ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 59 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.

Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В. Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 59. 32 с. doi:10.20948/prepr-2019-59
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-59

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.Ф. Голубев, А.В. Яскевич

Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов

Москва — 2019

УДК: 531.38

Голубев Ю.Ф., Яскевич А.В.

Уравнения динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов

В работе рассматриваются алгоритмы расчета уравнений динамики параллельных манипуляторов, которые являются основой кинематики для существующих и перспективных периферийных стыковочных механизмов. В математической модели конкретного механизма они дополняются алгоритмами расчета внутренних активных сил и моментов, создаваемых его устройствами демпфирования энергии и приводами.

Ключевые слова: уравнения динамики, параллельные манипуляторы, стыковочные механизмы

Yury Filippovich Golubev, Andrey Vladimirovich Yaskevich

Dynamic equations of peripheral docking mechanisms as parallel manipulators

This paper describes algorithms for computation of dynamics equations for parallel manipulators as the kinematics basis for existing and prospective peripheral docking mechanisms. They are combined in math model of specific mechanism with algorithms for computation of internal active forces and moments created by shock absorber devices and drives.

Key words: dynamic equations, parallel manipulators, docking mechanisms

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ: 19-01-00123)

Оглавление

Введение 3
1. Особенности кинематики периферийных стыковочных механизмов 4
2. Методы моделирования параллельных манипуляторов 7
3. Описание тел механической системы 9
4. Уравнения контурных связей 12
5. Уравнения динамики параллельных манипуляторов 21
6. Вычисление сил и моментов, действующих на основание механизмов 25
7. Последовательность и оптимизация вычислений 28
Выводы 30
Библиографический список 30

Введение

Стыковка космических аппаратов – это управляемый механический процесс их соединения на орбите. Один из аппаратов является активным, осуществляет сближение, другой является пассивным, обычно поддерживает ориентацию. Стыковка реализуется соответственно активным и пассивным стыковочными агрегатами и начинается с момента их первого контакта, через некоторое время после которого происходит сцепка – механические защелки активного агрегата заходят за упоры пассивного, образуется их первичная механическая связь. Далее выполняется поглощение энергии сближения активного объекта, выравнивание и стягивание агрегатов и стыкуемых космических аппаратов, образование их жесткого соединения. Стыковочные агрегаты имеют направляющие элементы для уменьшения рассогласований, на активном установлены три типа механизмов – стыковочный, сцепки (предварительного соединения) и герметизации стыка (окончательного жесткого соединения). Два последних являются плоскими, малоинерционными, и их собственная динамика не оказывает существенного влияния на процесс стыковки. Наиболее сложный пространственный стыковочный механизм активного агрегата обеспечивает условия для сцепки, поглощение энергии сближения, стягивание и выравнивание. Стыковочные агрегаты и механизмы в зависимости от компоновки направляющих элементов и кинематических цепей разделяются на два основных класса – центрального типа («штырь-конус») и периферийные. Кинематические цепи периферийного механизма распределены по периметру переходного тоннеля агрегата и связаны шарнирами с единственным буферным звеном – стыковочным кольцом, которое имеет направляющие элементы с установленными на них механизмами сцепки и контактирует с аналогичным кольцом ответного агрегата.

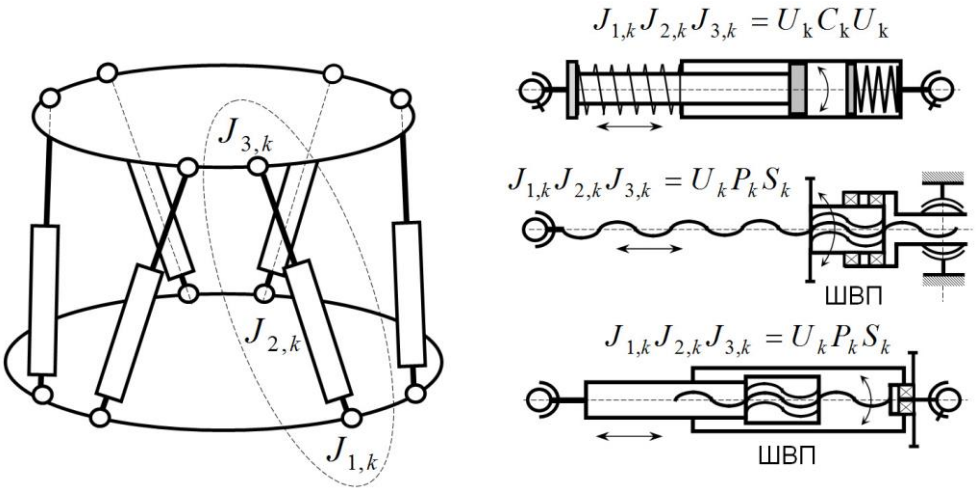
Геометрия периферийного стыковочного интерфейса – стыковочного кольца и элементов соединения агрегатов стандартизованы для обеспечения их совместимости. При этом на кинематику стыковочных механизмов этот стандарт не налагает никаких ограничений. К настоящему времени разработаны, практически применялись или готовы к применению несколько различных периферийных механизмов [1 – 6]. В перспективе возможно появление и других конструктивных вариантов. Несмотря на то что каждый из них имеет или может иметь уникальные особенности, их объединяет одно общее свойство – основой их кинематики являются параллельные манипуляторы [7].

Инерция звеньев стыковочных механизмов меньше инерции стыкуемых космических аппаратов, но их относительные перемещения в шарнирах порождают значительные силы и моменты устройств демпфирования или приводов, определяющие динамику стыковки. Для корректного учета этих перемещений движение механизма описывается дифференциальными уравнениями динамики, которые в математической модели процесса стыковки могут рассматриваться независимо от динамики активного космического аппарата, но должны обес-

печивать расчет сил и моментов, действующих со стороны механизма на космический аппарат. Полная математическая модель стыковки содержит уравнения движения стыкуемых космических аппаратов [8], модель контактного взаимодействия стыковочных агрегатов [9], уравнения динамики стыковочных механизмов, модели устройств демпфирования и приводов. В настоящей работе рассматриваются алгоритмы расчета динамики стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов.

1. Особенности кинематики периферийных стыковочных механизмов

В стыковочных механизмах периферийного типа сцепка обеспечивается при совмещении стыковочных колец двух агрегатов и зацеплении трех защелок с тремя ответными упорами пассивного стыковочного агрегата. Поэтому стыковочное кольцо механизма имеет шесть степеней свободы. Вместе с периферийными кинематическими цепями оно образует гексапод – 6-степенной параллельный манипулятор [10]. Основой кинематики большинства разработанных периферийных стыковочных механизмов является платформа Гью-Стьюарта (Gough-Stewart) [11, 12]. Конструктивная реализация каждой ее k-й периферийной кинематической цепи обычно называется штангой (рис. 1). В ней используются P_k – поступательный, C_k – цилиндрический, U_k – универсальный, или S_k – сферический шарниры.



а б

Рис. 1. а) Платформа Гью-Стьюарта, б) различные кинематические схемы штанг стыковочных механизмов (ШВП – шарико-винтовой преобразователь)

Главными достоинствами этой платформы для стыковочных механизмов являются достаточная симметрия рабочего пространства, позволяющая компенсировать промахи в любом направлении, и хорошая нагрузочная способность, обусловленная использованием поступательных или цилиндрических шарниров с высокоэффективными приводами и демпферами.

Фирма SpaceX в качестве основы своего периферийного стыковочного механизма SXDS использовала платформу Ханта (K.H. Hunt) [13] с периферийными кинематическими цепями типа $R_k S_k U_k$ (рис. 2), где R_k обозначает вращательный шарнир с одной степенью подвижности. При выполнении стягивания после поглощения энергии сближения активного космического аппарата центр первого шарнира в этом стыковочном механизме медленно, в квазистатическом режиме перемещается плоским механизмом с приводом (на рис. 2 не показан).

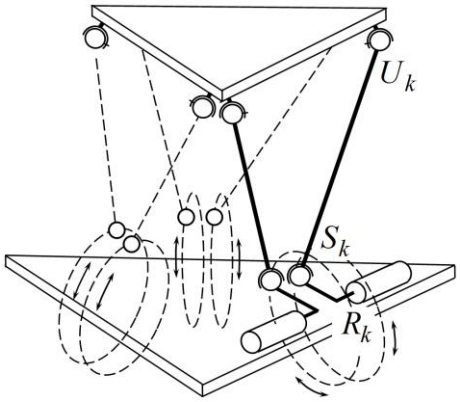


Рис. 2. Платформа Ханта

Стыковочный механизм движется под действием сил и моментов, создаваемых устройствами и приводами, связанными с шарнирами периферийных кинематических цепей, а также под действием сил и моментов контактного взаимодействия со стыковочным кольцом агрегата, который установлен на пассивном космическом аппарате. Относительное положение и скорости активного аппарата в момент первого контакта являются случайными величинами, зависящими от хода его сближения. Поэтому отличительной чертой стыковочных механизмов является отсутствие сингулярности, то есть полная управляемость в каждой точке их конфигурационных пространств. Данное свойство обеспечивается при их проектировании.

Вычислительно эффективное описание движения параллельных манипуляторов основано на преобразовании механической системы путем замещения отдельных шарниров уравнениями контурных связей и использовании рекуррентных кинематических соотношений. Число переменных относительного движения в шарнирах (шарнирных переменных) параллельных манипуляторов больше числа степеней их свободы, поэтому часть этих переменных выбирается в качестве независимых, остальные являются зависимыми. Выбор замещаемых шарниров и независимых переменных движения определяет вычислительную эффективность уравнений динамики.

В параллельных манипуляторах периферийные кинематические цепи соединяются с основанием и с управляемым телом вращательными шарнирами. Замещение шарниров на управляемом теле уменьшает связность механической

системы и число тел в кинематических цепях преобразованной механической системы. Соответственно уменьшается и объем вычислений при расчете уравнений динамики.

Выбор в качестве независимых реальных управляющих переменных, описывающих относительные перемещения вдоль линий действия внутренних активных сил или моментов периферийных кинематических цепей, приводит к необходимости итерационного решения прямой задачи кинематики параллельного манипулятора. С учетом того, что обратная задача кинематики имеет относительно простое аналитическое решение, в качестве независимых выбираются переменные, описывающие движение управляемого тела относительно основания. То есть предполагается, что в математической модели стыковочное кольцо – единственное тело независимой кинематической цепи, связанное с основанием механизма фиктивным 6-степенным шарниром, а все периферийные кинематические цепи и их шарнирные переменные являются зависимыми. Это не влияет на управляемость механизма, так как у него отсутствуют сингулярные конфигурации.

Замещение шарниров, связывающих периферийные направляющие кинематические цепи с управляемым телом, и выбор переменных движения этого тела в качестве независимых не только увеличивает вычислительную эффективность уравнений динамики, но также упрощает составление и решение уравнений контурных связей.

Вращательные шарниры, соединяющие каждую k-ю пространственную периферийную кинематическую цепь с управляемым телом параллельного манипулятора, имеют три или две степени подвижности. Соответственно налагается $m_k = 3$ или $m_k = 4$ ограничений на относительное движение. Периферийные кинематические цепи не изменяют числа степеней свободы управляемого тела, поэтому число степеней подвижности в их оставшихся шарнирах равно $n_k = m_k \in \{3,4\}$. Этому условию удовлетворяют только кинематические цепи типа $U_k P_k S_k$, $S_k P_k U_k$, $U_k C_k U_k$, $R_k S_k U_k$, $R_k U_k S_k$ и $U_k U_k U_k$. Последовательность шарниров указана от корня (основания механизма) к терминальному (управляемому) телу. Первые три соответствуют разновидностям платформы Гью-Стьюарта, четвертая и пятая – разновидностям платформы Ханта. В кинематической цепи $U_k U_k U_k$ все шарниры имеют две степени подвижности, и с ними трудно связать приводы или устройства демпфирования, реализовать управление. Поэтому далее такие кинематические цепи не рассматриваются. Для гексаподов с шестью степенями свободы характерно свойство: $6n_k = 6m_k >> 6$, что еще раз указывает на увеличение вычислительной эффективности уравнений динамики, если они будут составлены только относительно независимых ускорений.

Каждая периферийная направляющая кинематическая цепь связана с управляемым телом своими отдельными уравнениями контурных связей. Поэтому все ее зависимые шарнирные переменные, а также звенья, их геометри-

ческие и инерционные параметры могут иметь локальную (в пределах цепи) индексацию.

2. Методы моделирования динамики параллельных манипуляторов

Динамика движения управляемого тела с шестью степенями свободы относительно основания может быть описана классическими уравнениями Ньютона-Эйлера [14]. Поэтому вычислительная эффективность математической модели параллельного манипулятора определяется способом вычисления уравнений динамики зависимых кинематических цепей преобразованной механической системы и методом учета уравнений контурных связей.

Алгоритмы вычислительной механики для моделирования динамики систем тел отражены в обзорах [15, 16 и др.]. Наиболее вычислительно эффективными для механических систем без контуров являются алгоритм составного тела (Composite Rigid Body Algorithm) [17, 18], вычисляющий коэффициенты уравнений динамики в замкнутой форме, и алгоритм сочлененного тела (Articulated Body Algorithm) [19 – 21], обеспечивающий последовательное рекуррентное вычисление шарнирных ускорений. Рекуррентные уравнения динамики далее не рассматриваются по следующим причинам. Во-первых, их вычислительная эффективность при малом числе тел (не более четырех) хуже, чем эффективность алгоритма составного тела. Во-вторых, при учете контурных связей рекуррентные уравнения динамики не могут быть составлены относительно только независимых переменных. Они становятся дифференциально-алгебраическими [22]. В предлагаемой работе вычисление коэффициентов уравнений динамики периферийных кинематических цепей производится в соответствии с алгоритмом составного тела.

Если кинематические, то есть алгебраические, уравнения контурных связей учитываются в явном виде, то они объединяются с уравнениями динамики преобразованной механической системы в систему дифференциально-алгебраических уравнений (СДАУ) и обусловливают ее вырожденность, то есть усложнение схем численного интегрирования. Мера этой вырожденности характеризуется индексом СДАУ, значение которого указывает на сложность обеспечения стабильности и точности решения. В системах с индексом 3 или 2 в качестве неизвестных принимаются соответственно ускорения и координаты, либо ускорения и скорости, то есть фактически разнородные неизвестные переменные. Их решение основано на приведении к одному составу неизвестных посредством той или иной схемы дискретизации, лежащей в основе неявной схемы численного интегрирования, например, BDF-методов [23 - 26 и др.]. В СДАУ с индексом 1 неизвестными являются только обобщенные ускорения. В этом случае устойчивость решения обеспечивается более простым способом, например, использованием неявного метода интегрирования Эйлера, как, например, в [27], или введением в уравнения динамики стабилизирующих сил,

пропорциональных ошибкам и их производным в уравнениях связей [28 - 30]. Но искусственно введенные дополнительные члены усложняют вид уравнений связей, вносят в систему несуществующие частоты и требуют экспертной настройки параметров, обеспечивающих устойчивость решения. Размерность СДАУ даже при частичном замещении шарниров превышает число степеней свободы исходной механической системы.

При неявном учете уравнений контурных связей используется их решение, то есть выражение зависимых переменных через независимые. В результате вместо СДАУ движение параллельного манипулятора описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений минимальной размерности, увеличивается инерция, приведенная к степеням свободы, и соответственно устойчивость численного интегрирования. Одной из первых в этом направлении была работа [31], в которой решения уравнений связей для координат и скоростей позволили определить энергию механической системы только через независимые переменные, после чего были использованы уравнения Лагранжа 2-го рода. При этом уравнения контурных связей относительно ускорений, требующие дополнительных вычислений, не использовались. Более просто такой подход реализуется при использовании уравнений Кейна [32, 33]. Однако решение уравнений связей относительно скоростей для составления уравнения динамики совместимо только с уравнениями аналитической механики, но не с более вычислительно эффективным алгоритмом составного тела. Кроме того, уравнения контурных связей относительно шарнирных ускорений необходимы для расчета сил и моментов, действующих со стороны механизма на его основание.

Метод разделения обобщенных координат, предложенный в [34], позволяет редуцировать матрицу уравнения динамики вне зависимости от вида определяющих их математических выражений на основе решения уравнений связей для ускорений. Он наилучшим образом походит для моделирования стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов с числом тел, значительно превышающим число степеней свободы механической системы, с фиксированным составом независимых и зависимых переменных и отсутствием сингулярных конфигураций.

Многочисленные работы по динамике 6-степенных параллельных манипуляторов посвящены только платформе Гью-Стьюарта. В подавляющем большинстве они решают обратную задачу динамики для целей управления. Оригинальный подход к расчету коэффициентов уравнений для решения прямой задачи динамики этой платформы предложен в [35]. Он основан на алгоритме составного тела, но в отличие от [17, 18] в нем используется решение обратной задачи динамики не для простой кинематической цепи, а для всего параллельного механизма. При этом в качестве независимых выбраны шесть координат управляемого тела и их производные. В результате коэффициенты уравнений динамики манипулятора вычисляются сразу относительно только независимых ускорений. Несмотря на относительную простоту, этот подход далее не используется, так как он не позволяет вычислять реакции, действующие на основание

механизма, и описывает параллельные манипуляторы с направляющими кинематическими цепями со структурой только $U_k P_k S_k$ и $S_k P_k U_k$.

Исходя из вышеизложенного, при разработке алгоритма расчета уравнений динамики периферийных стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов в качестве независимых выбираются переменные движения стыковочного кольца – управляемого тела с шестью степенями свободы. Шарниры, соединяющие периферийные кинематические цепи с управляемым телом, замещаются уравнениями контурных связей. Движение каждой такой цепи описывается своим набором зависимых шарнирных переменных, а ее матрица инерции и вектор обобщенных сил вычисляются по алгоритму составного тела. В кинематических цепях преобразованной механической системы отсутствуют общие звенья, и ее уравнения динамики имеют блочно-диагональную структуру. Поэтому редукция уравнений динамики методом разделения переменных в уравнениях контурных связей относительно ускорений осуществляется отдельно для каждой периферийной кинематической цепи. В результате получаются уравнения динамики параллельного манипулятора, имеющие минимальную размерность. После расчета ускорений управляемого тела из решения уравнений связей определяются зависимые ускорения в шарнирах периферийных кинематических цепей, а на их основе – силы и моменты, действующие на основание механизма.

3. Описание тел механической системы

Для описания движения параллельного манипулятора используются система координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ с началом O_0 в центре его основания. С центром масс управляемого тела B_C (стыковочного кольца) связана система координат $\mathbf{x}_C\mathbf{y}_C\mathbf{z}_C$. Ее положение относительно $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ определяется вектором $\mathbf{r}_C = [x_C, y_C, z_C]^T$ и матрицей направляющих косинусов

$$\mathbf{a}_C = \begin{bmatrix} c_\theta c_\psi & s_\theta & -c_\theta s_\psi \\ -c_\varphi s_\theta c_\psi + s_\varphi s_\psi & c_\varphi c_\theta & c_\varphi c_\theta s_\psi + s_\varphi c_\psi \\ s_\varphi s_\theta c_\psi + c_\varphi s_\psi & -s_\varphi c_\theta & -s_\varphi s_\theta s_\psi + c_\varphi c_\psi \end{bmatrix},$$

соответствующей последовательности поворотов $\psi_{C,y}, \theta_{C,z}, \varphi_{C,x}$ относительно текущих осей y, z и x. Здесь и далее переменные c_a, s_a обозначают тригонометрические функции угла a, то есть $c_a = \cos a, s_a = \sin a$. Компоненты x_C, y_C, z_C и углы $\psi_{C,y}, \theta_{C,z}, \varphi_{C,x}$ являются независимыми координатами механической системы. Скорость центра масс управляемого тела относительно $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ определяется вектором $\mathbf{v}_C = \dot{\mathbf{r}}_C = [\dot{x}_C, \dot{y}_C, \dot{z}_C]^T$, а его угловая скорость – вектором $\boldsymbol{\omega}_C = [\omega_{C,x}, \omega_{C,y}, \omega_{C,z}]^T$ в системе координат $\mathbf{x}_C\mathbf{y}_C\mathbf{z}_C$, с которым производные $\dot{\psi}_{C,y}, \dot{\theta}_{C,z}, \dot{\varphi}_{C,x}$ связаны соотношением

$$\begin{bmatrix} \dot{\psi}_{C,y} \\ \dot{\theta}_{C,z} \\ \dot{\varphi}_{C,x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & c_\varphi / c_\theta & -s_\varphi / c_\theta \\ 0 & s_\varphi & c_\varphi \\ 1 & -c_\varphi s_\theta / c_\theta & s_\varphi s_\theta / c_\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{C,x} \\ \omega_{C,y} \\ \omega_{C,z} \end{bmatrix}.$$

Центры конечных шарниров периферийных кинематических цепей параллельного манипулятора на его основании и управляемом теле определяются соответственно относительно систем координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{x}_C\mathbf{y}_C\mathbf{z}_C$ постоянными векторами $\mathbf{l}_{0,k}$ и $\mathbf{l}_{C,k}$ (рис. 3). С центрами шарниров основания (входных шарниров направляющих цепей) связаны системы координат $\mathbf{x}_{0,k}^J\mathbf{y}_{0,k}^J\mathbf{z}_{0,k}^J$, ориентация которых относительно $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ задается постоянными матрицами направляющих косинусов $\boldsymbol{\gamma}_{0,k}$. С центрами замещаемых шарниров на управляемом теле связаны системы координат $\mathbf{x}_{C,k}^L\mathbf{y}_{C,k}^L\mathbf{z}_{C,k}^L$, ориентации которых относительно $\mathbf{x}_C\mathbf{y}_C\mathbf{z}_C$ определяется постоянными матрицами $\boldsymbol{\gamma}_{C,k}$. Управляемое тело имеет массу m_C и диагональный тензор инерции $\mathbf{I}_C = diag[I_{C,x}, I_{C,y}, I_{C,z}]$, компоненты которого выражены в системе координат $\mathbf{x}_C\mathbf{y}_C\mathbf{z}_C$.

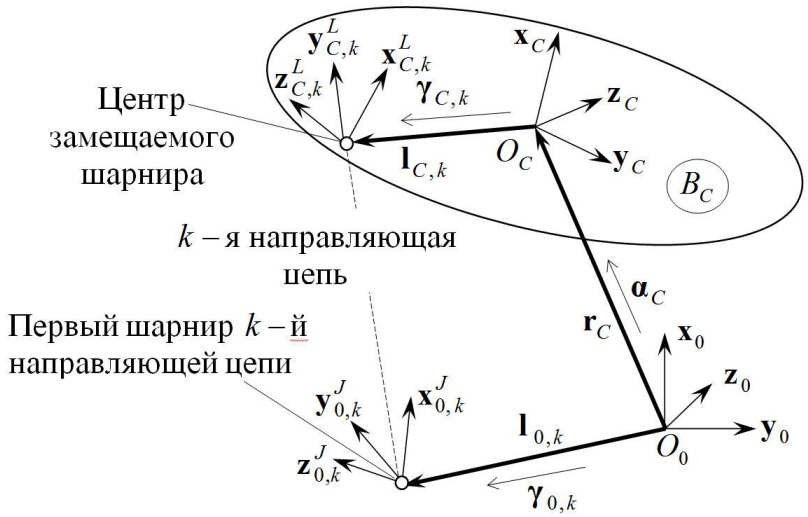


Рис. 3. Системы координат и центры конечных шарниров направляющих кинематических цепей параллельного манипулятора

Уравнения контурных связей составляются в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$. Для описания звеньев k-й периферийной ветви используется следующая система обозначений (рис. 4). Все ее тела и шарниры имеют локальную последовательную индексацию $j = \overline{1, n_k}$. В алгоритме составного тела используются шарниры с одной степенью подвижности, поэтому индекс каждого тела совпадает с индексом зависимой шарнирной переменной $p_{j,k}$, определяющей относительные поступательные или угловые перемещения в его входном шарнире. Все

шарнирные переменные k-й периферийной кинематической цепи образуют $(n_k \times 1)-$вектор $\mathbf{p}_k$.

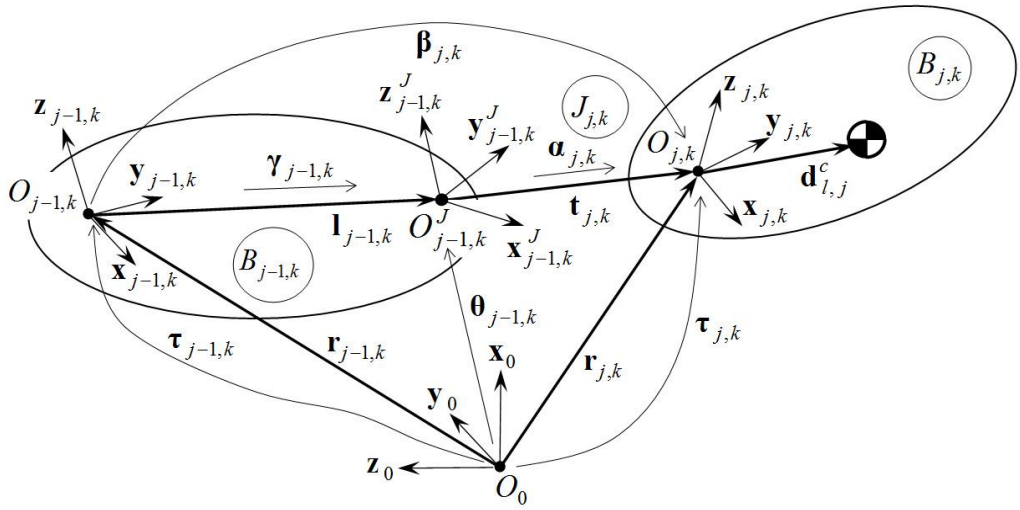


Рис. 4. Системы координат смежных тел k-й периферийной цепи

Каждое очередное тело $B_{j,k}$ связано с предшествующим телом $B_{j-1,k}$ шарниром $J_{j,k}$. В теле $B_{j,k}$ в точке $O_{j,k}$, связанной с шарниром $J_{j,k}$, фиксируется система координат $\mathbf{x}_{j,k}\mathbf{y}_{j,k}\mathbf{z}_{j,k}$. Ее перемещения относительно системы $\mathbf{x}^J_{j-1,k}\mathbf{y}^J_{j-1,k}\mathbf{z}^J_{j-1,k}$ тела $B_{j-1,k}$ задаются вектором $\mathbf{t}_{j,k}$ и матрицей преобразования $\boldsymbol{\alpha}_{j,k}$. При этом либо $\mathbf{t}_{j,k} = [\,p_{j,k}, 0, 0]^T$, $\boldsymbol{\alpha}_{j,k} = \mathbf{1}_3$, либо $\mathbf{t}_{j,k} = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\alpha}_{j,k} \in \{\boldsymbol{\alpha}^x_{j,k}(p_{j,k}), \boldsymbol{\alpha}^y_{j,k}(p_{j,k}), \boldsymbol{\alpha}^z_{j,k}(p_{j,k})\}$, где $\mathbf{1}_3 -$единичная $(3\times 3)-$матрица, а $\boldsymbol{\alpha}^x_{j,k}(p_k), \boldsymbol{\alpha}^y_{j,k}(p_k), \boldsymbol{\alpha}^z_{j,k}(p_k) -$матрицы поворота относительно осей $\mathbf{x}^J_{j-1,k}$, $\mathbf{y}^J_{j-1,k}$, $\mathbf{z}^J_{j-1,k}$ на угол p_k. В теле $B_{j-1,k}$ положение $\mathbf{x}^J_{j-1,k}\mathbf{y}^J_{j-1,k}\mathbf{z}^J_{j-1,k}$ относительно $\mathbf{x}_{j-1,k}\mathbf{y}_{j-1,k}\mathbf{z}_{j-1,k}$ определяется постоянным вектором $\mathbf{l}_{j-1,k}$ и постоянной матрицей направляющих косинусов $\boldsymbol{\gamma}_{j-1,k}$. Положение $\mathbf{x}_{j,k}\mathbf{y}_{j,k}\mathbf{z}_{j,k}$ относительно $\mathbf{x}^J_{j-1,k}\mathbf{y}^J_{j-1,k}\mathbf{z}^J_{j-1,k}$ определяется вектором $\mathbf{r}_{j-1,j,k}$ и матрицей направляющих косинусов $\boldsymbol{\beta}_{j,k}$

$$\mathbf{r}_{j-1,j,k} = \mathbf{l}_{j-1,k} + \boldsymbol{\gamma}^T_{j-1,k}\,\mathbf{t}_{j,k}, \quad \boldsymbol{\beta}_{j,k} = \boldsymbol{\alpha}_{j,k}\,\boldsymbol{\gamma}_{j-1,k}$$

при $\mathbf{r}_{0,1,k} = \mathbf{l}_{0,k}$, $\boldsymbol{\beta}_{1,k} = \boldsymbol{\alpha}_{1,k}\boldsymbol{\gamma}_{0,k}$. Ориентация систем координат $\mathbf{x}_{j,k}\mathbf{y}_{j,k}\mathbf{z}_{j,k}$, $\mathbf{x}^J_{j-1,k}\mathbf{y}^J_{j-1,k}\mathbf{z}^J_{j-1,k}$ и положение их начала $O_{j,k}$ относительно $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ задаются матрицами преобразования $\boldsymbol{\tau}_{j,k}$, $\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}$ и вектором $\mathbf{r}_{j,k}$ ($\boldsymbol{\tau}_{0,k} = \boldsymbol{\gamma}_{0,k}$, $\mathbf{r}_{0,k} = \mathbf{l}_{0,k}$). Тело $B_{j,k}$ имеет массу $m_{j,k}$ и тензор инерции $\mathbf{I}_{j,k}$, выраженный в $\mathbf{x}_{j,k}\mathbf{y}_{j,k}\mathbf{z}_{j,k}$.

Положение центра масс в этой системе задается вектором $\mathbf{d}_{j,k}^{c}$. Если тело фиктивное, полученное в результате представления шарниров U_k, S_k или C_k простейшими, с одной степенью подвижности, то $m_{j,k}=0$, $\mathbf{d}_{j,k}^{c}=\mathbf{0}$, $\mathbf{I}_{j,k}=\mathbf{0}$. На тело $B_{j,k}$ направляющей цепи могут действовать только внутренние активные сила $\mathbf{f}_{j,k}^{J(j-1)}$ или момент $\mathbf{m}_{j,k}^{J(j-1)}$в шарнире $J_{j,k}$, выраженные в проекциях на оси $\mathbf{x}_{j-1,k}^{J}\mathbf{y}_{j-1,k}^{J}\mathbf{z}_{j-1,k}^{J}$. В последнем звене $B_{n_k,k}$ направляющей кинематической цепи положение центра $O_{n_k,k}^{L}$ замещаемого вращательного шарнира и связанной с ним системы координат $\mathbf{x}_{n_k,k}^{L}\mathbf{y}_{n_k,k}^{L}\mathbf{z}_{n_k,k}^{L}$ относительно $\mathbf{x}_{n_k,k}\mathbf{y}_{n_k,k}\mathbf{z}_{n_k,k}$ определяется постоянными вектором $\mathbf{l}_{n_k,k}^{L}$ и матрицей направляющих косинусов $\boldsymbol{\gamma}_{n_k,k}^{L}$.

4. Уравнения контурных связей

Так как в каждом k-м контуре параллельного манипулятора вращательный шарнир замещается уравнениями связей, то три условия замыкания этого контура могут быть записаны как равенство координат, скоростей и ускорений центра замещаемого шарнира

$$\mathbf{r}_{C,k}^{L\,(0)}=\mathbf{r}_{n_k,k}^{L\,(0)},\quad \mathbf{v}_{C,k}^{L\,(0)}=\mathbf{v}_{n_k,k}^{L\,(0)},\quad \dot{\mathbf{v}}_{C,k}^{L\,(0)}=\dot{\mathbf{v}}_{n_k,k}^{L\,(0)}, \tag{4.1}$$

где все векторы определены в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$; $n_k=m_k\in(3,4\}$.

Если замещаемый вращательный шарнир имеет две степени подвижности ($m_k=4$), то существует четвертое ограничение, на угловое относительное движение. Предполагается, что первый поворот на угол ψ_y в таком шарнире осуществляется относительно оси y, а второй, на угол θ_z, – относительно оси z. В этом случае единичный вектор оси второго поворота $\mathbf{z}_{C,k}^{L,2}=\mathbf{z}_{C,k}^{L,1}$ перпендикулярен к единичному вектору оси первого поворота $\mathbf{y}_{4,k}^{L}=\mathbf{y}_{C,k}^{L,0}=\mathbf{y}_{C,k}^{L,1}$ (рис. 5). Единичные векторы $\mathbf{x}_{C,k}^{L,2}$, $\mathbf{y}_{C,k}^{L,2}$, $\mathbf{z}_{C,k}^{L,2}$ и $\mathbf{x}_{4,k}^{L}$, $\mathbf{y}_{4,k}^{L}$, $\mathbf{z}_{4,k}^{L}$, выраженные в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$, – это столбцы матриц $\boldsymbol{\theta}_{C,k}^{L\,T}=\boldsymbol{\alpha}_C^T\boldsymbol{\gamma}_{C,k}^T$ и $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^{L\,T}=\boldsymbol{\tau}_{4,k}^T\,\boldsymbol{\gamma}_{4,k}^{L}$. То есть единичный вектор $\mathbf{e}_{1,k}^{(0)}$ оси первого поворота – это второй вектор-столбец матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^{L\,T}$ ($\mathbf{e}_{1,k}^{(0)}=\mathbf{y}_{4,k}^{L}$), а единичный вектор $\mathbf{e}_{2,k}^{(0)}$ оси второго поворота – это третий вектор столбец матрицы $\boldsymbol{\theta}_{C,k}^{L\,T}$ ($\mathbf{e}_{2,k}^{(0)}=\mathbf{z}_{C,k}^{L,2}$). На рис. 5 перпендикулярные друг к другу единичные векторы $\mathbf{e}_{1,k}^{(0)}$ и $\mathbf{e}_{2,k}^{(0)}$ осей вращения отмечены более жирными линиями.

В соответствии с этим при $m_k=4$ условие замыкания k-го контура для угловых координат записывается в виде

$$\mathbf{e}_{1,k}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{2,k}^{(0)} = \mathbf{e}_{1,k}^{(0)T}\mathbf{e}_{2,k}^{(0)} = 0. \tag{4.2}$$

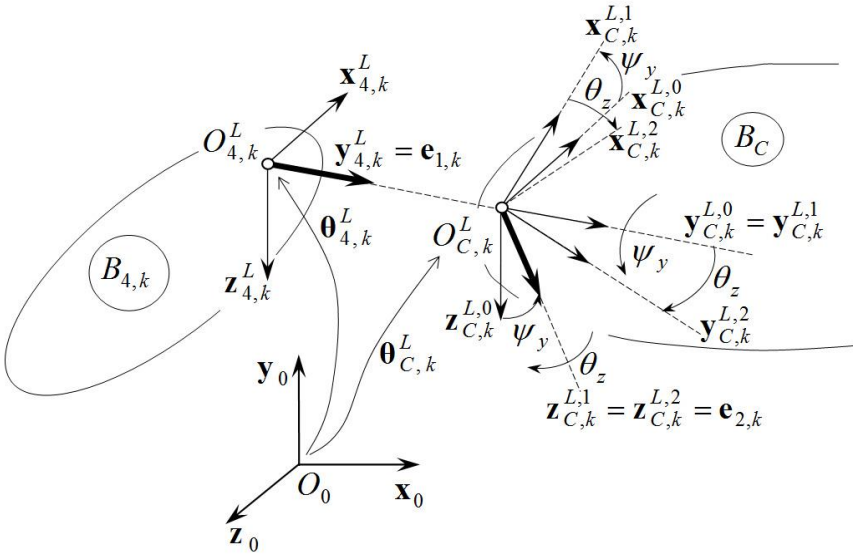


Рис. 5. Относительные повороты во вращательном шарнире с двумя степенями подвижности

Дифференцирование (4.2) позволяет получить соответствующие условия замыкания для угловых скоростей и ускорений

$$\dot{\mathbf{e}}_{1,k}^{(0)} \cdot \mathbf{e}_{2,k}^{(0)} + \mathbf{e}_{1,k}^{(0)} \cdot \dot{\mathbf{e}}_{2,k}^{(0)} = \mathbf{n}_{R,k}^{(0)} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{4,k}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{C}^{(0)}) = 0,$$

$$[\mathbf{n}_{R,k}^{(0)} \cdot (\boldsymbol{\omega}_{4,k}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{C}^{(0)})]_t^{'} = \mathbf{n}_{R,k}^{(0)\,T}(\dot{\boldsymbol{\omega}}_{4,k}^{(0)} - \dot{\boldsymbol{\omega}}_{C}^{(0)}) + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^{(0)T}(\boldsymbol{\omega}_{4,k}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_{C}^{(0)}) = 0,$$

где

$$\mathbf{n}_{R,k}^{(0)} = \mathbf{e}_{1,k}^{(0)} \times \mathbf{e}_{2,k}^{(0)} \tag{4.3}$$

— выраженный в проекциях на оси системы координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ единичный вектор момента реакции, производная по времени которого равна

$$\dot{\mathbf{n}}_{R,k}^{(0)} = (\boldsymbol{\omega}_{4,k}^{(0)} \times \mathbf{e}_{1,k}^{(0)}) \times \mathbf{e}_{2,k}^{(0)} + \mathbf{e}_{1,k}^{(0)} \times (\boldsymbol{\omega}_{C}^{(0)} \times \mathbf{e}_{2,k}^{(0)}).$$

Для преобразования условий замыкания k-го контура в уравнения контурных связей относительно скоростей и ускорений используются матрицы парциальных скоростей управляемого тела $\mathbf{T}_C = \partial \mathbf{v}_C / \partial \dot{\mathbf{r}}_C = \partial \dot{\mathbf{v}}_C / \partial \ddot{\mathbf{r}}_C = [\mathbf{1}_3, \mathbf{0}_3]$, $\mathbf{R}_C = \partial \boldsymbol{\omega}_C / \partial \boldsymbol{\omega}_C = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_C / \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_C = [\mathbf{0}_3, \mathbf{1}_3]$, $\mathbf{R}_C^{(0)} = [\mathbf{0}_3, \boldsymbol{\alpha}_C^T]$ и тел направляющей цепи $\mathbf{T}_{j,k}^{(0)} = \partial \mathbf{v}_{j,k}^{(0)} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k = \partial \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{(0)} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k$, $\mathbf{R}_{j,k}^{(0)} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{(0)} / \partial \dot{\mathbf{p}}_k = \partial \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{(0)} / \partial \ddot{\mathbf{p}}_k$, где $\mathbf{1}_3, \mathbf{0}_3$ – единичная и нулевая (3×3) – матрицы, $\dot{\mathbf{p}}_k, \ddot{\mathbf{p}}_k$ – векторы зависимых шарнирных скоростей и ускорений контура. Здесь и далее верхний индекс в круглых скоб-

ках указывает на номер системы координат, в которой выражен вектор или матрица, если их индексы не совпадают.

Необходимые для получения уравнений контурных связей векторы и матрицы, описывающие кинематику k-й периферийной кинематической цепи, вычисляются рекуррентно, на основе геометрических параметров тел и шарнирных координат $\mathbf{p}_k$ и скоростей $\dot{\mathbf{p}}_k$. При этом для каждого шарнира кроме вектора $\mathbf{t}_{j,k}$ и вычисляемой матрицы $\boldsymbol{\alpha}_{j,k}$ используются $(3\times n_k)-$матрицы парциальных относительных скоростей $\mathbf{T}_{j,k}^{rel}=\partial\mathbf{v}_{j,k}^{rel}/\partial\dot{\mathbf{p}}_k=\partial\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel}/\partial\ddot{\mathbf{p}}_k$ и $\mathbf{R}_{j,k}^{rel}=\partial\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel}/\partial\dot{\mathbf{p}}_k=\partial\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{rel}/\partial\ddot{\mathbf{p}}_k$, которые содержат только единичные и нулевые элементы (так как все шарниры имеют одну степень подвижности). Для уравнений связей относительно ускорений вычисляются вектор $\mathbf{w}_{j,k}^{(0)}$ поступательных ускорений характерных точек и вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}^{(0)}$ (при $m_k=4$) угловых ускорений тел, нелинейно зависящие только от координат $\mathbf{p}_k$ и скоростей $\dot{\mathbf{p}}_k$. Для управляемого тела аналогичные векторы являются нулевыми: $\mathbf{w}_{C,k}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_C=\mathbf{0}$.

Для k-й направляющей цепи рекуррентно, при $j=\overline{1,n_k}$, вычисляются следующие векторы и матрицы:

$$\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^{J}=\boldsymbol{\gamma}_{j-1,k}^{J}\boldsymbol{\tau}_{j-1,k},\quad \boldsymbol{\beta}_{j,k}=\boldsymbol{\alpha}_{j,k}\boldsymbol{\gamma}_{j-1,k}^{J},\quad \boldsymbol{\tau}_{j,k}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}\boldsymbol{\tau}_{j-1,k},$$
$$\mathbf{l}_{j-1,k}^{J\,(0)}=\boldsymbol{\tau}_{j-1,k}^{T}\mathbf{l}_{j-1,k}^{J},\quad \mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)}=\mathbf{l}_{j-1,k}^{J\,(0)}+\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^{J\,T}\mathbf{t}_{j,k},$$
$$\mathbf{r}_{j,k}^{(0)}=\mathbf{r}_{j-1,k}^{(0)}+\mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)},$$
$$\mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)}=\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^{J\,T}\mathbf{T}_{j,k}^{rel},\quad \mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)}=\boldsymbol{\theta}_{j-1,k}^{J\,T}\mathbf{R}_{j,k}^{rel},$$
$$\mathbf{R}_{j,k}^{(0)}=\mathbf{R}_{j-1,k}^{(0)}+\mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)},\quad \mathbf{T}_{j,k}^{J(0)}=\mathbf{T}_{j-1,k}^{J(0)}-\tilde{\mathbf{l}}_{j-1,k}^{J(0)}\mathbf{R}_{j-1,k}^{(0)}+\mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)},$$
$$\mathbf{v}_{j,k}^{rel(0)}=\mathbf{T}_{j,k}^{rel(0)}\dot{\mathbf{p}}_k,\quad \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)}=\mathbf{R}_{j,k}^{rel(0)}\dot{\mathbf{p}}_k,$$
$$\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{(0)}=\boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(0)}+\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)},$$
$$\mathbf{w}_{j,k}^{(0)}=\mathbf{w}_{j-1,k}^{(0)}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)}\mathbf{r}_{j-1,j,k}^{(0)}-2\tilde{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel(0)}\boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(0)},$$
$$\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}^{(0)}=\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1,k}^{(0)}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(0)}\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel(0)},\ \text{при } m_k=4$$

при начальных условиях $\mathbf{r}_{0,k}^{(0)}=\mathbf{0}$, $\mathbf{T}_{0,k}^{J(0)}=\mathbf{0}$, $\mathbf{R}_{0,k}^{(0)}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_{0,k}^{(0)}=\mathbf{0}$, $\mathbf{w}_{0,k}^{(0)}=\mathbf{0}$, $\boldsymbol{\varepsilon}_{0,k}^{(0)}=\mathbf{0}$. Здесь и далее $\tilde{\mathbf{a}}$ обозначает кососимметрическую матрицу, с помощью которой записывается векторное произведение: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\tilde{\mathbf{a}}\mathbf{b}$.

После этого аналогичные векторы и матрицы вычисляются для центров замещаемых шарниров в последних звеньях направляющих кинематических цепей

$$\mathbf{l}_{n_k,k}^{L(0)} = \boldsymbol{\tau}_{n_k,k}^T \mathbf{l}_{n_k,k}^L, \quad \mathbf{r}_{n_k,k}^{L(0)} = \mathbf{r}_{n_k,k}^{(0)} + \mathbf{l}_{n_k,k}^{L(0)},$$
$$\mathbf{T}_{n_k,k}^{L(0)} = \mathbf{T}_{n_k,k}^{(0)} - \tilde{\mathbf{l}}_{n_k,k}^{L(0)} \mathbf{R}_{n_k,k}^{(0)},$$
$$\mathbf{w}_{n_k,k}^{L(0)} = \mathbf{w}_{n_k,k}^{(0)} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n_k,k} \tilde{\boldsymbol{\omega}}_{n_k,k} \mathbf{l}_{n_k,k}^{L(0)},$$
$$\boldsymbol{\theta}_{n_k,k}^L = \boldsymbol{\gamma}_{n_k,k}^L \boldsymbol{\tau}_{n_k,k}, \quad \text{при } m_k = 4.$$

На основе приведенных выше соотношений уравнения контурных связей для k-й направляющей цепи относительно шарнирных скоростей и ускорений могут быть получены в виде

$$\mathbf{C}_k^{(i)} \mathbf{u}_C = \mathbf{C}_k^{(d)} \dot{\mathbf{p}}_k, \qquad \mathbf{C}_k^{(i)} \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{C}_k^{(d)} \ddot{\mathbf{p}}_k + \mathbf{c}_k = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{C}_k^{(i)} - (m_k \times m_k) -$ матрица, $\mathbf{u}_C = [\mathbf{v}_C^T, \boldsymbol{\omega}_C^T]^T$, $\mathbf{C}_k^{(d)} - (m_k \times 6) -$ матрица, $\mathbf{c}_k - (m_k \times 1) -$ вектор.

При $m_k = 3$

$$\mathbf{C}_k^{(i)} = \mathbf{T}_{C,k} = \mathbf{T}_C - \boldsymbol{\alpha}_C^T (\tilde{\mathbf{l}}_{C,k} \mathbf{R}_C^{(0)}), \quad \mathbf{C}_k^{(d)} = \mathbf{T}_{n_k,k}^{L(0)}, \quad \mathbf{c}_k = \mathbf{w}_{n_k,k}^{L(0)},$$

а при $m_k = 4$

$$\mathbf{C}_k^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{C,k} \\ \mathbf{n}_{R,k}^{(0)T} \mathbf{R}_C^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_k^{(d)} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{n_k,k}^{L(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^{(0)T} \mathbf{R}_{n_k,k}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{n_k,k}^{L(0)} \\ \mathbf{n}_{R,k}^{(0)T} \boldsymbol{\varepsilon}_{n_k,k}^{(0)} + \dot{\mathbf{n}}_{R,k}^{(0)T} (\boldsymbol{\omega}_{n_k,k}^{(0)} - \boldsymbol{\omega}_C^{(0)}) \end{bmatrix}.$$

Запись решений уравнений контурных связей относительно зависимых скоростей и ускорений имеет вид

$$\dot{\mathbf{p}}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{C}_k^{(i)} \mathbf{u} = \mathbf{H}_k \mathbf{u}, \tag{4.4}$$
$$\ddot{\mathbf{p}}_k = [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} (\mathbf{C}_k^{(i)} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{c}_k) = \mathbf{H}_k \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{h}_k. \tag{4.5}$$

Исходя из (4.1) и (4.2), уравнения связей относительно координат могут быть записаны в виде $\mathbf{f}_k = \mathbf{0}$, где $\mathbf{f}_k = \mathbf{r}_{3,k}^{L(0)} - \mathbf{r}_{C,k}^{L(0)}$ при $m_k = 3$ и $\mathbf{f}_k = [(\mathbf{r}_{4,k}^{L(0)} - \mathbf{r}_{C,k}^{L(0)})^T, (\mathbf{e}_{1,k}^{(0)T} \mathbf{e}_{2,k}^{(0)})^T]^T$ при $m_k = 4$, и решены итерационным методом Ньютона

$$\mathbf{p}_k^{(i+1)} = \mathbf{p}_k^{(i)} - [\partial \mathbf{f}_k / \partial \mathbf{p}_k]^{-1} \mathbf{f}_k^{(i)} = \mathbf{p}_k^{(i)} - [\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1} \mathbf{f}_k^{(i)}. \tag{4.6}$$

Отметим, что для всех конкретных практически используемых структур периферийных кинематических цепей параллельных манипуляторов могут быть найдены вычислительно более эффективные аналитические решения этих

уравнений. При этом для угловых шарнирных переменных по возможности определяются на сами величины, а их тригонометрические функции. Покажем это.

Периферийная кинематическая цепь со структурой $U_k P_k S_k$ после замещения последнего шарнира S_k имеет три степени подвижности (рис.6).

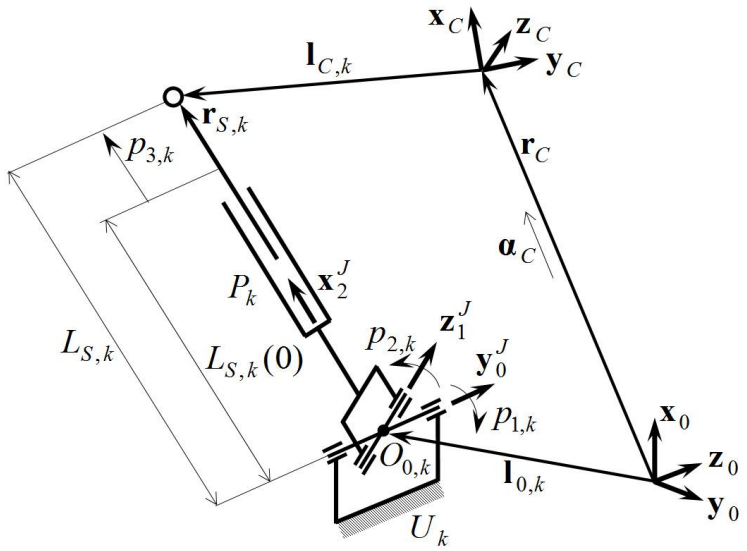


Рис. 6. Определение шарнирных координат в кинематической цепи $U_k P_k S_k$

Для определения ее шарнирных координат вычисляется вектор

$$\mathbf{r}_{S,k}^{(0)} = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\alpha}_C^T \mathbf{l}_{C,k} - \mathbf{l}_{0,k} = [l_k, m_k, n_k]^T$$

из центра первого в центр замещаемого шарнира, выраженный в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$. Его длина $L_{S,k} = \sqrt{l_k^2 + m_k^2 + n_k^2}$ определяет поступательный ход штока в шарнире P_k этой цепи

$$p_{k,3} = L_{S,k} - L_{S,k}(0), \tag{4.7}$$

где $L_{S,k}(0)$ – расстояние между центрами первого и замещаемого шарниров в некотором исходном положении механизма, при котором все $p_{k,3} = 0$.

После преобразования вектора $\mathbf{r}_{S,k}^{(0)}$ в систему координат $\mathbf{x}_{0,k}^J \mathbf{y}_{0,k}^J \mathbf{z}_{0,k}^J$, связанную с первой осью вращения первого шарнира, компоненты вектора $\mathbf{r}_{S,k}^{(k)} = \boldsymbol{\gamma}_{0,k} \mathbf{r}_{S,k}^{(0)} = [l_{S,k}^{(k)}, m_{S,k}^{(k)}, n_{S,k}^{(k)}]^T$ позволяют вычислить значения тригонометрических функций его угловых переменных в этом шарнире. С учетом того, что $\boldsymbol{\gamma}_{1,k} = \boldsymbol{\gamma}_{2,k} = \mathbf{1}_3$, имеем

$$\mathbf{r}_{S,k}^{(k)} = \boldsymbol{\alpha}_{1,k}^T \boldsymbol{\alpha}_{2,k}^T [L_{S,k}, 0\ 0]^T .$$

Так как в универсальном шарнире первый поворот выполняется относительно оси $\mathbf{y}_{1,k}$, а второй – относительно $\mathbf{z}_{2,k}$, то это равенство при обозначениях $c_{k,i} = \cos p_{k,i}$, $s_{k,i} = \sin p_{k,i}$ преобразуется к виду

$$\begin{bmatrix} c_{k,2}c_{k,1} & -s_{k,2}c_{k,1} & s_{k,1} \\ s_{k,2} & c_{k,2} & 0 \\ -c_{k,2}s_{k,1} & s_{k,2}s_{k,1} & c_{k,1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_{S,k} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{k,2}c_{k,1}L_{S,k} \\ s_{k,2}L_{S,k} \\ -c_{k,2}s_{k,1}L_{S,k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{S,k}^{(k)} \\ m_{S,k}^{(k)} \\ n_{S,k}^{(k)} \end{bmatrix},$$

который позволяет определить тригонометрические функции двух других зависимых шарнирных координат

$$ctg\ p_{k,1} = -l_{S,k}^{(k)} / n_{S,k}^{(k)}, \quad \sin p_{k,1} = sign(ctg\ p_{k,1}) / \sqrt{1 + ctg^2 p_{k,1}},$$

$$\cos p_{k,1} = \sqrt{1 - \sin^2 p_{k,1}}, \quad \sin p_{k,2} = m_{S,k}^{(k)} / L_{S,k}, \quad \cos p_{k,2} = \sqrt{1 - \sin^2 p_{k,2}}.$$

Если периферийная кинематическая цепь имеет структуру $S_k P_k U_k$ или $U_k C_k U_k$, то есть число уравнений связей в ее замещаемом шарнире равно $m_k = 4$, то четвертая зависимая шарнирная переменная – поступательный ход $p_{k,4}$ штока, вычисляемый по (4.7), и третья – угол поворота относительно продольной оси x звена в шарнирах S_k или C_k, определяются следующим образом. Условие замыкания (4.2) записывается для единичных векторов $\mathbf{e}_{1,k}, \mathbf{e}_{2,k}$ осей вращения, заданных не в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ основания, а в локальной системе $\mathbf{x}_{4,k}^L\mathbf{y}_{4,k}^L\mathbf{z}_{4,k}^L$ замещаемого шарнира в последнем звене. При этом вместо матрицы $\boldsymbol{\theta}_{4,k}^L$ используется матрица преобразования поворота

$$\boldsymbol{\alpha}_{3,k} = \begin{bmatrix} c_{3,k} & s_{3,k} & 0 \\ -s_{3,k} & c_{3,k} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

на угол $p_{3,k}$ последнего звена относительно своей продольной оси в первом шарнире S_k (для цепи $S_k P_k C_k$) или во втором шарнире C_k (для цепи $U_k C_k U_k$). Вместо матрицы $\boldsymbol{\theta}_{C,k}^L$ используется матрица преобразования $\boldsymbol{\psi}_{4,k} = \boldsymbol{\gamma}_{C,k}\boldsymbol{\alpha}_C\boldsymbol{\theta}_{4,k}^T$ из системы координат $\mathbf{x}_{4,k}^L\mathbf{y}_{4,k}^L\mathbf{z}_{4k}^L$ в систему $\mathbf{x}_{C,k}^L\mathbf{y}_{C,k}^L\mathbf{z}_{C,k}^L$ (рис. 3 и 5). Тогда $\mathbf{e}_{1,k} = \boldsymbol{\alpha}_{3,k}(2) = [-s_{3,k}\ \ c_{3,k}\ \ 0]$, а $\mathbf{e}_{2,k} = \boldsymbol{\psi}_{4,k}(3)$, и условие замыкания (4.2) записывается в виде

$$-s_{3,k}\boldsymbol{\psi}_{4,k}(3,1) + c_{3,k}\boldsymbol{\psi}_{4,k}(3,2) = 0.$$

Величина $tg\, p_{4,k} = \boldsymbol{\psi}_{4,k}(3,2)/\boldsymbol{\psi}_{4,k}(3,1)$ позволяет определить тригонометрические функции угла $p_{4,k}$

$$\cos p_{4,k} = 1/\sqrt{1+tg\, p_{4,k}}\,, \quad \sin p_{4,k} = sign(tg\, p_{4,k})\sqrt{1-(\cos p_{4,k})^2}\,, \qquad (4.7)$$

В параллельном манипуляторе с периферийными кинематическими цепями вида $R_k U_k S_k$ оси вращения $\mathbf{n}_k^F = [n_{k,x}^F, n_{k,y}^F, n_{k,z}^F]^T = \mathbf{y}_{0,k}$ всех первых шарниров лежат в одной плоскости, параллельной основанию. Для упрощения записи направление $\mathbf{n}_k^F = \mathbf{y}_{0,k}$ для каждой кинематической цепи выбирается так, чтобы углы поворота первых звеньев, начиная от осей $\mathbf{x}_{0,k}$, изменялись в диапазоне $(0, +180^0)$ (рис. 7).

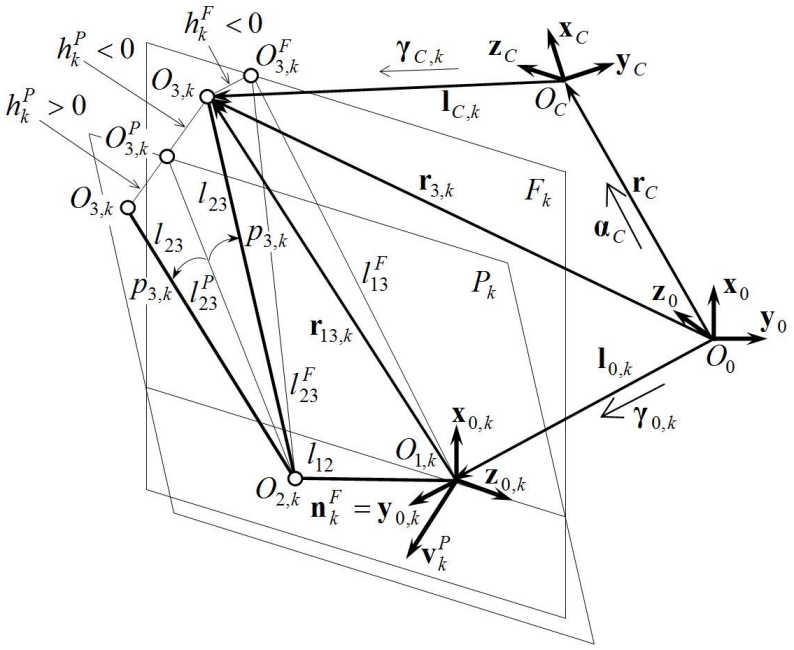


Рис. 7. Проекции шарниров и звеньев кинематической цепи $R_k U_k S_k$ на плоскость F_k первого шарнира и плоскость P_k, определяемую в исходном положении платформы

Центры трех шарниров обозначаются как $O_{1,k}$, $O_{2,k}$ и $O_{3,k}$, а длины первого и второго звеньев – как l_{12} и l_{23}. Векторы $\mathbf{n}_k^F = [n_{k,x}^F, n_{k,y}^F, n_{k,z}^F]^T$ определяют плоскости F_k с параметрами $n_{k,x}^F$, $n_{k,y}^F$, $n_{k,z}^F$ и $D_k^F = -\mathbf{n}_k^{FT}\mathbf{l}_{0,k}$, проходящие через центры $O_{1,k}$ первых шарниров перпендикулярно к основанию.

Точки $O_{1,k}$, $O_{2,k}$ всегда принадлежат плоскости F_k. В отличие от них точка $O_{3,k}$ может выходить из плоскости F_k даже в исходном положении механизма,

при нулевых перемещениях управляемого тела. С учетом этого дополнительно используется плоскость P_k с постоянными параметрами, вычисляемыми по координатам точек $O_{1,k}$, $O_{2,k}$ и $O_{3,k}$ [36]

$$A_k^P = (y_{2,k} - y_{1,k})(z_{3,k} - z_{1,k}) - (y_{3,k} - y_{1,k})(z_{2,k} - z_{1,k}),$$
$$B_k^P = (x_{3,k} - x_{1,k})(z_{2.k} - z_{1,k}) - (x_{2,k} - x_{1,k})(z_{3,k} - z_{1,k}),$$
$$C_k^P = (x_{2,k} - x_{1,k})(y_{3,k} - y_{1,k}) - (x_{3,k} - x_{1,k})(y_{2,k} - y_{1,k}),$$
$$D_k^P = -x_{1,k} A_k^P - y_{1k} B_k^P - z_{1,k} C_k^P .$$

Знаки этих параметров, зависящие от координат и направления нумерации точек, соответствуют требованию, чтобы направляющие векторы $\mathbf{v}_k^P = [A_k^P, B_k^P, C_k^P]^T$ плоскостей удовлетворяли условию $\mathbf{v}_k^{PT}\mathbf{n}_k^F > 0$ (рис. 7).

Положения центров $O_{3,k}$ замещаемых шарниров на управляемом теле относительно систем координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{x}_{0,k}\mathbf{y}_{0,k}\mathbf{z}_{0,k}$ определяются векторами

$$\mathbf{r}_{3,k} = \mathbf{r}_C + \boldsymbol{\alpha}_C^T \mathbf{l}_{C,k}, \quad \mathbf{r}_{13,k} = (\mathbf{r}_{3,k} - \mathbf{l}_{0,k}),$$

которые вместе с соотношениями аналитической геометрии [36] позволяют выразить положения в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ точек $O_{3,k}^F$ и $O_{3,k}^P$ – проекций $O_{3,k}$ – соответственно на плоскости F_k и P_k при произвольном допустимом положении манипулятора

$$\mathbf{r}_{3,k}^F = \mathbf{r}_{3,k} + h_k^F \mathbf{n}_k^F, \quad \mathbf{r}_{3,k}^P = \mathbf{r}_{3,k} + h_k^P \mathbf{v}_k^P,$$

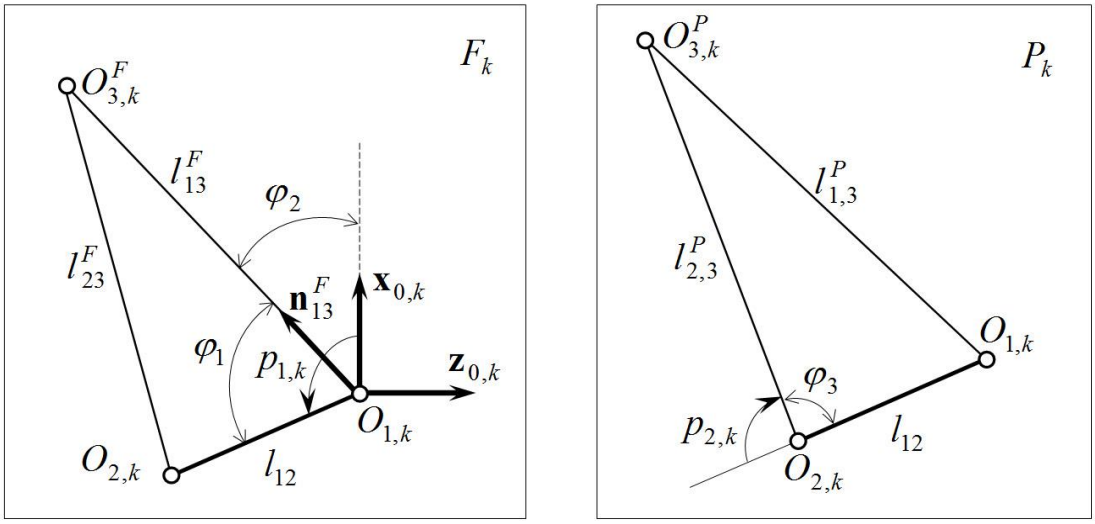
где

$$h_k^F = -\mathbf{n}_k^{FT}\mathbf{r}_{3,k} - D_k^F = -\mathbf{n}_k^{FT}\mathbf{r}_{13,k}, \quad h_k^P = -\mathbf{v}_k^{PT}\mathbf{r}_{3,k} - D_k^P = -\mathbf{v}_k^{PT}\mathbf{r}_{13,k}.$$

Знаки параметров h_k^F и h_k^P зависят от положения точки $O_{3,k}$ относительно плоскостей F_k и P_k (рис. 7). В соответствии с этим тригонометрические функции угла $p_{k,3}$ между вторым звеном и плоскостью P_k равны

$$\sin p_{3,k} = h_k^P / l_{23}, \quad \cos p_{3,k} = \sqrt{1 - (\sin p_{k,3})^2}.$$

Для определения углов поворота $p_{1,k}$ и $p_{2,k}$ используются проекции звеньев кинематической цепи на плоскости F_k и P_k (рис. 8).



а б

Рис. 8. а) Определение угла поворота в первом шарнире, б) определение первого угла поворота во втором шарнире кинематической цепи

Точки $O_{1,k}$ и $O^F_{3.k}$, $O_{1,k}$ и $O^P_{3.k}$ соединяют векторы

$$\mathbf{r}^F_{13,k} = \mathbf{r}^F_{3,k} - \mathbf{l}_{0,k}, \quad \mathbf{r}^P_{13,k} = \mathbf{r}^P_{3,k} - \mathbf{l}_{0,k}.$$

Квадраты их длин равны $(l^F_{13})^2 = \mathbf{r}^{F\,T}_{13,k}\mathbf{r}^F_{13,k}$, $(l^P_{13})^2 = \mathbf{r}^{P\,T}_{13,k}\mathbf{r}^P_{13,k}$, а для определения длины первого вычисляется квадратный корень $l^F_{13} = \sqrt{(l^F_{13})^2}$. Квадрат длины проекции второго звена на плоскость F_k равен $(l^F_{23})^2 = l^2_{23} - (h^F_k)^2$ (рис. 7).

По известным длинам сторон треугольника $O_{1,k}O_{2,k}O^F_{3,k}$, лежащего в плоскости F_k, вычисляются тригонометрические функции положительного угла φ_1 между его сторонами $O_{1,k}O_{2,k}$ и $O_{1,k}O^F_{3,k}$

$$\cos\varphi_1 = (l^2_{12} + (l^F_{13})^2 - (l^F_{23})^2)/2l_{12}l^F_{13}, \quad \sin\varphi_1 = \sqrt{1-(\cos\varphi_1)^2}\,.$$

Проекция единичного вектора $\mathbf{n}^F_{13,k} = \mathbf{r}^F_{13,k}/l^F_{13}$ на вектор $\mathbf{x}_{0,k}$, то есть компонента $n^F_{13,x}$ позволяет вычислить тригонометрические функции положительного угла φ_2 (рис. 8а)

$$\cos\varphi_2 = n^H_{13,x}, \quad \sin\varphi_2 = \sqrt{1-(\cos\varphi_2)^2}\,.$$

С учетом этого тригонометрические функции угла поворота в первом шарнире равны

$$\cos p_{1,k} = \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2, \quad \sin p_{1,k} = \sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\sin\varphi_2.$$

Положение точки $O_{2,k}$ в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ определяется вектором

$$\mathbf{r}_{2,k} = l_{12}\begin{bmatrix} c_{1,k} & 0 & s_{1,k} \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_{1,k} & 0 & c_{1,k} \end{bmatrix}\mathbf{z}_{0,k},$$

где $\mathbf{z}_{0,k}$ – третий столбец матрицы $\gamma_{0,k}^T$, $c_{1,k} = \cos p_{1,k}$, $s_{1,k} = \sin p_{1.k}$.

Этот вектор позволяет вычислить длину проекции второго звена на плоскость P_k

$$(l_{23}^P)^2 = (\mathbf{r}_{3,k}^P - \mathbf{r}_{2,k})^T(\mathbf{r}_{3,k}^P - \mathbf{r}_{2,k}), \quad l_{23}^P = \sqrt{(l_{23}^P)^2}.$$

С учетом того, что угол φ_3 острый и $0 < p_{2,k} = (180^0 - \varphi_3) < 180^0$, тригонометрические функции шарнирной переменной $p_{2,k}$ вычисляются по координатам треугольника $O_{1,k}O_{2,k}O_{3,k}^P$, лежащего в плоскости P_k, (рис. 8б)

$$\cos p_{2,k} = -(l_{12}^2 + (l_{23}^P)^2 - (l_{13}^P)^2)/2l_{12}l_{23}^P, \quad \sin p_{2,k} = +\sqrt{1-(\cos p_{k,2})^2}.$$

Для кинематической цепи вида $R_kS_kU_k$ угол $p_{4,k}$ вращения второго звена относительно своей продольной оси может быть вычислен аналогично (4.7).

Полученные соотношения для кинематических цепей вида $R_kU_kS_k$ и $R_kS_kU_k$ не зависят от ориентации осей $\mathbf{n}_{1,k} = \mathbf{y}_{0,k}$ вращения первых шарниров в плоскости, параллельной основанию манипулятора.

Таким образом, для рассмотренных структур периферийных кинематических цепей параллельных манипуляторов при аналитическом решении уравнений контурных связей относительно шарнирных координат вычисляется столько же квадратных корней, сколько вычисляется синусов и косинусов только на одной итерации при решении таких же уравнений в общем виде (4.6).

5. Уравнения динамики параллельных манипуляторов

Динамика управляемого тела относительно основания манипулятора описывается уравнениями

$$\mathbf{M}_C\dot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{s}_C,$$

где $\mathbf{M}_C = diag[m_C\mathbf{1}_3, \mathbf{I}_C]$ – (6×6) – матрица инерции; $\mathbf{u}_C = [\mathbf{v}_C^T, \boldsymbol{\omega}_C^T]^T$ – (6×1) – вектор скоростей и квазискоростей; $\mathbf{s}_C = [\mathbf{f}_C^{ET}, (\mathbf{m}_C^E - \tilde{\boldsymbol{\omega}}_C(\mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}_C))^T]^T$ – (6×1) – вектор внешних контактных и инерционных сил и моментов в декартовой системе координат.

Уравнения динамики преобразованной механической системы параллельного манипулятора без учета уравнений контурных связей могут быть представлены в виде

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}_C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^{(d)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_C \\ \ddot{\mathbf{p}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_C \\ \mathbf{b}^{(d)} \end{bmatrix}, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{A}^{(d)} = diag[\,\mathbf{A}_k^{(d)}\,]$ – блочная $(6n_k \times 6n_k)$ – матрица и $\mathbf{b}^{(d)} = [\mathbf{b}_k^{(d)\,T}]^T$ – блочный $(6n_k \times 1)$ – вектор обобщенных сил; $\mathbf{A}_k^{(d)}$, $\mathbf{b}_k^{(d)}$ — матрица обобщенной инерции и вектор обобщенных сил k-й периферийной кинематической цепи; $\ddot{\mathbf{p}} = [\ddot{\mathbf{p}}_1^T, ..., \ddot{\mathbf{p}}_6^T]^T$ – вектор зависимых шарнирных ускорений.

Матрицы $\mathbf{A}_k^{(d)}$ и векторы $\mathbf{b}_k^{(d)}$ вычисляются по алгоритму составного тела. При расчете элементов j-го ($j = \overline{1, n_k}$) столбца матрицы $\mathbf{A}_k^{(d)}$ предполагается, что $\ddot{\mathbf{p}}_k(j) = 1$ и $\ddot{\mathbf{p}}_k(i) = 0$ при $i \neq j$ и $\dot{\mathbf{p}}_k = \mathbf{0}$. С учетом этого определяются абсолютные ускорения $\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l$, векторы инерционных силы $\mathbf{f}_{j,k}^{I,l}$ и момента $\mathbf{m}_{j,k}^{I,l}$ тела $B_{j,k}$

$$\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l = \hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}, \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l = \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel},$$
$$\mathbf{f}_{j,k}^{I,l} = m_{j,k}\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l + \tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{j,k}^l \mathbf{c}_{j,k}^c, \quad \mathbf{m}_{j,k}^{I,l} = \mathbf{I}_{j,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^l + \tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^c \dot{\mathbf{v}}_{j,k}^l,$$

где $\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} = \partial \mathbf{v}_{j,k}^{rel} / \partial\, \dot{\mathbf{p}}_k(j)$ и $\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} = \partial \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel} / \partial\, \dot{\mathbf{p}}_k(j)$ – (3×1) – матрицы парциальных скоростей; для поступательного ($r_{j,k}^J = 0$) шарнира $\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}(i) \in \{0,1\}$, $\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} = \mathbf{0}$, для вращательного ($r_{j,k}^J = 1$) – $\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel} = \mathbf{0}$, $\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel}(i) \in \{0,1\}$; $\mathbf{c}_{j,k}^c = m_{j,k}\mathbf{d}_{j,k}^c$ – постоянный вектор.

Далее по прямым рекуррентным соотношениям ($i = \overline{j+1, n_k}$) вычисляются обусловленные предполагаемым движением тела $B_{j,k}$ векторы поступательных $\dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l$ и угловых $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l$ ускорений, силы $\mathbf{f}_{i,k}^{I,l}$ и моменты $\mathbf{m}_{i,k}^{I,l}$ инерции всех последующих тел периферийной кинематической цепи.

$$\dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l = \boldsymbol{\beta}_{i,k}(\dot{\mathbf{v}}_{i-1,k}^l + \tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{i-1,k}^l \mathbf{r}_{i-1,i,k}), \quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l = \boldsymbol{\beta}_{i,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i-1,k}^l,$$
$$\mathbf{f}_{i,k}^{I,l} = m_{i,k}\dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l + \tilde{\dot{\boldsymbol{\omega}}}_{i,k}^l \mathbf{c}_{i,k}^c \quad \mathbf{m}_{i,k}^{I,l} = \mathbf{I}_{i,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{i,k}^l + \tilde{\mathbf{c}}_{i,k}^c \dot{\mathbf{v}}_{i,k}^l.$$

После этого по обратным рекуррентным соотношениям ($i = \overline{n_k, j}$) вычисляются элементы j-го столбца матрицы $\mathbf{A}_k^{(d)}$ как проекции на ось i-го шарнира

инерционных сил и моментов i-го и всех последующих тел кинематической цепи

$$\mathbf{A}_k^{(d)}(i,\ j)=\begin{cases}\hat{\mathbf{T}}_{i,k}^{rel\,T}\mathbf{f}_{i,k}^{I,\,l}, & r_{i,k}^{J}=0\\ \mathbf{R}_{i,k}^{rel\,T}\mathbf{m}_{i,k}^{I,\,l}, & r_{i,k}^{J}=1\end{cases},$$

а также инерционные силы и моменты, приведенные к предшествующему телу периферийной кинематической цепи (при $i>j$)

$$\mathbf{f}_{i,k}^{I,l\,(j-1)}=\boldsymbol{\beta}_{i,k}^{T}\mathbf{f}_{i,k}^{I,l},$$

$$\mathbf{f}_{i-1,k}^{I,l}=\mathbf{f}_{i-1,k}^{I,l}+\mathbf{f}_{i,k}^{I,l\,(j-1)},\quad \mathbf{m}_{i-1,k}^{I,l}=\mathbf{m}_{i-1,k}^{I,\,l}+\boldsymbol{\beta}_{i,k}^{T}\mathbf{m}_{i,k}^{I,l}+\tilde{\mathbf{r}}_{i-1,i,k}\mathbf{f}_{i,k}^{I,l\,(i-1)}.$$

Элементы вектора $\mathbf{b}_k^{(d)}$ обобщенных инерционных сил k-й периферийной кинематической цепи вычисляются в предположении, что ускорения во всех шарнирах равны нулю, а скорости и координаты принимают свои фактические значения. Сначала по прямым рекуррентным соотношениям ($j=\overline{1,n_k}$) вычисляются скорости, нелинейно зависящие от них составляющие поступательных $\mathbf{w}_{j,k}$ и угловых $\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}$ ускорений тел и обусловленные ими инерционные силы и моменты $\mathbf{f}_{j,k}^{I,n}$ и $\mathbf{m}_{j,k}^{I,n}$

$$\mathbf{v}_{j,k}^{rel}=\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}\dot{\mathbf{p}}\,(i),\ \boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel}=\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel}\dot{\mathbf{p}}(j),$$

$$\boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(j)}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}\boldsymbol{\omega}_{j-1,k},\ \boldsymbol{\omega}_{j,k}=\boldsymbol{\omega}_{j-1,k}^{(j)}+\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel},$$

$$\mathbf{w}_{j,k}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}(\mathbf{w}_{j-1,k}+(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j-1,k}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k})\mathbf{r}_{j-1,j,k})+2\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(j)}\mathbf{v}_{j,k}^{rel},$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}\boldsymbol{\varepsilon}_{j-1,k}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{(j)}\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel},$$

$$\mathbf{f}_{j,k}^{I,n}=-m_{j,k}\mathbf{w}_{j,k}-(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{j,k}+\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k})\mathbf{c}_{j,k}^{c},\quad \mathbf{f}_{j,k}^{n,0}=\mathbf{f}_{j,k}^{I,n},$$

$$\mathbf{m}_{j,k}^{I,n}=-\mathbf{I}_{j,k}\boldsymbol{\varepsilon}_{j,k}-\tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{c}\mathbf{w}_{j,k}-\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}(\mathbf{I}_{j,k}\boldsymbol{\omega}_{j,k}),\quad \mathbf{m}_{j,k}^{n,0}=\mathbf{m}_{j,k}^{I,n}.$$

Векторы $\mathbf{f}_{j,k}^{n,0}$ и $\mathbf{m}_{j,k}^{n,0}$ используются далее при расчете сил и моментов, действующих на основание стыковочного механизма.

После этого по обратным рекуррентным соотношениям ($j=\overline{n_k,1}$) вычисляются элементы вектора $\mathbf{b}_k^{(d)}$ с добавлением внутренних активных силы $f_{j,k}^{J}$ или момента $m_{j,k}^{J}$, действующих вдоль оси шарнира

$$\mathbf{b}_k^{(d)}(j)=\begin{cases}\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel\,T}\mathbf{f}_{j,k}^{I\,n}+f_{j,k}^{J}, & r_{j,k}^{J}=0\\ \hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel\,T}\mathbf{m}_{j,k}^{I,n}+m_{k,j}^{J}, & r_{j,k}^{J}=1\end{cases},$$

а также инерционные силы и моменты, приведенные к предшествующему телу периферийной кинематической цепи (при $j>1$)

$$\mathbf{f}_{j,k}^{I,n(j-1)}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}^{T}\mathbf{f}_{j,k}^{I,n},$$

$$\mathbf{f}_{j-1,k}^{I,n}=\mathbf{f}_{j-1,k}^{I,n}+\mathbf{f}_{j,k}^{I,n(j-1)},\quad \mathbf{m}_{j-1,k}^{I,n}=\mathbf{m}_{j-1,k}^{I,n}+\boldsymbol{\beta}_{j,k}^{T}\mathbf{m}_{j,k}^{I,n}+\tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k}\mathbf{f}_{j,k}^{I,n(j-1)}.$$

После расчета матриц $\mathbf{A}_k^{(d)}$ и векторов $\mathbf{b}_k^{(d)}$ для всех периферийных кинематических цепей выполняется редукция уравнений (5.1). Так как эти цепи не имеют общих тел и шарнирных переменных, то метод разделения переменных в уравнениях контурных связей относительно ускорений применяется к каждой из них отдельно.

Вектор ускорений управляемого тела и k-й периферийной кинематической цепи с учетом (4.5) выражается только через независимые переменные

$$\ddot{\mathbf{p}}=\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_C\\ \ddot{\mathbf{p}}_k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{1}_6\\ \mathbf{H}_k\end{bmatrix}\mathbf{u}_C+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{h}_k\end{bmatrix}=\mathbf{C}_{H,k}\mathbf{u}_C+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{h}_k\end{bmatrix}$$

и подставляется в уравнения динамики (5.1) преобразованной механической системы с множителями Лагранжа

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_C & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_k^{(d)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_C\\ \ddot{\mathbf{p}}_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_k^{(i)T}\\ \mathbf{C}_k^{(d)T}\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_C\\ \mathbf{b}_k^{(d)}\end{bmatrix}.$$

Новая система $6+n_k$ уравнений

$$\begin{bmatrix}\mathbf{M}_C\\ \mathbf{A}_k\mathbf{H}_k\end{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_C+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{A}_k\mathbf{h}_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_k^{(i)T}\\ \mathbf{C}_k^{(d)T}\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_C\\ \mathbf{b}_k^{(d)}\end{bmatrix}\tag{5.2}$$

проецируется на единичные векторы независимых возможных перемещений механической системы, то есть умножается на матрицу $\mathbf{C}_{H,k}^{T}=[\mathbf{1}_{n_j}\quad \mathbf{H}_k^{T}]$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{1}_{n_j} & \mathbf{H}_k^{T}\end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix}\mathbf{M}_C\\ \mathbf{A}_k\mathbf{H}_k\end{bmatrix}\dot{\mathbf{u}}_C+\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{A}_k\mathbf{h}_k\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\mathbf{C}_k^{(i)T}\\ \mathbf{C}_k^{(d)T}\end{bmatrix}\boldsymbol{\lambda}_k=\begin{bmatrix}\mathbf{s}_C\\ \mathbf{b}_k^{(d)}\end{bmatrix}\right\}.$$

В полученном результате

$$(\mathbf{M}_C+\mathbf{H}_k^{T}\mathbf{A}_k\mathbf{H}_k)\dot{\mathbf{u}}_C+\mathbf{H}_k^{T}\mathbf{A}_k\mathbf{h}_k+(\mathbf{C}_k^{(i)T}+\mathbf{H}_k^{T}\mathbf{C}_k^{(d)T})\boldsymbol{\lambda}_k=\mathbf{s}_C+\mathbf{H}_k^{T}\mathbf{b}_k^{(d)}$$

вследствие того, что

$$\mathbf{C}_k^{(i)T}+\mathbf{H}_k^{T}\mathbf{C}_k^{(d)T}=\mathbf{C}_k^{(i)T}-[\mathbf{C}_k^{(d)-1}\mathbf{C}_k^{(i)}]^{T}\mathbf{C}_k^{(d)T}=\mathbf{C}_k^{(i)T}-[\mathbf{C}_k^{(d)}\mathbf{C}_k^{(d)-1}\mathbf{C}_k^{(i)}]^{T}=\mathbf{0}$$

исключается вектор неопределенных множителей Лагранжа

$$(\mathbf{M}_C + \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k)\dot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{s}_C + \mathbf{H}_k^T (\mathbf{b}_k^{(d)} - \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k).$$

Окончательно редуцированная система уравнений динамики параллельного манипулятора с шестью степенями свободы записывается в виде

$$\mathbf{A}_C^* \dot{\mathbf{u}}_C = \mathbf{b}_C^*, \tag{5.3}$$

где

$$\mathbf{A}_C^* = \mathbf{M}_C + \sum_{k=1}^{6} \mathbf{H}_k^T \mathbf{A}_k \mathbf{H}_k, \;\; \mathbf{b}_C^* = \mathbf{s}_C + \sum_{k=1}^{6} \mathbf{H}_k^T (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \mathbf{h}_k), \tag{5.4}$$

$\mathbf{A}_C^* - (6\times 6) -$ обобщенная матрица инерции, $\mathbf{b}_C^* - (6\times 1) -$ вектор обобщенных сил.

6. Вычисление сил и моментов, действующих на основание механизмов

После разрешения системы уравнений (5.3) относительно вектора $\dot{\mathbf{u}}_C$ ускорений управляемого тела независимой ветви из второй строки системы (5.2) может быть вычислен вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}_k$

$$\mathbf{C}_k^{(d)T} \boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k (\mathbf{H}_k \dot{\mathbf{u}}_C + \mathbf{h}_k) = \mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{p}}_k.$$

Матрицы $\mathbf{C}_k^{(d)}$ и $[\mathbf{C}_k^{(d)}]^{-1}$ уже получены ранее при вычислении матрицы $\mathbf{H}_k$ в (4.4) и (4.5). С учетом того, что $[\mathbf{C}_k^{(d)T}]^{-1} = [\mathbf{C}_k^{(d)-1}]^T = \mathbf{L}_k$, можно записать

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \mathbf{L}_k (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \ddot{\mathbf{p}}_k). \tag{6.1}$$

Для данного конкретного вида связей $(m_k \times 1) -$ вектор $\boldsymbol{\lambda}_k$ можно интерпретировать как вектор обобщенных реакций, действующих на управляемое тело со стороны $k-$й периферийной кинематической цепи.

При $m_k = 3$ вектор $-\boldsymbol{\lambda}_k$ можно интерпретировать как три компоненты выраженной в декартовой системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$ силы, действующей в центре замещаемого шарнира на k-ю периферийную кинематическую цепь вдоль продольной оси ее последнего звена. При моделировании этот факт подтверждается проецированием $-\boldsymbol{\tau}_{3,k}\boldsymbol{\lambda}_k$. Как видно из (6.1), эта сила определяется суммой инерционных и внутренних активных сил и моментов k-й кинематической цепи в соответствии с ее структурой связей (видом и последовательностью шарниров). То есть она может быть вычислена рекуррентно при известных зависимых шарнирных ускорениях $\ddot{\mathbf{p}}_k$.

Рекуррентный алгоритм расчета сил и моментов, действующих в центре первого шарнира k-й периферийной кинематической цепи, основан на следующих соотношениях.

Условия равновесия сил и моментов, действующих на тело $B_{k,j}$, имеют вид

$$\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{R}+\mathbf{f}_{j,k}^{J}+\mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}=\mathbf{0},\quad \mathbf{m}_{j,k}^{I}+\mathbf{m}_{j,k}^{R}+\mathbf{m}_{j,k}^{J}+\mathbf{m}_{j,k}^{S(j)}=\mathbf{0},$$

где $\mathbf{f}_{j,k}^{I}, \mathbf{m}_{j,k}^{I}$ – сила инерции и момент сил инерции, действующие на тело; $\mathbf{f}_{j,k}^{R}, \mathbf{m}_{j,k}^{R}$ – сила и момент реакции в j-м шарнире k-й кинематической цепи; $\mathbf{f}_{j,k}^{J}, \mathbf{m}_{j,k}^{J}$ – внутренние активные сила и момент, создаваемые в этом шарнире устройствами демпфирования или приводами; $\mathbf{f}_{j,k}^{S}, \mathbf{m}_{j,k}^{S}$ – суммарные сила и момент, действующие со стороны всех последующих тел и выраженные в системе координат тела $B_{k,j}$.

Относительное движение в шарнире $J_{k,j}$ осуществляется вдоль i-й оси ($i\in\overline{1,3}$) с единичным вектором $\mathbf{e}_{j,k}^{i}$. Для поступательного шарнира ($r_{j,k}^{J}=0$) $\mathbf{e}_{j,k}^{i}=\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}=\partial\mathbf{v}_{j,k}^{rel}/\partial p_{j,k}$. Проекция на этот вектор условий равновесия сил, действующих на тело $B_{j,k}$, исключает силу реакции

$$\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel\,T}(\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S(j)})+f_{j,k}^{J}=\mathbf{0},$$

то есть на тело вдоль $\mathbf{e}_{j,k}^{i}$ со стороны шарнира действует внутренняя активная сила f_{j}^{J}, преодолевающая силу его инерции и силу от последующих тел. Проекции этого же условия равновесия на оси $\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus1}$ и $\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus2}\,\mathbf{e}_{j,k\oplus2}$ ($\oplus$ означает циклическую подстановку следующих за номером i значений из множества $\overline{1,3}$) определяют соответствующие компоненты реакции

$$\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus1\,T}\mathbf{f}_{j,k}^{R}=-\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus1\,T}(\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S(j)}),\quad \mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus2\,T}\mathbf{f}_{j,k}^{R}=-\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus2\,T}(\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S}).$$

Суммарный вектор силы, действующей через шарнир на предшествующее тело и выраженный в системе координат $\mathbf{x}_{j,k}\mathbf{y}_{j,k}\mathbf{z}_{j,k}=\mathbf{e}_{j,k}^{1}\mathbf{e}_{j,k}^{2}\mathbf{e}_{j,k}^{3}$ очередного тела, равен

$$\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{J(j)}=-\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}f_{j,k}^{J}+\mathbf{N}_{j,k}^{R}(\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S}),$$

где

$$\mathbf{N}_{j,k}^{R}=(\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus1}\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus1T}+\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus2}\mathbf{e}_{j,k}^{i\oplus2\,T})$$

– постоянная диагональная $(3\times 3)-$матрица, у которой $i-$й диагональный элемент равен нулю, а остальные равны 1.

Так как $\mathbf{m}_{j,k}^{J}=\mathbf{0}$, то момент реакции, действующий на тело $B_{j,k}$, равен $\mathbf{m}_{j,k}^{R}=-(\mathbf{m}_{j,k}^{I}+\mathbf{m}_{j,k}^{S})$. На предшествующее тело через шарнир действует момент, выраженный в системе координат очередного тела $\Delta\mathbf{m}_{j-1,k}^{J\,(j)}=\mathbf{m}_{j}^{I}+\mathbf{m}_{j}^{S}$.

Аналогично во вращательном шарнире ($r_{j,k}^{J}=1$) $\mathbf{e}_{j,k}^{i}=\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel}=\partial\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel}/\partial p_{j,k}$, и на предшествующее тело через шарнир действуют сила и момент

$$\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{J\,(j)}=\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S},\quad \Delta\mathbf{m}_{j-1,k}^{J\,(j)}=-\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel}m_{j}^{J}+\mathbf{N}_{j,k}^{R}(\mathbf{m}_{j,k}^{I}+\mathbf{m}_{j,k}^{S}).$$

Сила $\mathbf{f}_{j-1,k}^{S}$ и момент $\mathbf{m}_{j-1,k}^{S}$, выраженные в системе координат предшествующего тела $B_{j-1,k}$, равны

$$\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{S}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}^{T}\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{J\,(j)},\quad \mathbf{m}_{j-1,k}^{S}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}^{T}\Delta\mathbf{m}_{j-1,k}^{S\,(j)}+\tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k}\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{S}.$$

Вычисление сил и моментов, действующих на основание механической системы в центре первого шарнира k-й периферийной кинематической цепи, реализуется в ходе прямого и обратного рекуррентного процессов. В первом, прямом, по известным шарнирным ускорениям вычисляются суммарные векторы инерционных и активных сил и моментов, действующих на каждое тело. При этом используются векторы $\mathbf{f}_{j,k}^{n,0}$ и $\mathbf{m}_{j,k}^{n,0}$, определенные при вычислении вектора $\mathbf{b}_k$ обобщенных сил. Для $j=\overline{1,n_k}$

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel}=\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}\ddot{p}_{j,j},\quad \dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{rel}=\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel}\ddot{p}_{j,k},\\
\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{l}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}(\dot{\mathbf{v}}_{j-1,k}^{l}-\tilde{\mathbf{r}}_{j-1,j,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{l})+\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{rel},\\
\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{l}=\boldsymbol{\beta}_{j,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j-1,k}^{l}+\boldsymbol{\omega}_{j,k}^{rel},\\
\mathbf{f}_{j,k}^{I}=-m_{j,k}\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{l}-\tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{cT}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{l}-\mathbf{f}_{j,k}^{n,0},\\
\mathbf{m}_{j,k}^{E}=-\tilde{\mathbf{c}}_{j,k}^{c}\dot{\mathbf{v}}_{j,k}^{l}-\mathbf{I}_{j,k}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}^{l}-\mathbf{m}_{j,k}^{n,0}.
\end{gathered}\tag{6.2}$$

Во втором, обратном рекуррентном процессе вычисляются силы и моменты, действующие на все предшествующие тела и в итоге на основание механизма. Для $j=\overline{n_k,1}$ при $\mathbf{f}_{n_k,k}^{S}=\mathbf{0}$, $\mathbf{m}_{n_k,k}^{S}=\mathbf{0}$

$$\Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{J(j)}=\begin{cases}-\hat{\mathbf{T}}_{j,k}^{rel}f_{j,k}^{J}+\mathbf{N}_{j,k}^{R}(\mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S}), & r_{j,k}^{J}=0\\ \mathbf{f}_{j,k}^{I}+\mathbf{f}_{j,k}^{S}, & r_{j,k}^{J}=1\end{cases},$$

$$\Delta\mathbf{m}_{j-1,k}^{J\,(j)} = \begin{cases} \mathbf{m}_{j,k}^{I} + \mathbf{m}_{j,k}^{S}, & r_{j,k}^{J} = 0 \\ -\hat{\mathbf{R}}_{j,k}^{rel} m_{j,k}^{J} + \mathbf{N}_{j,k}^{R}\,(\mathbf{m}_{j,k}^{I} + \mathbf{m}_{j,k}^{S}), & r_{j,k}^{J} = 1 \end{cases},$$

$$\mathbf{f}_{j-1,k}^{S} = \boldsymbol{\beta}_{j.k}^{T} \Delta\mathbf{f}_{j-1,k}^{J\,(j)}, \tag{6.3}$$

$$\mathbf{m}_{j-1,k}^{S} = \boldsymbol{\beta}_{j,k}^{T} \Delta\mathbf{m}_{j-1,k}^{J\,(j)} + \tilde{\mathbf{r}}_{j-1,\,j,k} \mathbf{f}_{j-1,k}^{S}.$$

Суммарные сила и момент, действующие на основание параллельного манипулятора (периферийного стыковочного механизма) и выраженные в системе координат $\mathbf{x}_0\mathbf{y}_0\mathbf{z}_0$, равны

$$\mathbf{f}_0^S = \sum_{k=1}^{6} \mathbf{f}_{0,k}^S, \quad \mathbf{m}_0^S = \sum_{k=1}^{6} \mathbf{m}_{0,k}^S.$$

Они определяют движение активного космического аппарата наряду с силами и моментами его системы управления.

7. Последовательность и оптимизация вычислений

При моделировании динамики стыковки в пределах одного шага интегрирования последовательно вычисляются:

- относительные положения и скорости колец стыковочных агрегатов и силы их контактного взаимодействия (по известным положениям и скоростям космических аппаратов и стыковочного механизма);
- относительные перемещения в шарнирах периферийных кинематических цепей – решением уравнений контурных связей для координат;
- коэффициенты уравнений связей для скоростей и скорости изменения шарнирных переменных;
- коэффициенты уравнений связей относительно ускорений, нелинейно зависящие от шарнирных координат и скоростей;
- внутренние активные силы и моменты, создаваемые устройствами демпфирования или приводами, связанными с шарнирами периферийных кинематических цепей (по известным шарнирным координатам и скоростям);
- обобщенные матрицы инерции и векторы обобщенных сил стыковочного кольца (с учетом внешних контактных сил) и кинематических цепей (с учетом внутренних активных сил и моментов);
- обобщенная матрица инерции и вектор обобщенных сил редуцированных уравнений динамики и независимые ускорения стыковочного кольца;
- зависимые шарнирные ускорения в периферийных кинематических цепях – решением уравнений связей для ускорений, силы и моменты, действующие на основание стыковочного механизма;
- ускорения пассивного космического аппарата под действием его системы ориентации и сил контактного взаимодействия, ускорения активного аппа-

рата под действием сил и моментов его системы управления, а также сил и моментов, действующих в основании стыковочного механизма.

Приведенные в работе алгоритмы расчета уравнений динамики стыковочных механизмов как параллельных манипуляторов основаны на рекуррентных соотношениях, в которых отсутствуют повторяющиеся векторно-матричные операции, но многие векторы и матрицы содержат нулевые и единичные элементы, а некоторые состоят только из них. Дальнейшая оптимизация вычислений основана на представлении каждой матричной операции набором эквивалентных скалярных математических выражений, в которых операндами являются индексируемые элементы матриц-операндов и в которых исключены избыточные скалярные операции сложения с нулями, умножения на нуль или единицу, сложения и умножения констант. Каждое такое не равное нулю или константе скалярное выражение обозначается соответствующим индексируемым элементом матрицы-результата, который является операндом в последующих скалярных выражениях. Для векторно-матричных операций, в которые один и тот же вектор входит дважды, например, $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}\mathbf{r}_{j-1,j,k}$ и $\tilde{\boldsymbol{\omega}}_{j,k}(\mathbf{I}_{j,k}\boldsymbol{\omega}_{j,k})$, могут быть использованы оптимизирующие формулы, исключающие избыточные вычисления. Значительный выигрыш в быстродействии обеспечивается при отказе от использования индексируемых переменных. Для этого идентификаторы, обозначающие элементы матриц и входящие в скалярные математические выражения, не должны содержать индексы не только элементов матриц, но и самих матриц. Из полного набора скалярных математических выражений, эквивалентных векторно-матричным соотношениям, исключаются не влияющие на окончательный результат вычислений вследствие того, что в последующих вычислениях обозначающие их переменные умножаются на ноль. Для этого с помощью обратных ссылок от результирующих выражений к исходным отмечаются те, которые используются в вычислениях, а остальные отбрасываются. Последовательность оставшихся выражений является скалярной записью алгоритма вычислений.

Перечисленные способы оптимизации скалярных вычислений могут быть реализованы при использовании универсальной или специализированной системы символьных преобразований [37,38]. Для того чтобы в такой системе можно было запрограммировать все рекуррентные алгоритмы, она должна иметь базу данных для описания структуры, свойств тел и шарниров механической системы, матриц и их элементов, процедуры, реализующие матричные операции, а также средства для верификации полученного исходного программного кода.

В параллельных манипуляторах используется только пять различных типов структур периферийных кинематических цепей, в каждой из которых число тел (с учетом фиктивных) не превышает четырех. Поэтому все упомянутые выше приемы оптимизации скалярных вычислений могут быть реализованы и без использования системы символьных преобразований при сопоставимых или меньших временных затратах.

Выводы

Представленные алгоритмы расчета уравнений динамики параллельных манипуляторов в замкнутой форме могут служить основой для разработки математических моделей существующих и перспективных периферийных стыковочных механизмов. Эти алгоритмы не содержат избыточных векторно-матричных операций, а при их записи в виде последовательности скалярных математических выражений возможна дальнейшая оптимизация вычислений. Для каждого конкретного механизма их следует дополнить алгоритмами расчета внутренних активных сил и моментов, создаваемых его устройствами демпфирования и приводами.

Библиографический список

1. Сыромятников В.С. Стыковочные устройства космических аппаратов. - М.: Машиностроение. 1984. – 216 с.
2. *Mission docking. Behind the scenes*. // Go taikonauts, Issue 3, January 2012, P. 6 – 20. URL: www.go-taikonauts.com. Дата обращения 10.06.2019.
3. *Paijmans B., De Vriend K., Dittmer H., Urmston P., Gracia O.* The International Berthing Docking Mechanism compatible with the new European docking system // Proc. of the 63rd International Astronautical Congress IAC-2012. October 1-5, Naples, Italy, IAC-12,B3,7,9,x15451. URL: https://iafastro.directory/iac/archive/browse/IAC-12/B3/7/15451/. Дата обращения 10.06.2019.
4. Ghofranian S., Chuang L-P., Motaghedi P. The Boeing Company, Spacecraft Docking System // Patent US20150266595 A1, September 24, 2015.
5. *McFatter J., Keizer K., Rupp T.* NASA Docking System Block 1: NASA's new direct electric docking system supporting ISS and future human space exploration. //Proc. of the 44th Aerospace mechanism symposium, NASA Glenn Research Center, May 16-18, 2018. pp. 471-484. URL: https://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/20150014481.pdf. Дата обращения 10.06.2019.
6. *Liu Zhi, Zhang Chongfeng, Jin ZongGxiang, Shi Junwei, Xie Zhe, Hu Xufping*. Spacecraft docking system and method. // Patent WO2018014676 (A1) – 2018-01-25.
7. ParalleMIC – the Parallel Mechanisms Information Center. URL: http://www.parallemic.org. Дата обращения 10.06.2019.
8. Яскевич А.В. Комбинированные уравнения движения для описания динамики стыковки космических аппаратов с помощью системы «штырь-конус». //Изв. РАН. Космические исследования, 2007, том 45, №4, с. 325-336.
9. Yaskevich A. Math Simulation of Contact Interaction during Spacecraft Docking and Robotic Assembly Operations. // ECCOMAS Thematic Conference - COMPDYN 2013: 4th International Conference on Computational Methods in Structural Dynamics and Earthquake Engineering, Proceedings - An IACM Special Interest Conference 2013, pp. 4304-4320.

10. Pritschow G., Wurst K.-H. Systematic design of hexapods and other parallel link systems. Annals of the CIRP, Vol. 46, No. 1, pp. 291-295, 1997. URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0007850607608282. Дата обращения 10.06.2019.
11. Gough V.E., Whitehall S.G. Universal tyre test machine. // Proceedings of the FISITA Ninth International Technical Congress, May 1962. – 1962. – P. 117-137.
12. Stewart D. A platform with six degrees of freedom // Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers. – 1965. – Vol. 180, Part 1, No. 15. – P. 371 – 386.
13. Hunt K.H. Structural kinematics of in-parallel-actuated robot-arms. // Journal of Mechanisms, Transmission and Automation in design. – 1983. Vol. 105. – P. 705-712.
14. Голубев Ю.Ф. Основы теоретической механики: Учебник. 3-е изд., переработанное и дополненное. — М.: Издательство Московского университета, 2019. 728~с. ISBN 978-5-19-011288-7
15. Featherstone R., Orin D. Robot Dynamics: Equations and Algorithms // Proc. of the 2000 IEEE International Conference on Robotics & Automation, San Francisco, CA, April 2000, P. 826-834.
16. Погорелов Д.Ю. Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел // Изв. РАН, Теория и системы управления. – 2008. – № 4. – С. 5-15.
17. Степаненко Ю.А. Алгоритм анализа динамики пространственных механизмов с разомкнутой кинематической цепью. – «Механика машин», М.: Наука, 1974, вып. 44, стр. 77-88.
18. Walker M.W., Orin D.E. Efficient Dynamic Computer Simulation of Robotic Mechanisms. // Trans. ASME, Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. – 1982. – Vol. 104. – P. 205—211.
19. Верещагин А.Ф. Метод моделирования на ЦВМ динамики сложных механизмов роботов-манипуляторов. // Изв. АН СССР, Техническая кибернетика. 1974. – № 6. – С. 89-94.
20. Armstrong W.W. Recursive solution to the equation of motion of an n-link manipulator. // Proc. of 5th World Congress on Theory of Machines and Mechanisms, (Montreal, July, 1979). – 1979. – P. 1343-1346.
21. Featherstone R. The calculation of robot dynamics using articulated-body inertias. // Int. Journal of Robotic Research. – 1983. Vol. 2, no. 1. – P. 13-30.
22. Brandl H., Johanni R., Otter M. An algorithm for the simulation of multibody systems with kinematical loops // Proceedings of the 7th World Congress on The Theory of Machines and Mechanisms. – Sevilla. – 1987. Vol. 2. – pp. 407-411.
23. Petzold L.R. Computational challenges in mechanical system simulation // Computer-Aided Analysis of rigid and flexible Mechanical Systems. – Kluwer Academic Publishers, Netherlands. – 1994. – pp. 483-499.

24. Pogorelov D. Differential-algebraic equations in multibody system modeling // Numerical algorithms. – 1998. Vol. 19. – pp. 183-194.
25. Rampalli R., Vikram Sohoni V., Steigerwald M.F., Joseph F. McGrath J.F. Numerical Methods in ADAMS Mechanical Simulation Code. Mechanical Dynamics, Inc., 1990. – 14 p.
26. Ibrahim Z.B., Suleiman M., Othman K.I. Direct block backward differentiation formulas for solving second order ordinary differential equations // Int. Journal of Mathematical, Physical, Electrical and Computer Engineering, 2008. – Vol. 2, No. 2. – pp. 260-262.
27. Open Dynamic Engine. Home page. URL: http://www.ode.org. Дата обращения 10.06.2019.
28. Бойков В.Г., Юдаков А.А. Моделирование динамики систем твердых и упругих тел в программном комплексе EULER // Изв. РАН. Информационные технологии и вычислительные системы. – 2001. – №1. – С. 42-52.
29. Baumgarte J.W. Stabilization of Constraints and Integrals of Motion in Dynamic Systems // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1972. – Vol. 1. – P.1-16.
30. Горобцов А.С., Солоденков С.В. Алгоритмы численного интегрирования уравнения движения систем тел с множителями Лагранжа // Машиностроение и инженерное образование. – 2005. – № 3. – С. 20-27
31. Wicker J. Dynamic behavior of spatial linkages: Exact equation of motion // Transaction of the ASME: Ser. B. – 1969. – V.9. – №1. – P. 251-258
32. Kane T.R. Wang C.F. On the derivation of Equations of Motion, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics. – 1965, Vol. 13, №. 2, P. 487-492.
33. Яскевич А.В. Автоматизированное формирование динамических моделей управляемых механических систем с кинематическими контурами // Управляемые механические системы. Сб. трудов Иркутского политехнического института. – 1986. С. 42 – 51.
34. Wehage R.A., Haug J.E. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of dynamical systems // Journal of Mechanical Design – 1982. № 104. – P. 247-255.
35. Harib K., Srinivasan K. Kinematic and dynamic analysis of Stewart platform-based machine tool structures. // Robotica – 2003. vol. 21. – P. 541-554.
36. Выгодский М.Я. Справочник по высшей математике. М.: Астрель: АСТ, 2008. 991 с.
37. Климов Д.М. Методы компьютерной алгебры в задачах механики / Д. М. Климов, В. М. Руденко; Отв. ред. А. Ю. Ишлинский; АН СССР, Институт проблем механики. - М.: Наука, 1989. – 213 С. ISBN 5-02-007169-2
38. Грошева М.В., Ефимов Г.Б., Самсонов В.А. История использования аналитических вычислений в задачах механики. – Москва: Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша РАН, 2005 г. – 87 с.