (16) и, согласно [18], имеют вид:

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathscr{E}\boldsymbol{v}}{c^2\Gamma}\right)+\nabla p=\pm\frac{en}{\Gamma}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]\right)-\boldsymbol{R},$$
$$\frac{\rho T}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t}=Q, \tag{22}$$

где

$$\boldsymbol{R}_\pm=\pm\frac{2e_+e_-n_+n_-}{\sigma(1+1/\Gamma')}\left\{\frac{\boldsymbol{v}_+}{\Gamma_+}\left[1+\frac{m_+}{m_\Sigma}\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right)\right]-\frac{\boldsymbol{v}_-}{\Gamma_-}\left[1+\frac{m_-}{m_\Sigma}\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right)\right]\right\},$$
$$Q_\pm=\frac{2e_+e_-n_+n_-}{\sigma}\cdot\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\cdot c^2\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right),$$
$$\Gamma'=\left(1-\frac{v_{\text{отн}}^2}{c^2}\right)^{1/2},\quad v_{\text{отн}}=\frac{\{(\boldsymbol{v}_+-\boldsymbol{v}_-)^2-[\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_-]^2/c^2\}^{1/2}}{1-<\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_->/c^2}.$$

Нетрудно проверить, что $(\Gamma')^{-1}=[1-<\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_->/c^2]/(\Gamma_+\Gamma_-)$ и для идеальных политропных электронов и ионов энтропийные уравнения (22) сводятся к виду

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\,\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\frac{\gamma p}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\Gamma(\gamma-1)Q.$$

При обезразмеривании уравнения импульсов и давлений примут вид:

$$\frac{\rho}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathscr{E}\boldsymbol{v}}{\Gamma}\right)+\frac{\nabla p}{M}=\pm\frac{enN}{\Gamma}\big(\boldsymbol{E}+\zeta[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]\big)\mp$$

$$\mp\frac{2e_+e_-n_+n_-}{1+1/\Gamma'}\frac{\kappa^2\nu_m}{\xi^2}\left\{\frac{\boldsymbol{v}_+}{\Gamma_+}\left[1+\frac{m_+}{m_\Sigma}\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right)\right]-\frac{\boldsymbol{v}_-}{\Gamma_-}\left[1+\frac{m_-}{m_\Sigma}\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right)\right]\right\},$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\mathrm{div}\boldsymbol{v}-\frac{\gamma p}{\Gamma}\frac{\mathrm{d}\Gamma}{\mathrm{d}t}=\frac{\kappa^2\nu_m}{\xi^2}\cdot\frac{M}{\nu}\cdot\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\cdot 2e_+e_-n_+n_-\left(\frac{1}{\Gamma'}-1\right)\Gamma(\gamma-1),$$

где $(\Gamma')^{-1}=[1-<\boldsymbol{v}_+,\boldsymbol{v}_->\nu]/(\Gamma_+\Gamma_-)$, $\kappa=v_\mathrm{A}/[v]$, $v_\mathrm{A}=[H]/\sqrt{4\pi[\rho]}$ – альфеновская скорость, $\nu_m=c^2/(4\pi\sigma[v][L])$. Заметим, что при разложении в ряды по степеням ε в правой части уравнений для давлений сингулярности не возникают, поскольку $1/\Gamma'-1\sim\nu$ и значит $(1/\Gamma'-1)/\nu$ – регулярная по ε функция. В нерелятивистском пределе плазма квазинейтральная, и очевидно получаем для добавок $\boldsymbol{R}$, Q привычные выражения:

$$\boldsymbol{R}_\pm=\pm\frac{e_+e_-n_+n_-(\boldsymbol{v}_+-\boldsymbol{v}_-)}{\sigma}=\pm\frac{en\boldsymbol{j}}{\sigma},\quad Q_\pm=\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{e_+e_-n_+n_-(\boldsymbol{v}_+-\boldsymbol{v}_-)^2}{\sigma}=\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\frac{j^2}{\sigma}.$$

Тогда результаты **Теорем 4 и 5** сохраняются, если под ДЖЭМГД-системой понимать следующую систему уравнений

$$\text{ДЖЭМГД:}\quad\begin{cases}\dfrac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\boldsymbol{v}=0,\\[2mm] \rho\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=-\nabla p\pm en\left(\boldsymbol{E}+\dfrac{1}{c}[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]\right)\mp\dfrac{en\boldsymbol{j}}{\sigma},\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}+\gamma p\mathrm{div}\boldsymbol{v}=(\gamma-1)\dfrac{m_\mp}{m_\Sigma}\dfrac{j^2}{\sigma},\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla,\\[2mm] \dfrac{1}{c}\dfrac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,\\[2mm] e_+n_+-e_-n_-=0,\quad \mathrm{rot}\boldsymbol{H}=\dfrac{4\pi}{c}\big(e_+n_+\boldsymbol{v}_+-e_-n_-\boldsymbol{v}_-\big).\end{cases}\tag{23}$$

Естественно, в формулировке **Теоремы 5** надо опустить условие $\sigma=\infty$, а систему (20) заменить на систему (23).

6. МГД-предел. Получим уравнения классической МГД (1)–(3) из уравнений ЭМГД (5)–(7) в пределе бесконечно большого погонного числа частиц плазмы. Действуя по схеме п. 5, сначала обезразмерим ЭМГД-систему (5)–(7) и получим систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно

безразмерных значений всех величин, зависящую как от параметров от безразмерных констант ξ, κ, ν_m, M – чисел подобия:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}\rho\boldsymbol{U}=0,\\
&\frac{\partial\rho\boldsymbol{U}}{\partial t}+\mathrm{Div}\left(\rho U\cdot U+\frac{p_\Sigma}{M}+\kappa^2\xi^2\Pi^c+\kappa^2\Pi^p\right)=0,\\
&\frac{\partial p_\pm}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla p_\pm+\gamma p_\pm\mathrm{div}\boldsymbol{U}\pm\left(\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}\right)^{1/2}\kappa\xi\left(\frac{\boldsymbol{j}}{\rho}\cdot\nabla p_\pm+\gamma p_\pm\mathrm{div}\frac{\boldsymbol{j}}{\rho}\right)=\\
&=(\gamma-1)\frac{m_\mp}{m_\Sigma}\kappa^2\nu_m Mj^2,\\
&\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\mathrm{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \mathrm{div}\boldsymbol{H}=0,\quad \boldsymbol{j}=\mathrm{rot}\boldsymbol{H},\\
&\boldsymbol{E}+\frac{\xi^2}{\rho}\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E}=\nu_m\boldsymbol{j}-[\boldsymbol{U},\boldsymbol{H}]+\frac{1}{\rho}\mathrm{DivW},
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где тензоры Π^c, Π^p, W в безразмерном виде равны:

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{W}=-\Lambda\kappa\xi(\Pi^p+\xi^2\Pi^c)+\frac{\xi}{\kappa M}\left(\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2}p_+-\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2}p_-\right)\mathrm{I}_3+\xi^2(\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{j}+\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{U}),\\
&\Pi^p=\frac{H^2}{2}\mathrm{I}_3-\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H},\quad \Pi^c=\frac{\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{j}}{\rho},\quad \Lambda=\left(\frac{\lambda_+}{\lambda_-}\right)^{1/2}-\left(\frac{\lambda_-}{\lambda_+}\right)^{1/2},\\
&\mathrm{Div}\Pi^p=-[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}],\quad \boldsymbol{v}_\pm=\boldsymbol{U}\pm\left(\frac{\lambda_\mp}{\lambda_\pm}\right)^{1/2}\kappa\xi\frac{\boldsymbol{j}}{\rho}.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Числа подобия ξ, κ, ν_m, M выражаются через характерные масштабы по формулам

$$
\begin{aligned}
&\xi=\frac{c\lambda_+^{1/2}\lambda_-^{1/2}}{2\pi^{1/2}[\rho]^{1/2}[L]}=\frac{cm_-^{1/2}}{2\pi^{1/2}eZ^{1/2}[n]^{1/2}[L]},\\
&\kappa=\frac{v_\mathrm{A}}{[U]},\quad M=\frac{[U]^2[\rho]}{[p]},\quad \nu_m=\frac{c^2}{4\pi\sigma[U][L]},
\end{aligned}
\tag{26}
$$

где $v_\mathrm{A}=[H]/\sqrt{4\pi[\rho]}$ – характерная альфвеновская скорость, в частности, $\xi\sim 1/[N]$, $[N]=[n][L]^2$ – характерное погонное число частиц плазмы.

При обезразмеривании приняты следующие соотношения между характерными масштабами:

$$[\rho]=m_{+}[n],\quad [t]=[L]/[U],\quad [E]=[U][H]/c,\quad [j]=c[H]/(4\pi[L]).$$

В соответствии с идеологией п. 5 для предельного перехода нужно в пространстве чисел подобия $\{(\xi,\kappa,\nu_m,M)\}$ фиксировать точку и гладкую поверхность, для которой эта точка будет предельной. В данном случае этот выбор очевиден, поскольку при $\xi=0$, согласно (24), дополнительные слагаемые в (5)–(7), обведённые рамками, пропадают, и мы приходим к уравнениям классической МГД. Поэтому предельная точка равна $(\xi=0,\kappa,\nu_m,M)$, где κ, ν_m, M – фиксированные положительные числа, а гладкая поверхность – это прямая в пространстве чисел подобия, параллельная оси ξ и проходящая через предельную точку, при этом ξ является локальной координатой на указанной прямой. Теперь построение теории возмущений по параметру $\xi\to 0$ $(\equiv[N]\to\infty)$ происходит автоматически. Ищем решение системы (24), аналитическое по ξ в точке $\xi=0$ в виде степенных рядов по параметру ξ с коэффициентами, зависящими от t, $\boldsymbol{x}$ и, как от параметров, чисел подобия κ, ν_m, M:

$$\rho=\sum_{k=0}^{\infty}\rho_k\xi^k,\quad \boldsymbol{U}=\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{U}_k\xi^k,\ldots \tag{27}$$

Подставляя разложение (27) в систему (24), получим счётное семейство дифференциальных уравнений в частных производных на коэффициенты разложений, из которых эти коэффициенты, согласно следующей теореме, в принципе, могут быть найдены.

Теорема 6. *Семейство уравнений на коэффициенты разложений* (27) *можно разбить на группы уравнений, занумерованных числами* $0,1,2,\ldots$, *так что*:

1) *уравнения* 0-*ой группы образуют замкнутую определённую нелинейную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций* ρ_0, $\boldsymbol{U}_0$, $p_0^{\pm}$, $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{E}_0$, *в размерном виде совпадающую с уравнениями классической двухтемпературной* МГД:

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}\rho\boldsymbol{U}=0,\quad \frac{\partial\rho\boldsymbol{U}}{\partial t}+\operatorname{Div}(\rho\boldsymbol{U}\cdot\boldsymbol{U})=-\nabla p_{\Sigma}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}],\\ \frac{\partial p_{\pm}}{\partial t}+\boldsymbol{U}\cdot\nabla p_{\pm}+\gamma p_{\pm}\operatorname{div}\boldsymbol{U}=(\gamma-1)\frac{m_{\mp}}{m_{\Sigma}}\frac{j^2}{\sigma},\\ \frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}+\operatorname{rot}\boldsymbol{E}=0,\quad \operatorname{div}\boldsymbol{H}=0,\end{gathered} \tag{28}$$

$$\boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}].$$

В частности, сложением уравнений для давлений получается система уравнений классической МГД (1)–(3).

2) *уравнения* k*-ой группы,* $k > 0$, *образуют замкнутую определённую линейную систему дифференциальных уравнений в частных производных относительно функций* ρ_k, $\boldsymbol{U}_k$, $p_k^{\pm}$, $\boldsymbol{H}_k$, $\boldsymbol{E}_k$, *правые части которых зависят только от коэффициентов разложений с индексами* $< k$, *а коэффициенты линейной системы зависят только от коэффициентов разложений с нулевыми индексами, более того, дифференциальный оператор уравнений* k*-ой группы,* $k > 0$, *не зависит от* k *и является линеаризацией оператора классической двухтемпературной* МГД (28) *на решении* ρ_0, $\boldsymbol{U}_0$, $p_0^{\pm}$, $\boldsymbol{H}_0$, $\boldsymbol{E}_0$. #

7. Резюме. Выше была построена теория низкочастотных плазменных процессов, которая математически реализуется в виде двух эквивалентных систем уравнений – одножидкостной ЭМГД и двухжидкостной ДЖЭМГД. Теория электромагнитной гидродинамики плазмы существенно сложнее классической МГД-теории, предложенной Х. Альфвеном, и её модификаций, свободна от их противоречий и обладает рядом замечательных свойств:

1) она в полном объёме учитывает электрон-ионную структуру плазменного вещества, различие электронной и ионной скоростей, но не учитывает ток смещения и разделение зарядов;

2) она позволяет вычислить гидродинамические параметры реальных электронов и ионов, удовлетворяющие законам сохранения массы, энергии, импульса;

3) плотность модельного тока в ЭМГД-теории совпадает с плотностью физического тока, обусловленного движением электронов и ионов;

4) ЭМГД-теория в полном объёме учитывает коллективные явления в нерелятивистской квазинейтральной плазме;

5) она единообразным способом описывает динамику плотной, разреженной плазмы и вакуумного электромагнитного поля;

6) уравнения ЭМГД-теории математически корректно выводятся из первых принципов и потому являются фундаментальными;

7) уравнения классической МГД получаются предельным переходом из ЭМГД-уравнений, когда характерное погонное число частиц плазмы стремится к бесконечности;

8) аналитическое и численное исследование решений ЭМГД-уравнений реализуемо в такой же степени, как и решение МГД-уравнений;

9) ЭМГД-модель является теоретическим фильтром, позволяющим выявить и отсеять результаты МГД-теории, являющиеся артефактами, т.е. свойствами МГД-модели, а не реальной плазмы.

Достоверность результатов ЭМГД-теории определяется её фундаментальностью. Решение конкретных задач показывает, что “зазор”

между ЭМГД- и МГД-теориями огромен, а результаты ЭМГД-теории приводят к переоценке ценностей и получению нетривиальной информации о плазменных процессах. В то же время замена отжившей МГД-теории в исследовательской практике на ЭМГД наталкивается, с одной стороны, на сложность ЭМГД-модели, а с другой – на ряд устоявшихся мифов, в особенности на следующие два:

- учёт инерции электронов и квазинейтральность плазмы несовместны;
- из-за малости отношения масс $m_e / m_i << 1$ (для водорода $m_e / m_i = 1/1836$) инерция электронов не играет существенной роли в динамике нерелятивистской плазмы, и ей необходимо пренебречь.

Первое положение, согласно **Теореме 4**, неверно, а второе бездоказательно, апеллирует, по сути, к религиозным фрагментам сознания, вследствие чего выпадает из логического дискурса.

Часть II. Приложения ЭМГД-теории

ЭМГД-теория, как отмечалось выше, является теоретической основой исследования нерелятивистских процессов в реальной плазме. Поэтому область её приложений весьма обширна. Результаты исследований, собранные в монографии [5], позволяют обнаружить новые плазменные эффекты, недоступные МГД-теории. Ниже обсуждаются три резонансные темы, иллюстрирующие возможности ЭМГД-теории.

8. Аномальное ускорение дейтонов в z-пинчах. Предварительно скажем несколько слов об установках z-пинч. Эти установки находились у истоков программы УТС (Управляемый Термоядерный Синтез). Схема установки изображена на рис. 1.

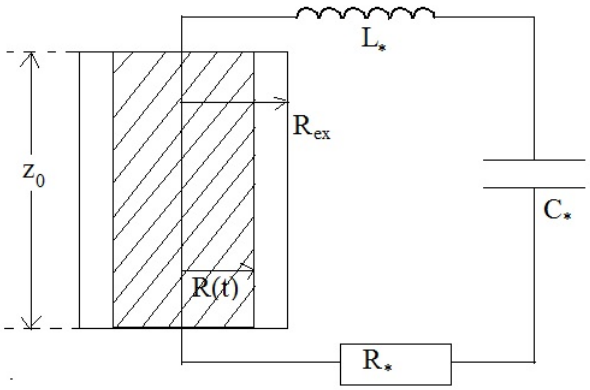


Рис. 1. Схема установки z-пинч: $R(t)$ – радиус плазменного шнура, R_{ex} – радиус камеры установки, z_0 – высота камеры, L_*, C_*, R_* – индуктивность, ёмкость, сопротивление внешней цепи. Типичные значения [19]: $R_{ex} = 20$см, $z_0 = 90$см

Установка представляет собой стеклянную или фарфоровую трубу радиуса R_{ex} и длиной z_0, заполненную газом (дейтерий и пр.), запаянную с торцов медными

заглушками, к которым подводятся концы конденсаторной заряженной батареи. При замыкании внешней цепи происходит электрический разряд в газе установки и на определённом этапе образуется плазменный шнур с током вдоль оси трубы z. Ток, протекающий через шнур, играет двоякую роль: с одной стороны, он разогревает плазму шнура за счёт выделения в ней джоулева тепла, с другой, азимутальное магнитное поле, порождённое осевым током, сжимает плазму к оси установки z (отсюда название установки “z-пинч” от английского to pinch – сдавливать, сжимать). Таким образом возникают благоприятные условия для возникновения реакций синтеза атомных ядер типа приведённых на рис. 2, в результате которых выделяется огромная энергия.

$$(a)\quad d+d \begin{array}{l} \nearrow \mathrm{He}^3 + n + 3.25\text{Мэв} \\ \searrow t + p + 4\text{Мэв} \end{array} \qquad\qquad (б)\quad d + t \to \mathrm{He}^4 + n + 17.6\text{Мэв}$$

Рис. 2. Типичные реакции синтеза (*а*) в дейтерии – обе реакции равновероятны, (*б*) – в смеси дейтерия и трития

Однако как термоядерные установки z-пинчи по ряду причин не состоялись. Но при работе установок были обнаружены важные физические эффекты, до сих пор не получившие доказательного объяснения. Один из них мы сейчас обсудим.

Вследствие неустойчивости границы плазменного шнура в нескольких местах по его длине образуются плазменные перетяжки, так что плазменный шнур делается похожим на гирлянду сосисок, а перетяжечная неустойчивость в литературе обычно называется “сосисочной” неустойчивостью (sausage instability). На этапе образования перетяжек происходят самые интересные эффекты динамики плазмы: падение полного тока и образование “плато” на токовой осциллограмме; сильное, до энергий ~ 1Мэв, ускорение дейтонов ($\equiv$ионов дейтерия) и электронов вдоль оси установки z и т.д. Обсудим последний эффект. Мощное ускорение дейтонов возможно только при возникновении в перетяжке сильного электрического поля вдоль оси z, однако электрическое поле, вычисляемое по МГД-теории (см. ниже) оказывается слишком слабым. Считая перетяжку цилиндрическим столбиком радиуса r_0, а плазму в перетяжке несжимаемой вязкой и электропроводной, рассмотрим модельную задачу о нахождении стационарного течения указанной плазмы в круглой трубе радиуса r_0 в предположении цилиндрической симметрии течения (в случае перетяжки роль стенки трубы играет сильное вакуумное магнитное поле). Течение плазмы в трубе обусловлено током J вдоль её оси z и постоянным перепадом по оси трубы давлений электронов и ионов. Рассмотрим решение этой задачи в классической МГД и ЭМГД. Уравнения

вязкой несжимаемой электропроводной ЭМГД-плазмы в простейшем случае имеют вид [5]:

$$\begin{gathered}
\rho = \mathrm{const}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0, \\
\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + \nabla p_{\Sigma} = \frac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] - \mathrm{Div}\Pi^{c} + \mathrm{Div}(\Pi^{(U)} + \Pi_{*}^{(c)}), \\
\boldsymbol{E} + \frac{c^2 \lambda_{+}\lambda_{-}}{4\pi\rho}\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}] + \frac{1}{\rho}\mathrm{Div}(\mathrm{W} - \Pi^{(c)} - \Pi_{*}^{(U)}), \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0,
\end{gathered} \tag{29}$$

где тензоры вязких напряжений имеют вид:

$$\begin{gathered}
\Pi^{(U)} = 2\mu_{\Sigma}\mathrm{def}\boldsymbol{U}, \Pi_{*}^{(U)} = 2\mu_{*}\mathrm{def}\boldsymbol{U}, \Pi^{(c)} = \frac{2\mu^{*}}{\rho}\mathrm{def}\boldsymbol{j}, \Pi_{*}^{(c)} = \frac{2\mu_{*}}{\rho}\mathrm{def}\boldsymbol{j}, \\
\mu_{\Sigma} = \mu_{+} + \mu_{-}, \quad \mu_{*} = \lambda_{-}\mu_{+} - \lambda_{+}\mu_{-}, \quad \mu^{*} = \lambda_{-}^{2}\mu_{+} + \lambda_{+}^{2}\mu_{-}.
\end{gathered} \tag{30}$$

В равенствах (29), (30) $\mu_{\pm}$ – гидродинамические вязкости электронов и ионов, σ – проводимость плазмы, которые ниже считаются постоянными, W – тензор холловских напряжений. Наконец, $\mathrm{def}\boldsymbol{U}$ – тензор деформаций поля $\boldsymbol{U}$, задаваемый в декартовых координатах равенствами:

$$(\mathrm{def}\boldsymbol{U})^{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U^{i}}{\partial x^{j}} + \frac{\partial U^{j}}{\partial x^{i}}\right), \quad 1 \le i, j \le 3.$$

Уравнения вязкой несжимаемой электропроводной МГД в простейшем случае имеют вид:

$$\begin{gathered}
\rho = \mathrm{const}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{U} = 0, \\
\rho \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{U}}{\mathrm{d}t} + \nabla p = \frac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \mathrm{Div}\Pi, \\
\boldsymbol{E} = \frac{\boldsymbol{j}}{\sigma} - \frac{1}{c}[\boldsymbol{U}, \boldsymbol{H}], \\
\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} + \mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \quad \boldsymbol{j} = \frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}, \quad \mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \\
\Pi = 2\mu\mathrm{def}\boldsymbol{U},
\end{gathered} \tag{31}$$

где считается $\mu = \mathrm{const}$, $\sigma = \mathrm{const}$, а под μ понимается μ_{Σ}. ЭМГД- и МГД-теории несжимаемой плазмы имеют два важных различия: 1) в ЭМГД условие квазинейтральности выполняется точно за счёт дополнительного уравнения $\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0$, без которого система (29)–(30) не будет определённой, 2) электрическое поле в ЭМГД порождается в том числе вязкими напряжениями,

как это следует из обобщённого закона Ома в (29). Рассмотрим стационарные решения системы (29)–(30) вида

$$\boldsymbol{U}(r), \quad \boldsymbol{H}(r), \quad \boldsymbol{E}(r), \quad p_{\pm}(r,z) = \frac{\partial p_{\pm}}{\partial z} \cdot z + \varphi_{\pm}(r), \quad 0 \le r \le r_0, \tag{32}$$

где $\partial p_{\pm} / \partial z$ – заданные константы, а $\varphi_{\pm}(r)$ вместе с $\boldsymbol{U}(r)$, $\boldsymbol{H}(r)$, $\boldsymbol{E}(r)$ подлежат нахождению. Считая, что решение (32) не имеет особенностей на оси трубы $r = 0$, получим из уравнений (29) соотношения $E_r = E_\varphi = 0$, $H_r = 0$, $U_r = 0$, $j_r = 0$, $E_z = \text{const}$, где константа подлежит определению. На стенке $r = r_0$ трубы поставим граничные условия

$$H_\varphi(r_0) = H_\varphi^0, H_z(r_0) = H_z^0, U_\varphi(r_0) = U_\varphi^0, U_z(r_0) = U_z^0, j_\varphi(r_0) = j_z(r_0) = 0, \tag{33}$$

где H_φ^0, H_z^0, U_φ^0, U_z^0 – произвольные константы, причём константа H_φ^0 связана с полным током соотношением $J = cr_0 H_\varphi^0 / 2$. Подставляя функции (32) в систему (29)–(30), нетрудно найти в явном виде решения, удовлетворяющие граничным условиям (33) [5]. Нас интересует прежде всего постоянное электрическое поле E_z, определяющее ускорение дейтонов. Оно равно [5]:

$$\begin{gathered} E_{\text{ЭМГД}} = E_z = \frac{J}{\pi r_0^2 \sigma_*} - \frac{\lambda_\Sigma}{\rho \mu_\Sigma}\left(\mu_+ \frac{\partial p_-}{\partial z} - \mu_- \frac{\partial p_+}{\partial z}\right), \\ \sigma_* = \sigma\left[1 - \frac{2\mathrm{I}_1(G)}{G\mathrm{I}_0(G)}\right], \quad G \underset{\text{def}}{=} \frac{\rho r_0}{\lambda_\Sigma}\left(\frac{\mu_\Sigma}{\mu_+ \mu_- \sigma}\right)^{1/2}, \end{gathered} \tag{34}$$

где σ – спитцеровская проводимость плазмы, I_0, I_1 – функции Бесселя мнимого аргумента порядка 0 и 1 соответственно. В случае классической МГД ищем решение системы (31) вида

$$\boldsymbol{U}(r), \quad \boldsymbol{H}(r), \quad \boldsymbol{E}(r), \quad p(r,z) = \frac{\partial p}{\partial z} \cdot z + \varphi(r), \quad 0 \le r \le r_0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const} \tag{35}$$

с граничными условиями

$$H_\varphi(r_0) = H_\varphi^0, \quad H_z(r_0) = H_z^0, \quad U_\varphi(r_0) = U_\varphi^0, \quad U_z(r_0) = U_z^0. \tag{36}$$

Подставляя (35) в (31), находим в явном виде решения, удовлетворяющие граничным условиям (36) [5]. При этом поле E_z вычисляется по формуле

$$E_{\text{МГД}} = E_z = \frac{J}{\pi r_0^2 \sigma}. \tag{37}$$

Сравним электрические поля $E_{\text{ЭМГД}}$ и $E_{\text{МГД}}$ (считая для простоты $\partial p_{\pm} / \partial z = 0$) для типичных параметров дейтериевой перетяжки [6]

$$r_0 = 5 \cdot 10^{-2}\,\text{см}, \quad n = n_+ = n_- = 10^{19}\,\text{см}^{-3}, \quad T_+ = T_- = 6.5\,\text{Кэв}.$$

Для подсчёта коэффициентов гидродинамической вязкости электронов и ионов $\mu_{\pm}$ и спитцеровской проводимости σ воспользуемся формулами Брагинского [20]:

$$\mu_+ = 0.96\frac{3m_+^{1/2}(k_{\text{В}}T_+)^{5/2}}{4\pi^{1/2}e^4Z^4L}, \mu_- = 0.733\frac{3m_-^{1/2}(k_{\text{В}}T_-)^{5/2}}{4(2\pi)^{1/2}e^4ZL}, \sigma = \frac{3(k_{\text{В}}T_-)^{3/2}}{4(2\pi m_-)^{1/2}e^2ZL \cdot 0.5129},$$

где T_+ измеряется в °К, $k_{\text{В}}$ – постоянная Больцмана, $L = 15$ – кулоновский логарифм. Тогда для указанных выше параметров дейтериевой перетяжки прямое вычисление показывает $G << 1$ и, значит,

$$1 - \frac{2\text{I}_1(G)}{G\text{I}_0(G)} \cong \frac{G^2}{8} = \frac{n^2e^2r_0^2}{8\mu_-\sigma} \simeq 10^{-5}.$$

Поэтому окончательно получаем $\sigma_* = \sigma \cdot 10^{-5}$. Итак, электрическое поле в перетяжке $E_{\text{ЭМГД}}$, согласно ЭМГД-теории, в 10^5 раз (!) больше электрического поля $E_{\text{МГД}}$ в МГД-теории, что позволяет на базе ЭМГД-теории просто объяснить как аномальное ускорение дейтонов, так и падение тока. Согласно ЭМГД, проводимость плазмы в перетяжке σ_* всегда меньше спитцеровской σ. Падение проводимости плазмы в перетяжках допускалась рядом авторов, но объяснялось это явление [21] “микротурбулентностью за счёт развития в токовом слое некоторых типов неустойчивости”, т.е., по сути, никак. В ЭМГД-теории колоссальный рост электрического поля обусловлен появлением дополнительных холловских слагаемых в обобщённом законе Ома в (29), ответственных за генерацию электрического поля вязкими напряжениями и приводящими к формуле (34).

Итак, *сравнение двух теорий* – ЭМГД и МГД – *при вычислении электрического поля в перетяжке привело к огромной разнице в результатах, причём с экспериментом согласуется только результат ЭМГД-теории*.

Выше температуры электронов и ионов предполагались постоянными, что применительно к процессам в перетяжечной плазме достаточно разумно, поскольку время жизни перетяжек составляет несколько десятков микросекунд. Если учесть изменение температуры, то системы (29)–(30) и (31) должны быть дополнены уравнениями для температур [5], и тогда поиск стационарных решений, в том числе и нахождение поля E_z, может быть осуществлен только численно. При этом стационарные решения существуют, скорее всего, только при дополнительном учёте излучения плазмы (прежде всего тормозного и, быть

может, фоторекомбинационного). Однако нет сомнений, что и в этом случае осевое электрическое поле в перетяжках в ЭМГД- и МГД-теориях будет отличаться на несколько порядков.

9. Ускорение плазмы в каналах постоянного сечения. Ускорение плазмы в каналах плазменных ускорителей в значительной степени определяется пондеромоторной силой $c^{-1}[\boldsymbol{j},\boldsymbol{H}]$. Однако в МГД-теориях её значение существенно отклоняется от реальной физической величины этой силы, что ведёт к серьёзным ошибкам при вычислении ускорения плазмы. Причина этого в слишком грубом определении магнитного поля в МГД. Кроме того, в газовой динамике ускорение газа в канале обусловлено переменностью площади его сечения (сопло Лаваля). В плазменных ускорителях, как будет показано ниже, огромное ускорение может иметь место и в каналах постоянного сечения, что лишний раз свидетельствует о негазовом характере плазменных процессов. Для реализации практического ускорения плазмы необходимо, чтобы стенки канала были электродами, поэтому канал ускорителя должен иметь две стенки, образующие, как правило, коаксиальные цилиндрические поверхности. Типичная схема плазменного ускорителя [22] представлена на Рис. 3. Рассмотрим для простоты плоский канал с геометрией полей, токов и скоростей, указанных на Рис. 4.

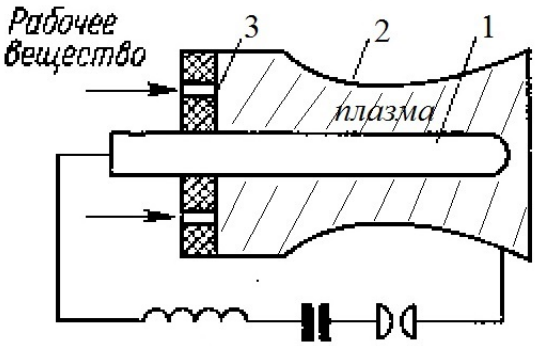


Рис. 3. Схема плазменного ускорителя: 1 – внутренний электрод, 2 – профилированный внешний электрод, 3 – диэлектрическая прокладка

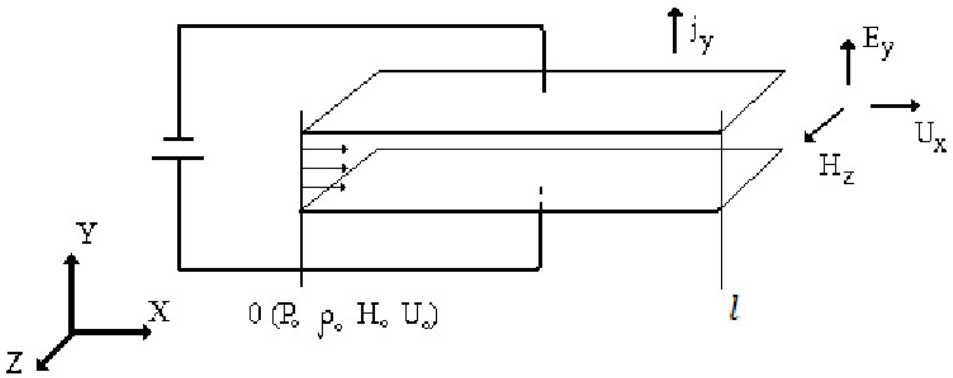


Рис. 4. Схема плоского канала и геометрия полей

Наибольший интерес представляют установившиеся течения плазмы в канале ускорителя. Для холодной плазмы стационарные течения ($\partial/\partial t=0$), обладающие плоской симметрией ($\partial/\partial\varphi=\partial/\partial z=0$), подчиняются ЭМГД-системе (5)–(7), где опущены слагаемые, учитывающие джоулев нагрев.

$$\frac{\partial\rho U_x}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial\rho U_x^2}{\partial x}+\frac{1}{8\pi}\frac{\partial H_z^2}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x}=0,\quad j_y=-\frac{c}{4\pi}\frac{\partial H_z}{\partial x},\tag{38}$$
$$E_y=-\frac{c}{4\pi\sigma}\frac{\partial H_z}{\partial x}+\frac{U_xH_z}{c}-\frac{c\lambda_+\lambda_-}{4\pi\rho}\frac{\partial}{\partial x}\left(U_x\frac{\partial H_z}{\partial x}\right),$$
$$0\le x\le\ell.$$

Система (38) имеет несколько первых интегралов с константами, вычисляемыми по входным значениям параметров плазмы

$$\rho U_x\equiv\rho_0U_0,\quad \rho U_x^2+\frac{H_z^2}{8\pi}=\rho_0U_0^2+\frac{H_0^2}{8\pi},\quad E_y=\text{const}.\tag{39}$$

Принимая входные значения параметров плазмы и длину канала за характерные значения, обезразмерим ЭМГД-уравнения, сведя их к одному уравнению относительно напряжённости магнитного поля H_z, для нахождения которого поставим следующую краевую задачу:

$$\xi^2U\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(U\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}\right)+\mu\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}-UH+E=0,$$
$$U=U(H)=1+\frac{1}{2M_\mathrm{A}^2}\left(1-H^2\right),\quad \rho=\frac{1}{U},\tag{40}$$
$$H(0)=1,\quad \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}(1)=0,\quad E=\text{const},\quad 0\le x\le 1,$$

где для экономии индексов использованы более простые обозначения для безразмерных значений неизвестных функций: $H=H_z$, $E=E_y$, $U=U_x$. Кроме того, при обезразмеривании считалось $[E]=[U][H]/c=U_0H_0/c$. В (40) ξ, μ, M_A – числа подобия, вычисляемые по формулам

$$\xi=\frac{c\left(\lambda_+\lambda_-\right)^{1/2}}{\left(4\pi\rho_0\right)^{1/2}\ell},\quad \mu=\frac{1}{\mathrm{Re_m}}=\frac{c^2}{4\pi\sigma U_0\ell},\quad M_\mathrm{A}=\frac{U_0}{v_\mathrm{A}},\tag{41}$$

где $v_\mathrm{A}=H_0/\sqrt{4\pi\rho}$ – характерная альфвеновская скорость.

Численное решение краевой задачи (40) показало наличие ускорения плазмы в плоском канале. Зависимость этого ускорения от чисел подобия M_{A} и ξ представлена на рисунках. При уменьшении альфвеновского числа Маха M_{A} происходит резкое (в десятки и сотни раз) ускорение плазмы в канале (Рис. 5), а с уменьшением ξ ускорение локализуется у входа в канал, т.е. в основном происходит в узкой зоне с шириной $\sim\xi$, примыкающей ко входу в канал, а за пределами этой зоны ускорение потока плазмы незначительное (Рис. 6).

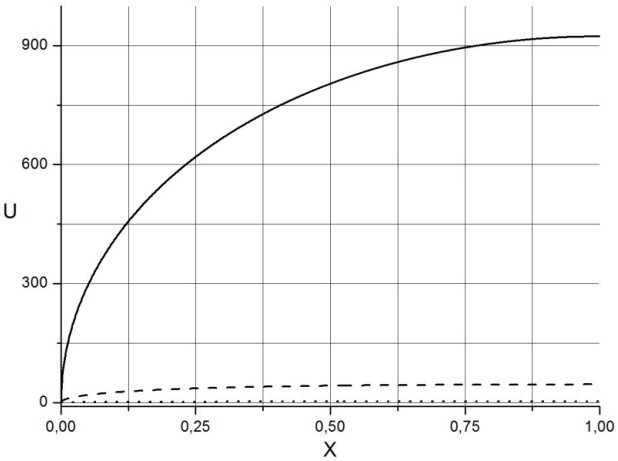


Рис. 5. Зависимость ускорения плазмы в плоском канале от значения M_{A}:
$E=1,\ \mu=10^{-4},\ \xi=0.1,$
$M_{\mathrm{A}}=0.5(\cdots),0.1(---),0.01(-)$

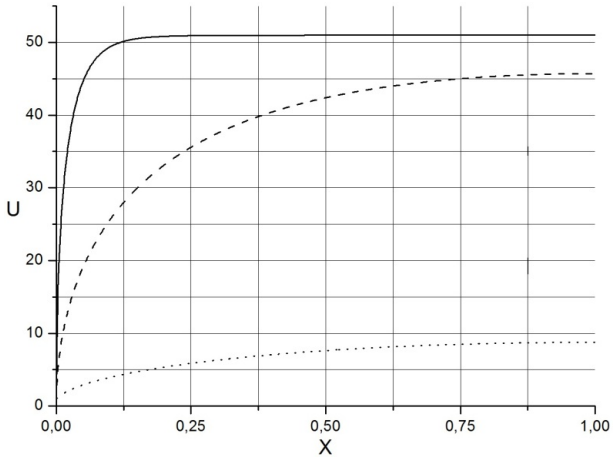


Рис. 6. Зависимость ускорения плазмы в плоском канале от значения ξ: $E=1,$
$\mu=10^{-4},\ M_{\mathrm{A}}=0.1,$
$\xi=1(\cdots),0.1(---),0.01(-)$

Сравним полученные результаты с решением задачи о стационарном течении в МГД-теории. Постановка задачи в МГД-теории получится, если положить в (40) $\xi=0$ и рассмотреть не краевую, а задачу Коши на уравнения:

$$\frac{\mu \mathrm{d}H}{\mathrm{d}x}-UH+E=0,\quad H(0)=1,$$
$$U=U(H)=1+\frac{1}{2M_{\mathrm{A}}^{2}}\left(1-H^{2}\right). \tag{42}$$

Решение дифференциального уравнения (42) состоит из особых решений $H(x)\equiv H^{0}$, где H^{0} – корень кубического уравнения $E-HU(H)=0$ и решений, задаваемых интегралом

$$\mu\int\frac{\mathrm{d}H}{HU(H)-E}=x+\mathrm{const}. \tag{43}$$

Поскольку интеграл в левой части (43) расходится, если один из пределов интегрирования совпадает с корнем уравнения $E-HU(H)=0$, то задача Коши

(42) при $E=1$ имеет только особое решение $H(x)=1$, откуда вытекает $U(x)\equiv 1$, и, значит, никакого ускорения в канале нет (Если $\mu=0$, то к полученному выводу приходим ещё быстрее: тогда (42) – это алгебраическое уравнение относительно H, имеющее решение $H=1$ только при $E=1$). Кстати, в представленных на Рис. 5,6 результатах считалось $E=1$ именно по той причине, чтобы иметь возможность их сравнения с результатами МГД-теории при $\mu=0$. Более тщательный анализ показывает: при $0<E<1$ для решения задачи Коши (42) функция $U(x)$ монотонно убывает и $U(1)<U(0)$, а при $E>1$ для достаточно малых μ также $U(1)<U(0)$ и, таким образом, ускорение потока плазмы в канале отсутствует.

Итак, *в МГД-теории стационарных течений с ускорением в плоском канале нет*. Этот вывод противоречит экспериментальным данным, здравому смыслу и физике процесса. Если между стенками – электродами канала (Рис. 4) – приложено электрическое поле E, то с необходимостью возникает электрический ток j_y свободных электронов и ионов между стенками, который при наличии магнитного поля H_z вызывает, благодаря пондеромоторной силе $j_y H_z / c$, движение плазмы вдоль оси x с некоторым ускорением. Классическая МГД не способна отразить эти причинно-следственные связи, поскольку в этой теории модельный ток может существенно отличаться от физического тока, обусловленного движением электронов и ионов, что, собственно говоря, было только что продемонстрировано на примере исследования ускорения плазмы в плоском канале. Чтобы восстановить реальную физическую картину, необходимо более точно вычислять магнитное поле $\boldsymbol{H}$ (так, чтобы, в частности, модельный ток $\frac{c}{4\pi}\mathrm{rot}\boldsymbol{H}$ совпал бы с физическим током), что и достигается в ЭМГД-теории существенным усложнением обобщённого закона Ома, в том числе появлением большого количества новых холловских слагаемых (заметим, что вторая производная в (38) – это новое холловское слагаемое $\sim(\lambda_+\lambda_- / \rho)\mathrm{Div}\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{U}$, которого нет в МГД).

Указанная причина (слишком грубое вычисление магнитного поля $\boldsymbol{H}$ в МГД) огромного расхождения результатов ЭМГД- и МГД-теорий, применительно к проблеме ускорения плазмы в плоском канале, универсальна и, разумеется, сохраняет своё значение в полном объёме и для коаксиального канала на Рис. 3. Приближение плоского канала лишь позволило выявить причину различия результатов двух теорий, сделав её наглядной и доказательной, ограничиваясь совсем простым математическим аппаратом. Поэтому можно ожидать, что и для коаксиального канала: а) ускорение плазмы определяется преимущественно пондеромоторной силой, а не переменностью сечения канала, б) картины ускорений, полученные в ЭМГД- и МГД-теориях, будут существенно различаться как качественно, так и количественно.

Наконец, приближение холодной плазмы позволило упростить математические выкладки, но полученные выводы переносятся и на случай горячей плазмы [5].

10. Равновесные конфигурации плазмы в магнитной ловушке θ-пинч. Как уже говорилось в п. 8, z-пинчи непригодны для реализации программы УТС. Альтернативная рабочая идея связана с нагревом и сжатием плазмы в магнитных ловушках, где плазма термоизолируется от стенок ловушки и внешних токов сильным магнитным полем. При этом плазма в ловушке должна находиться в равновесном состоянии. Отсюда возникает актуальная задача поиска равновесных конфигураций плазмы в магнитных ловушках. Условие равновесия для гидродинамической плазмы задаётся равенствами

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \boldsymbol{U} = 0. \tag{44}$$

В классической МГД равновесие определяется балансом двух сил – силы Ампера и градиента давления, а в ЭМГД – трёх, третья сила – это сила инерции $\boldsymbol{F}_{\text{in}}$ из п. 4, что математически записывается следующим образом:

$$\begin{array}{ll} \text{Классическая МГД} & \text{ЭМГД} \\ \nabla p = \dfrac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}], & \nabla(p_+ + p_-) = \dfrac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}] + \boldsymbol{F}_{\text{in}}, \quad \boldsymbol{F}_{\text{in}} = -\lambda_+\lambda_- \boldsymbol{j} \cdot \nabla \dfrac{\boldsymbol{j}}{\rho}, \\ \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_0 = \dfrac{c}{4\pi}\text{rot}\boldsymbol{H}, & \boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_0 = \dfrac{c}{4\pi}\text{rot}\boldsymbol{H}, \\ \text{div}\boldsymbol{H} = 0. & \text{div}\boldsymbol{H} = 0, \\ & \boldsymbol{j} \cdot \nabla S_\pm = 0, \quad \lambda_+ p_+ - \lambda_- p_- = h(\rho). \end{array} \tag{45}$$

Здесь $h(\rho)$ – произвольная гладкая функция плотности, $\boldsymbol{j}_0$ – плотность внешних токов, удовлетворяющих условию $\text{div}\boldsymbol{j}_0 = 0$, $S_\pm$ – плотности энтропии электронов и ионов. Рассмотрим возникающие отсюда различия в уравнениях плазмостатики и равновесных конфигурациях на примере осесимметричной ловушки θ-пинч, состоящей из металлического кожуха, внутри которого закреплены несколько (внешних) кольцевых токов с центрами на оси симметрии (Рис. 7). Плазма удерживается в равновесии магнитным полем кольцевых токов и располагается в пространстве между кожухом и токами. При этом внешние токи и ток плазмы – азимутальные ($j_r = j_z = 0$), а магнитное поле – полоидальное ($H_\varphi = 0$). Количество внешних колец N с токами определяет название ловушки: $N = 1$ – Диполь, $N = 2$ – Дублет, $N = 3$ – Тримикс и т.д. Равновесия в ловушках θ-пинч наглядно демонстрируют недостаточность МГД-теории. Действительно, поскольку азимутальный ток обусловлен вращением электронов и ионов вокруг оси z, а на частицу массы m, двигающуюся с азимутальной скоростью v по окружности радиуса r,

действует центробежная сила mv^2/r, направленная по радиусу от центра вращения, то на электроны и ионы, содержащиеся в единичном объёме плазмы, действует суммарная центробежная сила F_c, равная

$$F_c = \frac{\rho_+ v_{+\varphi}^2}{r} + \frac{\rho_- v_{-\varphi}^2}{r} = \left(\frac{\rho_+ \lambda_-^2}{\rho^2} + \frac{\rho_- \lambda_-^2}{\rho^2} \right) \frac{j_\varphi^2}{r} = \frac{\lambda_+ \lambda_-}{r\rho} j_\varphi^2,$$

где использованы формулы (8) и (44) и вытекающее из них равенство $\boldsymbol{v}_\pm = \pm\lambda_\mp \boldsymbol{j}/\rho$.

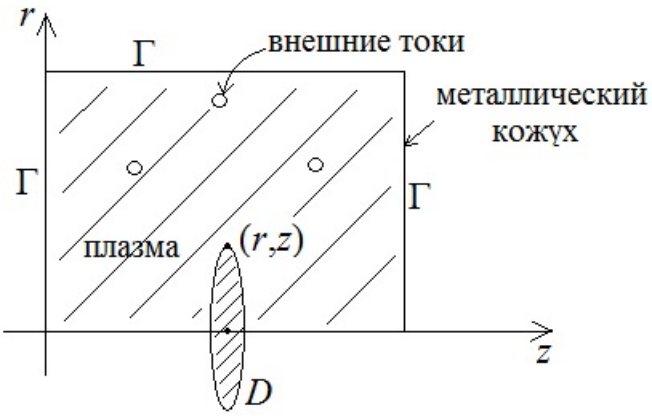


Рис. 7. Магнитная ловушка θ-пинч: $\dfrac{\partial}{\partial\varphi} = 0$, $j_r = j_z = 0$, $H_\varphi = 0$

Итак, $\boldsymbol{F}_c = (F_c, 0, 0)$ в цилиндрических координатах, что, как нетрудно проверить, совпадает с $\boldsymbol{F}_{\text{in}} = -\lambda_+\lambda_- \boldsymbol{j} \cdot \nabla(\boldsymbol{j}/\rho)$. Поэтому *ЭМГД-плазмостатика учитывает в балансе сил центробежную силу, а МГД-плазмостатика – нет, что приводит к качественным и количественным ошибкам в определении равновесных конфигураций в МГД-теории*. При этом пренебречь центробежной силой в балансе сил не удаётся. Во-первых, при условии реализации термоядерного синтеза $j_\varphi \to \infty$, дабы максимально разогреть плазму за счёт джоулева тепла, а $\rho = en\lambda_\Sigma$ ограничена сверху, ибо концентрация частиц плазмы n в ловушке не может быть слишком большой (обычно считается $n \le 10^{14}\,\text{см}^{-3}$), в противном случае потери на тормозное излучение электронов приведут к недопустимому охлаждению плазмы [23]. Учитывая сказанное, для термоядерных параметров плазмы очевидно $F_c \to \infty$ и не может быть малой. Во-вторых, даже если считать F_c малой добавкой, она может существенно изменить равновесную конфигурацию, поскольку последняя определяется условием типа равенства (45).

Нахождение равновесий в МГД основано на следующей теореме. Пусть

$$\Psi(r,z) \underset{\text{def}}{=} \int\limits_{D(r,z)} \langle \boldsymbol{H}, \boldsymbol{n} \rangle \mathrm{d}\sigma = 2\pi \int\limits_0^r H_z(r,z) r \mathrm{d}r$$

поток поля $\boldsymbol{H}$ через круг $D = D(r,z)$ радиуса r, центр которого находится в точке $(0,z)$ на оси z, а плоскость круга ортогональна оси z, где $\boldsymbol{n} = (0,1)$ – единичная нормаль (Рис. 7). Величина $\Psi(r,z)$ называется *магнитным потоком*.

Теорема 7. 1) *Для решения уравнений МГД-равновесия* (45) *давление функционально зависит от магнитного потока,* $p = P(\Psi)$ *с произвольной функцией* $P(\Psi)$.

2) *Если для данной функции* $P(\Psi)$ *функция* Ψ *удовлетворяет эллиптическому уравнению*

$$\Delta^* \Psi = -16\pi^3 r^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Psi} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_\varphi^0 \text{ (уравнение Грэда – Шафранова)}, \qquad (46)$$

а функции H_r, H_z, j_φ, p *вычисляются по формулам*

$$H_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad j_\varphi = 2\pi r c \frac{\partial P}{\partial \Psi}, \quad p(r,z) = P(\Psi(r,z)),$$

то получим решение уравнений МГД-плазмостатики (45) *в случае* θ*-пинча*.

3) *Любое другое решение уравнений МГД-плазмостатики в случае* θ*-пинча может быть получено указанным в* 2) *способом для подходящей функции* $P(\Psi)$. #

Выше было принято обозначение

$$\Delta^* \Psi \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial z},$$

а $j_\varphi^0(r,z)$ – заданная функция.

В случае θ-пинча в уравнениях плазмостатики (45) условие $\boldsymbol{j} \cdot \nabla S_\pm = 0$ выполнено всегда, а $p_\pm$ вычисляется по $p = p_+ + p_-$ простой явной формулой $p_\pm = [\lambda_\mp p \pm h(\rho)] / \lambda_\Sigma$. Для решения уравнений ЭМГД-плазмостатики (45) в случае θ-пинча предположим, что давление p функционально зависит от Ψ и r, $p = P(r,\Psi)$, тогда по правилу дифференцирования сложной функции получим

$$\nabla p = \left(\frac{\partial P}{\partial r}, 0, 0 \right) + \frac{\partial P}{\partial \Psi} \nabla \Psi, \qquad (47)$$

где $\nabla = (\partial / \partial r, 0, \partial / \partial z)$. Подберём $P(r,\Psi)$ так, чтобы первое слагаемое в разложении (47) совпало с центробежной силой, а второе – с силой Ампера:

$(\partial P/\partial r, 0, 0) = \boldsymbol{F}_c = \boldsymbol{F}_{\text{in}}$, $\dfrac{\partial P}{\partial \Psi}\nabla\Psi = \dfrac{1}{c}[\boldsymbol{j}, \boldsymbol{H}]$. Оказывается, что таким образом можно получить общее решение уравнений ЭМГД-плазмостатики в случае θ-пинча.

Теорема 8. *Пусть* $h(\rho)$, $\rho(r,\Psi) > 0$ *– произвольные гладкие функции,* $j_\varphi^0(r,z)$ *– задана,* $P(r,\Psi)$ *– решение нелинейного уравнения в частных производных первого порядка*

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 4\pi^2 c^2 \lambda_+ \lambda_- \frac{r}{\rho(r,\Psi)}\left(\frac{\partial P}{\partial \Psi}\right)^2 \tag{48}$$

и для $P(r,\Psi)$, *удовлетворяющего уравнению* (48), *функция* $\Psi(r,z)$ *– решение нелинейного эллиптического уравнения*

$$\Delta^*\Psi = -16\pi^3 r^2 \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\Psi} - \frac{8\pi^2 r}{c} j_\varphi^0. \tag{49}$$

Тогда функции

$$H_r = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \Psi}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad j_\varphi = 2\pi r c \frac{\partial P}{\partial \Psi}, \quad \rho(r,z) = \rho(r,\Psi(r,z)),$$
$$p_\pm = [\lambda_\mp p \pm h(\rho)]/\lambda_\Sigma, \quad p(r,z) = P(r,\Psi(r,z))$$

дают решение уравнений ЭМГД-плазмостатики (45) *в случае* θ*-пинча, и любое решение этих уравнений, для которого* $\partial\Psi/\partial z \not\equiv 0$, *может быть получено указанным способом.* #

Для данной точки (r,z) рассмотрим магнитную поверхность $\Psi = \text{const}$, проходящую через эту точку и два вектора: вектор нормали $\nabla\Psi$ к магнитной поверхности и единичный радиальный вектор $\boldsymbol{e}_r$, имеющий в цилиндрических координатах вид $\boldsymbol{e}_r = (1,0,0)$. Разложим градиент давления ∇p по базису $\boldsymbol{e}_r$, $\nabla\Psi$: $\nabla p = \dfrac{\partial P}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \dfrac{\partial P}{\partial \Psi}\nabla\Psi$. Тогда баланс радиальной составляющей градиента давления и центробежной силы выражается уравнением (48), а баланс нормальной составляющей и силы Ампера – уравнением (49). Отметим два момента.

1) ЭМГД-равновесия θ-пинча (**Теорема 8**) принципиально отличаются от Грэд-Шафрановских (ГШ)-равновесий (**Теорема 7**), поскольку поверхности уровня $p = \text{const}$, $\Psi = \text{const}$, совпадающие в МГД-плазмостатике, для ЭМГД-равновесий совпасть не могут. В самом деле, на магнитной поверхности $\Psi = \text{const}$ давление $p(r,z) = P(r,\Psi(r,z)) = P(r,\text{const})$ зависит только от r, причём, согласно (48), $\partial P/\partial r\big|_{\Psi=\text{const}} > 0$ и, значит, давление на магнитной

поверхности с удалением от оси z строго монотонно возрастает и не может быть постоянным.

2) Уравнение (48), как правило, решается аналитически [5,24], и для найденных решений $P(r,\Psi)$ уравнение (49) решается численно, для чего необходимо дополнительно поставить краевое условие для функции Ψ. Например, часто полагают $\Psi\big|_{\Gamma} \equiv 0$ и решают задачу Дирихле для эллиптического уравнения (49). Возможность аналитического решения уравнения (48) открывает перспективу поиска ЭМГД-равновесий с заданными свойствами – изоэнтропических, изотермических и т.д. Например, при нахождении изоэнтропических равновесий постулируется функциональная связь $\rho = f(p)$ (скажем, $\rho = \mathrm{const} p^{1/\gamma}$, $\gamma > 1$), и тогда уравнение (48) решается аналитически [5,24] и возникают большие классы неГШ-равновесий. Как показывают расчёты [5,25], среди ЭМГД-равновесий могут быть сильно неизоэнтропические равновесия, несвязные равновесия, состоящие из нескольких кусков и пр., но могут быть и равновесия, “похожие” на ГШ-равновесия.

Список литературы

1. Alphen H. Cosmical Electrodynamics. Oxford. N.Y. 1950 (перевод: Альфвен Х. Космическая электродинамика. М.: ИЛ, 1952. 291 с.).
2. Кирко И.М., Кирко Г.Е. Магнитная гидродинамика. Современное видение проблем. М. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, Ижевский институт компьютерных исследований, 2009. 632 с.
3. Alphen H. Relation between cosmic and laboratory plasma physics // Cosmic Plasma Physics. K. Schindler. Ed. N.Y.: Plenum Publishing Corporation, 1972. P. 1–14.
4. Гавриков М.Б. Линейные волны в нерелятивистской магнитной гидродинамике // Препринт ИПМ им. М.В. Келдыша АН СССР. N 190. 1988. 28 с.
5. Гавриков М.Б. Двухжидкостная электромагнитная гидродинамика. М.: КРАСАНД. 2018. 584 с.
6. Филиппов Н.В. Обзор экспериментальных работ, выполненых в ИАЭ им. И.В. Курчатова по исследованию плазменного фокуса // Физика плазмы. Т. 9. Вып. 1. 1983. С. 25–44.
7. Франк-Каменецкий Д.А. Плазма – четвёртое состояние вещества. М.: Атомиздат, 1961. 163 с.
8. Кадомцев Б.Б. Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1988. 304 с.
9. Куликовский А.Г., Любимов Г.А. Магнитная гидродинамика. М.: Логос, 2005. 328 с.
10. Половин Р.В., Демуцкий В.П. Основы магнитной гидродинамики. М.: Энергоатомиздат, 1987. 208 с.

11. Shin-i-Pai. Magnetogasdynamics and plasma dynamics. Wien: Springer Verlad, 1962 (перевод: Бай-Ши-и. Магнитная газодинамика и динамика плазма. М.: Мир, 1964. 302 с.).
12. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
13. Морозов А.И. Введение в плазмодинамику. М.: Физматлит, 2006. 576 с.
14. Einstein A. // Ann. d. Phys. 1916. Vol. 49. P. 769 (Перевод: Эйнштейн А. Основы общей теории относительности // Альберт Эйнштейн и теория гравитации. М.: Мир, 1979. С. 146).
15. Соловьёв Л.С. К релятивистской гидродинамике // Препринт ИАЭ; N 3362/1. М., 1980 (В сб. Л.С. Соловьёв Собрание трудов в двух томах. Т. II. Нелинейное развитие плазменных неустойчивостей конвективного типа. – М.: Наука, 2001. – 414 с.).
16. Соловьёв Л.С. Собрание трудов в двух томах. Т. II. Нелинейное развитие плазменных неустойчивостей конвективного типа. – М.: Наука, 2001. – 414 с.
17. Hoffmann F., Teller E. Magnetohydrodynamic shocks. // Phys. Rev., 1950. T. 80. N 4. P. 692–703 (Перевод в сб. “Проблемы современной физики”, 1954. N 2).
18. Гавриков М.Б., Соловьёв Л.С. Линейные волны в двухжидкостной релятивистской газодинамике // ЖЭТФ, 1988. Т. 94. С. 106–118.
19. Андрианов А.М., Базилевская О.А., Прохоров Ю.Г. Исследование импульсных разрядов в газах при силе тока 500 кА // Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций. М.: Изд-во АН СССР, 1958. Т. 2. С. 185–211.
20. Брагинский С.И. Явления переноса в плазме // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Госатомиздат, 1963. Вып. 1. С. 183–272.
21. Дьяченко В.Ф., Имшенник В.С. Двумерная магнитогидродинамическая модель плазменного фокуса z-пинча // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича, Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974. С. 164-246.
22. Брушлинский К.В., Морозов А.И. Расчёт двумерных течений плазмы в каналах // Вопросы теории плазмы / Под ред. М.А. Леонтовича. М.: Атомиздат. 1974. Вып. 8. С. 88–163.
23. Арцимович Л.А. Управляемые термоядерные реакции. М.: Физматгиз, 1963. 496 с.
24. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. М.–Л.: ГИТТЛ, 1950. 473 с.
25. Гавриков М.Б., Савельев В.В. Задачи плазмостатики в двухжидкостной магнитной гидродинамике с учетом инерции электронов // Изв. РАН. МЖГ. 2010. N 2, С. 176–192.