ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 50 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

Параметрический метод моментов решения уравнения коагуляции Смолуховского в теории аккумуляции пылевых тел в допланетном диске

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. Параметрический метод моментов решения уравнения коагуляции Смолуховского в теории аккумуляции пылевых тел в допланетном диске // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 50. 35 с. doi:10.20948/prepr-2019-50
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-50

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В. Колесниченко

Параметрический метод моментов решения уравнения коагуляции Смолуховского в теории аккумуляции пылевых тел в допланетном диске

Москва — 2019

Колесниченко А.В.

Параметрический метод моментов решения уравнения коагуляции Смолуховского в теории аккумуляции пылевых тел в допланетном диске.

Аннотация. В работе, применительно к проблеме объединения пылевых частиц, являющихся основным структурообразующим элементом планетезималей в допланетном облаке, предлагается параметрический метод моментов решения интегро-дифференциального уравнения Смолуховского, описывающего дисперсную коагуляцию дискового вещества. Рассмотрен параметрический подход к нахождению функций распределений допланетных тел по размерам, основанный на диаграмме Пирсона, при помощи которой удовлетворительно отыскиваются адекватные распределения по знанию их первых четырёх моментов. Этот подход особенно эффективен, когда необходимо знание только общих свойств функций распределения коагулирующих тел по объёмам и их временная эволюция. Поскольку кинетика процессов укрупнения допланетных тел существенным образом зависит от конкретного вида ядер коагуляции, то в работе предложен достаточно общий метод аппроксимации, позволяющий получить для них упрощённые выражения, как для ламинарного, так и турбулентного режимов движения дисковой среды. В качестве практического приложения параметрический метод моментов продемонстрирован на ряде примеров роста допланетных тел. Полученные результаты обеспечивают новый подход в решении ключевой проблемы звёздно-планетной космогонии, связанной с объяснением процесса роста межзвёздных пылевых частиц до крупных планетезималей.

Ключевые слова: Уравнение коагуляции Смолуховского, метод моментов, протопланетный диск, процессы коагуляции в пылевых средах**.**

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

The parametric method of moments for solving the Smolukhovsky coagulation equation in the theory of accumulation of dust bodies in a preplanetary disk.

Annotation. In the paper, as applied to the problem of combining dust particles, which are the main structure-forming element of planetesimals in the preplanetary cloud, a parametric method of moments for solving the Smoluchowski integro-differential equation describing dispersed coagulation of disk matter is proposed. A parametric approach to finding the distributions is considered, based on the Pearson diagram, which is used to satisfactorily find the adequate distributions from the knowledge of their first four moments. This approach is especially effective when it is necessary to know only the general properties of the distribution function of coagulating bodies by volume and their temporal evolution. Since the kinetics of the enlargement of pre-planetary bodies substantially depends on the specific type of coagulation nuclei, a sufficiently general approximation method was proposed in the work, which allows us to obtain simplified expressions for them for both laminar and turbulent motion modes. As a practical application, the parametric method of moments is demonstrated on a number of examples of the growth of pre-planetary bodies. The obtained results provide a new approach to solving the key problem of stellar-planetary cosmogony, associated with the explanation of the process of growth of interstellar dust particles to large planetesimals.

Key words*:* Smoluchowski coagulation equation, method of moments, protoplanetary disk, coagulation processes in dusty environments.

ВВЕДЕНИЕ

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей. За последние годы, благодаря впечатляющим успехам астрофизики, открытиям протопланетных дисков и внесолнечных планетных систем, а также бурному развитию вычислительной математики, расширились возможности комплексных исследований физической структуры и эволюции допланетного газопылевого облака вокруг молодых звёзд солнечного типа, из которых, по современным представлениям, формируются планеты.

Создание адекватных космогонических моделей связано с изучением динамической и тепловой эволюции гетерогенного газопылевого вещества дифференциально вращающегося допланетного диска при учёте турбулентных, магнитогидродинамических и радиационных эффектов, а также с участием фазовых переходов, химических реакций и коагуляционных процессов (см. Сафронов, 1960; 1969; Goldreich, Ward, 1973; Nakamoto, Nakagawa, 1994; Weidenschilling, 1980; Nakagawa и др., 1983,1986; Dubrulle и др.,1995; Youdin, Shu, 2002; Колесниченко, 2004, 2005; Marov, Kolesnichenko, 2001, 2013; Колесниченко, Маров, 2009). От пространственно-временного распределения термогидродинамических параметров дисковой среды зависит агрегатное состояние основных компонентов допланетного вещества, расположение их фронтов конденсации-сублимации и, следовательно, химический состав планет, их спутников, астероидов и комет. Важным ограничением в определении уровня приближения подобного рода моделей к реальности служат космохимические данные, получаемые в результате прямого изучения внеземного вещества.

К сожалению, большое число проблем, связанных с данным направлением исследований, пока остаётся нерешённым. К ним, в первую очередь, относятся вопросы, связанные с ранними этапами эволюции Солнечной системы и причинами её уникальности по сравнению с известными планетными системами у других звёзд. В частности, условия, при которых начинается образование планет в протопланетном диске, всё ещё остаются плохо понятыми, несмотря на несколько десятилетий астрофизических исследований. Это тем более досадно, что продолжающиеся открытия планет вне Солнца также настоятельно требуют

разработки адекватной модели образования и эволюции не только нашей собственной Солнечной системы, но и этих многочисленных и разнообразных звёздных систем. В связи с этим на переднем плане исследований по-прежнему остаётся ключевой вопрос космогонии − каким образом в протопланетном облаке происходит рост твёрдых тел от пылевых частиц до крупных агломератов (с большой начальной массой порядка массы астероидов $\sim 10^{15}$-10^{19} г и размерами в пределах 0,1-10 км) и от планетезималей до планет?

Важно отметить, что до последнего времени в большинстве теоретических моделей объединения пылевых частиц в допланетном диске изначально принималась компактная структура возникающих пылевых кластеров. Однако, как теперь стало ясно, растущие благодаря взаимным столкновениям частиц пылевые образования могут иметь весьма ажурную структуру и чрезвычайно низкую объёмную плотность (см., например, Blum, 2004; Ormel и др., 2007; Suyama и др., 2008; Wada и др., 2008; Okuzumi и др., 2011; Suyama и др., 2012). Для подобных ворсистых агрегатов, имеющих по сравнению с компактными пылевыми частицами относительно большие геометрические поперечные сечения, меняется весь режим движения в газовой космической среде, в частности, из-за значительного изменения силы трения. Следовательно, для адекватного описания эволюции пылевых агрегатов в диске и, в конечном счёте, механизма образования рыхлых протопланетезималей, необходимо, в общем случае, привлекать к рассмотрению их фрактальные свойства и внутреннюю структуру.

В отличие от ряда классических исследований (см., например, Сафронов, 1969; Weidenschilling, 1980; Nakagawa и др., 1981; 1986), в которых моделирование велось в рамках «обычной» сплошной среды и зачастую не принимались во внимание многофракционность пылевой составляющей первичного протопланетного облака, а также фрактальная природа формирующихся в процессе его эволюции пылевых кластеров (изучались в основном компактные пылевые образования с постоянной плотностью или пористые тела), в работах автора (Колесниченко, 2000; Kolesnichenko, 2001, Колесниченко, Маров, 2014а) предлагается рассматривать совокупность пылевых агрегатов как особый тип сплошной среды − фрактальной среды, для которой существуют точки и области, не заполненные её частицами. Гидродинамическое моделирование фрактальной газопылевой среды, обладающей нецелой массовой размерностью D, проводилось при этом в рамках дробно-интегральной модели, использующей различные интегралы дробных порядков, для которых порядок дробного интегрирования определяется массовой размерностью пылевых кластеров, а сам интеграл интерпретируется как особый тип интеграла на фрактале с точностью до числового множителя (см. Tarasov, 2005; 2010). Кроме этого, мы ограничились рассмотрением только броуновской и гравитационной коагуляции пылевых мономеров и фрактальных кластеров (находящихся в кинетическом и диффузионном режимах движения), что позволяет достаточно точно рассчитать процесс

седиментации ажурных пылевых агрегатов и определить их максимальные размеры в случае пренебрежения радиальным дрейфом и фрагментацией.

Известно, что решение уравнения коагуляции Смолуховского на каждом временном шаге для каждого размера допланетных тел и в каждой пространственной точке является наиболее узким местом в теории процесса их аккумуляции. Поскольку вид коэффициентов коагуляции пылевых кластеров (в частности, коэффициенты мономер-кластерной коагуляции и кластер-кластерной коагуляции) существенно изменяется во фрактальной среде (см. Kolesnichenko, 2001; Kolesnichenko, Marov, 2006; Колесниченко, Маров, 2014a,b), то это обстоятельство существенно усложняет решение кинетического уравнения Смолуховского, моделирующего процессы аккумуляции допланетных тел. По этой причине требуется разработка подхода, позволяющего находить эмпирические распределения для оценки характеристик стохастической коагулирующей дисковой системы, когда имеются лишь ограниченные данные о структурных параметрах составляющих её компонентов. Для таких распределений необходимо получить приемлемые аппроксимации в тех случаях, когда имеется возможность теоретически определить некоторые моменты распределения, а искомое точное распределение неизвестно. В качестве аппроксимирующих распределений в работе предложено использовать кривые Пирсона (Pearson, Hartley, 1954). Решение поставленной задачи базируется также на приближённых методах получения моментов системы, которые позволяют найти центральные моменты, а затем и параметры кривых Пирсона. В работе проводится сравнение этих методов и обсуждается практическая применимость каждого из них. При рассмотрении методов получения моментов стохастической системы приводятся выражения, позволяющие, в частности, оценить среднее расстояние, симметрию и островершинность вероятностного распределения характеристик системы. Эти выражения используются затем при подборе эмпирических моделей по диаграмме Пирсона (Hahn, Shapiro, 1967). В качестве справочного материала приведены точные и полные формулы для основных типов кривых Пирсона. Все полученные результаты применимы для любых распределений, имеющих конечные первые четыре начальных момента. Корректность выводов подтверждена численными расчётами, выполненными с помощью программы MathCad.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Для моделирования процесса аккумуляции допланетных тел будем использовать методы теории коагуляции, в которой рассматривается преимущественно лишь объединение частиц. Хотя в процессе аккумуляции планетезималей существенную роль играет также дробление сталкивающихся тел, учёт которого сильно усложняет изучение этого процесса, в данной работе мы ограничимся рассмотрением наиболее простого случая пространственно однородной акку-

муляции тел, не подвергающихся дроблениям.

Интегральная форма записи кинетического уравнения коагуляции Смолуховского (Smoluchowski, 1917) в этом случае записывается в виде:

$$\frac{\partial f(v,t)}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^v \mathcal{K}(v-w,w) f(v-w,t) f(w,t)\,dw - f(v,t)\int_0^\infty \mathcal{K}(v,w) f(w,t)\,dw, \quad (1)$$

где $f(v,t)$ − непрерывная функция распределения (спектр) по объёмам v коагулирующего роя пылевых частиц; $\mathcal{K}(v,w)$ − ядро коагуляции, описывающее вероятность столкновения и объединения частиц с объёмами v и w. Коэффициент $\mathcal{K}(v,w)$ является неотрицательной симметричной относительно своих аргументов функцией, $\mathcal{K}(v,w) = \mathcal{K}(w,v) \geq 0$. Для решения интегро-дифференциального кинетического уравнения (1) необходимо задание начального условия

$$f(v,0) = f_0(v), \quad (2)$$

а также выполнение условий $f(v,t) \to 0$ при $v \to 0$ и $v \to \infty$.

Точные методы решения уравнения коагуляции. Обсудим кратко возможные методы решения кинетического уравнения коагуляции (1), которое по своей структуре является интегро-дифференциальным уравнением. Решение подобных уравнений представляет значительные математические трудности. Имеющиеся методы решения уравнения (1) для упрощения их анализа можно разбить на группы (см. Рис.1). Точные аналитические методы решений образуют небольшую группу, обзор которых можно найти в работах (Волощук, Седунов, 1975; Попель и др., 1975; Волощук, 1984). При этом класс точных решений, основанных на применении интегрального преобразования Лапласа, может быть получен только для ядер коагуляции, являющихся линейными функциями по каждому из аргументов в отдельности, т.е. для ядер вида

$$\mathcal{K}_0(v,w) = \mathcal{G}_0, \quad \mathcal{K}_1(v,w) = \mathcal{G}_1(v+w), \quad \mathcal{K}_2(v,w) = \mathcal{G}_2 vw. \quad (3)$$

Наиболее теоретически продвинутыми к настоящему времени являются исследования процессов коагуляции для ядер типа $\mathcal{K}_0(v,w) = \mathcal{G}_0$, не зависящих от объёмов коагулирующих частиц. Решение уравнения (1) с ядром $\mathcal{K}_2(v,w) = \mathcal{G}_2 vw$ нельзя считать физически реализуемым, поскольку начиная с некоторого момента времени число частиц в системе становится отрицательным (см. Сафронов,1969). В связи с исследованиями эволюции протопланетного газопылевого облака Сафроновым (1969) было получено аналитическое решение уравнения (1) с ядром, пропорциональным сумме объёмов сталкиваю-

щихся частиц $\mathcal{K}_1(v,w)=\mathcal{G}_1(v+w)$, которое даёт качественно правильный общий ход зависимости $\mathcal{K}(v,w)$ от объёмов тел. Однако, к сожалению, до сих пор не найдено ни одной дисперсной системы, для которой микрофизика коагуляционного процесса в точности приводила бы к ядрам подобного типа.

Рис. 1. Методы решения кинетического уравнения.

В монографии (Волощук, Седунов, 1975) рассмотрены решения кинетических уравнений с ядрами (3) и с начальным распределением в виде гамма-распределения

$$f(v,0)=\begin{cases}\mathcal{N}_0\dfrac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}v^{\beta-1}exp(-\lambda v), & v\ge 0,\ \lambda>0,\ \beta>0;\\ 0 & \textit{в остальных случаях},\end{cases} \tag{4}$$

где $\mathcal{N}_0$ – суммарное количество частиц в начальный момент времени; $\Gamma(\beta)=\int_0^\infty x^{\beta-1}exp(-x)dx$ – гамма-функция; если β – положительное целое число, то $\Gamma(\beta)=(\beta-1)!$

Для начального условия (4) общее решение кинетического уравнения (1) с ядром $\mathcal{K}_0(v,w)=\mathcal{G}_0$ можно записать в виде

$$f(X,\xi_0)=\frac{(1-\xi_0)^2}{v\xi_0}exp(-\beta X)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{k\beta}}{\Gamma(k\beta)}\xi_0^k X^{\beta k}, \tag{5}$$

где $X\equiv v\mathcal{N}_0/\mathcal{S}$; $\xi_0\equiv 1-\mathcal{N}(\tau_0)/\mathcal{N}_0$; суммарное количество частиц $\mathcal{N}(\tau_0)$ определяется равенством $\mathcal{N}(\tau_0)=\mathcal{N}_0(1+\mathcal{N}_0\tau_0/2)^{-1}$; $\tau_0\equiv\mathcal{G}_0 t$; $\mathcal{S}$ – количе-

ство пылевой фазы в единицу объёма.

Для случая $\beta = 1$, соответствующего экспоненциальному начальному распределению, выражение (5) преобразуется к виду

$$f(X,\xi_0) = \frac{X}{v}(1-\xi_0)^2 exp\left[-X(1-\xi_0)\right]. \qquad (5^*)$$

Для $\beta = 2$ выражение (5) можно записать следующим образом

$$f(X,\xi_0) = \frac{X}{v}\frac{(1-\xi_0)}{\xi_0^{1/2}} exp(-2X)\, sh\left(2X\,\xi_0^{1/2}\right). \qquad (5^{**})$$

Общее решение уравнения (1) для случая ядра $\mathcal{K}_1(v,w) = \mathcal{G}_1(v+w)$ с начальным условием (4) записывается в виде

$$f(X,\xi_0) = \frac{X}{v}\xi_1(1-\xi_1) exp\left[-(\beta+\xi_1)X)\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\beta^{\beta(k+1)}X^{\beta-1+k(\beta+1)}}{(k+1)!\,\Gamma[\beta(k+1)]}, \qquad (6)$$

где $\xi_1 \equiv 1 - \mathcal{N}(\tau_1)/\mathcal{N}_0$; $\tau_1 \equiv \mathcal{G}_1 t$; суммарное количество частиц $\mathcal{N}(\tau_1)$ определяется равенством $\mathcal{N}(\tau_1) = \mathcal{N}_0 \exp(-\mathcal{S}\tau_1)$.

При $\beta = 1$, т. е. для случая экспоненциального начального распределения, из (6) следует

$$f(X,\xi_0) = \frac{(1-\xi_1)}{v\xi_1^{1/2}} exp\left[-(\beta+\xi_1)X)\right] I_1\left(2X\xi_1^{1/2}\right). \qquad (6^*)$$

В тех практически важных случаях, когда полного знания закона распределения частиц не требуется, а достаточно лишь информации о поведении во времени нескольких целых моментов $m_j \equiv \int_0^\infty v^j f(v,t)dv$ $(j = 0,1,2,...)$ функции распределения $f(v,t)$, задача существенно упрощается. Для ядер вида (3) она решается точно.

Рассмотрим в качестве примера физически реализуемое ядро $\mathcal{K}_1(v,w) = \mathcal{G}_1(v+w)$. Для нахождения решения воспользуемся методом моментов, смысл которого состоит в сведении уравнения (1) к бесконечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений относительно моментов m_j $(j = 0,1,2,...)$. Для получения этой системы умножим обе части (1) на v^j и проинтегрируем результат по v в пределах от 0 до ∞; в итоге получим следующую систему уравнений относительно моментов m_j:

$$\frac{\partial m_0}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty \mathcal{K}(v,w) f(v,t) f(w,t)\, dw\, dv,$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \int_0^\infty (w-v)\mathcal{K}(v,w) f(v,t) f(w,t)\, dw\, dv = 0,$$

.....

$$\frac{\partial m_j}{\partial t} = \int_0^\infty \int_0^\infty \left[\tfrac{1}{2}(v+w)^j - v^j \right] \mathcal{K}(v,w) f(v,t) f(w,t)\, dw\, dv, \quad (j = 2,3,...). \quad (7)$$

Нулевой момент равен суммарному количеству частиц, а первый момент − количеству дисперсной фазы в единице объёма:

$$m_0 \equiv \mathcal{N}(t) = \int_0^\infty f(v,t) dv, \; m_1 = \mathcal{S}(t) = \int_0^\infty v\, f(v,t) dv. \quad (8)$$

Для того чтобы выразить правые части уравнений этой системы также через моменты, нужно конкретизировать ядро коагуляции и принять допущение относительно начального вида функции распределения. В результате получим систему дифференциальных уравнений для определения числа частиц по размерам.

Например, для ядра $\mathcal{K}_1(v,w) \equiv \mathcal{G}_1(v+w)$ первые пять моментных уравнения (1) запишутся в виде:

$$\frac{1}{\mathcal{G}_1}\frac{\partial m_0}{\partial t} = -m_1 m_0, \quad \frac{1}{\mathcal{G}_1}\frac{\partial m_1}{\partial t} = 0, \quad \frac{1}{\mathcal{G}_1}\frac{\partial m_2}{\partial t} = 2 m_1 m_2,$$

$$\frac{1}{\mathcal{G}_1}\frac{\partial m_3}{\partial t} = 3(m_1 m_3 + m_2^2), \quad \frac{1}{\mathcal{G}_1}\frac{\partial m_4}{\partial t} = 4 m_1 m_4 + 10 m_2 m_3. \quad (9)$$

Здесь предполагается, что дисперсная фаза не удаляется из рассматриваемого объёма. Если ввести безразмерное время $\tau = \mathcal{G}_1 \mathcal{S} t$, то точное решение системы (9) может быть записано в виде:

$$m_1 = \mathcal{S}, \quad m_2 = m_2(0)\exp 2\tau, \quad m_3 = \exp 3\tau \left[m_3(0) - \frac{m_2^2(0)}{S}(1-\exp\tau) \right],$$

$$m_4 = \exp 4\tau \left\{ 10\frac{m_2(0)}{S}(\exp\tau - 1)\left[\frac{m_2^2(0)}{S}(\exp\tau - 1) + m_3(0) \right] + m_4(0) \right\}. \quad (10)$$

Приближённые методы решения уравнения коагуляции. Приближенные методы решения уравнения Смолуховского (1) можно разделить на две основные группы: методы для получения начальной асимптотики и методы реше-

ний для получения дальних асимптотик. Первую группу методов можно разделить на численные и параметрические методы.

Поскольку в настоящее время не найдены аналитические методы решения кинетических уравнений (1) с произвольными ядрами, то многие исследования последних лет были посвящены разработке численных методов решения этих уравнений. Основное внимание в этих работах уделялось построению рациональных схем расчёта уравнений (1), оценке точности получаемых результатов и развитию общих методик анализа результатов. Обзор по имеющимся реализациям численных методов можно найти, например, в работах (Волощук, 1984; Chan и др., 2006). Принципиальная трудность при использовании численных методов решения уравнения (1) возникает из-за большого диапазона изменения частиц по размерам. Объёмы, по которым производится интегрирование правой части уравнения (1), изменяются в общем случае в широких пределах, что существенно затрудняет выбор рационального шага интегрирования. Для сужения области интегрирования применяют различные преобразования переменных и неравномерные сетки интегрирования (см. Волощук, 1984). По этой причине, несмотря на кажущуюся универсальность численных методов, в данном случае они применяются сравнительно редко.

К счастью, часто и не требуется полного знания функции распределения частиц по размерам, а достаточно лишь информации о поведении во времени её нескольких характеристических параметров, таких как центр распределения, рассеяние, симметрия и островершинность, которые можно представить с помощью моментов распределения относительно нуля

$$m_j \equiv \int_0^\infty v^j f(v,t)dv, \qquad (j = 0,1,2,...), \tag{11}$$

являющихся числовыми характеристиками случайной функции $f(v,t)$. Наиболее важной характеристикой центра распределения является среднее значение (математическое ожидание) $E(v) \equiv m_1 = \int_0^\infty vf(v,t)dv$. Тогда j-й момент относительно математического ожидания (или центральный момент) определяется как $\mu_j \equiv E[v - m_1]^j \equiv \int_0^\infty (v - m_1)^j f(v,t)dv$. Первый центральный момент всегда равен нулю, $\mu_1 = 0$. Второй центральный момент (дисперсия) является показателем рассеяния и определяется соотношением

$$\mu_2 \equiv \sigma^2(v) \equiv E[v - m_1]^2 = \int_0^\infty (v - m_1)^2 f(v,t)dv. \tag{12}$$

Легко показать, что $\mu_2 = m_2 - m_1^2$. Третий момент относительно среднего, связанный с асимметрией распределения, определяется как

$$\mu_3 \equiv E[v - m_1]^3 = = m_3 - 3m_2 m_1 + 2m_1^3. \quad (13)$$

Одновершинное распределение с $\mu_3 < 0$ имеет левостороннюю (отрицательную) асимметрию. Если $\mu_3 > 0$, то распределение имеет правостороннюю (положительную) асимметрию. Для симметричного распределения $\mu_3 = 0$. Величина

$$\sqrt{\beta_1} \equiv \mu_3 / (\mu_2)^{3/2} \quad (14)$$

измеряет отношение асимметрии распределения к мере рассеяния. Этот нормированный показатель позволяет сравнивать асимметрию двух распределений, имеющих различный масштаб (см., например, Hahn, Shapiro, 1967). Наконец, четвёртый момент относительно среднего связан с островершинностью распределения и называется эксцессом. Он определяется как

$$\mu_4 \equiv E(v - m_1)^4 = m_4 - 4m_3 m_1 + 6m_2 m_1^2 - 3m_1^4. \quad (15)$$

Величина

$$\beta_2 \equiv \mu_4 / \mu_2^2 \quad (16)$$

является относительным показателем эксцесса. В частности, для нормального распределения, имеющего колоколообразную форму, значение $\beta_2 = 3.0$. Нормальное распределение обычно используется как стандарт, по которому оценивается островершинность распределений.

Известно, что по первым четырём моментам распределения можно сделать параметрическую оценку самого распределения на основе диаграммы Пирсона Рис.2 (см. Hahn., Shapiro, 1967). Далее будет продемонстрирована подобная методика.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Многие исследования последних лет были направлены на разработку различных параметрических методов решения кинетических уравнений Смолуховского с произвольными ядрами (см., например, Волощук, Седунов, 1975; Lee, 1983; Волощук, 1984; Логунов, 1979, 1985; Frenklach, Harris,1987; McGraw, 1997; Barrett, Jheeta, 1996; Синайский,1997; Barrett, Webb, 1998; Колесниченко, 2000, 2001; Marov, Kolesnichenko, 2001; Frenklach, 2002; Marchisio, Fox, 2005; Mingzhou и др., 2008; Yu и др., 2008, 2011).

Параметрические методы основаны на предположении, что решение (точное или приближенное) принадлежит некоторому наперёд заданному параметрическому классу функций, в котором ищется приближение. Теоретически распределение $f(v,t)$ всегда можем представить в виде бесконечного ряда[1)] по какой-либо полной ортогональной системе функций $\varphi_k(v)$

$$f(v,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(t)\varphi_k(v) \tag{17}$$

и использовать это разложение как параметрическое представление $f(v,t)$ с параметрами $\alpha_1,\alpha_2,\ldots$. При этом для определения параметров $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_k$ исходное кинетическое уравнение (1) следует заменить системой моментных уравнений (7), число которых совпадает с числом неизвестных коэффициентов α. В результате при подстановке (17) в (7) можно получить следующую систему нелинейных уравнений относительно моментов m_j:

$$\frac{\partial m_j}{\partial t}=\sum_{k,l=0}\alpha_k\alpha_l\beta_{klj}, \quad m_j=\sum_{k=0}\alpha_k\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}v^j\varphi_k(v)dv,$$

$$\beta_{klj}=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathcal{K}(v,w)\left[\frac{1}{2}(v+w)^j-v^j\right]\varphi_k(v)\varphi_l(w)dv\,dw. \tag{18}$$

В том случае, когда система функций $\varphi_j(v)$ ортогональна и нормирована на единицу, то при умножении исходного кинетического уравнения (1) на $\varphi_j(v)$ и последующего интегрирования по v получается система уравнений

$$\frac{\partial\alpha_j}{\partial t}=\sum_{k,l=0}\alpha_k\alpha_l\beta^*_{klj}, \quad \beta^*_{klj}=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\mathcal{K}(v,w)\left[\frac{1}{2}\varphi_j(v+w)-\varphi_j(v)\right]\varphi_k(v)\varphi_l(w)dv\,dw, \tag{19}$$

которая, в отличие от (18), разрешена относительно производных по α_j. Коэффициенты β_{klj} и β^*_{klj} в (18) и (19) постоянны и должны определяться до решения соответствующей системы. Однако уравнения (18) и (19), в силу большого объёма и громоздкости необходимых вычислений, могут быть решены только численно с помощью ЭВМ.

[1)] Заметим, что ряд (17) может быть даже расходящимся, моменты более высокого порядка могут вовсе не существовать, а аппроксимация несколькими первыми слагаемыми может оказаться лучшей, чем в том случае, когда указанный ряд сходится (см. Левин, 1974).

Важно иметь в виду, что определение коэффициентов β_{klj} существенно зависит от выбора базисных функций $\varphi_j(v)$, в качестве которых могут быть использованы ряды Фурье, полиномы Эрмита, полиномы Чебышева, полиномы Лагерра и т. д. (см., например, Кендал, Стьюарт, 1966; Левин, 1974). Вместе с тем исследования точности аппроксимации, которой можно достигнуть при использовании конечного числа членов разложения по полиномам Эрмита (так называемого ряда Грамма−Шарлье) показали следующее (см. Кендал, Стьюарт, 1966):

− Эти ряды могут вести себя нерегулярно, − сумма k членов может дать худшее приближение, чем сумма $(k-1)$ членов.

− Сумма конечного числа членов этих рядов может привести к отрицательным значениям плотности вероятностей, особенно на «хвосте» распределения.

− Использование конечных рядов даёт удовлетворительные результаты только в случае оценки распределений с умеренной асимметрией.

Этот неблагоприятный результат является довольно серьёзным препятствием при применении нескольких начальных членов ряда (17) для аппроксимации решения кинетического уравнения (1), когда требуется определить не только моменты искомой плотности распределения, но и само распределение.

Однако для некоторых ядер специальных видов параметрический метод решения можно несколько видоизменить. К ним относятся симметричные ядра со степенью однородности η, которые имеют вид:

$$\mathcal{K}(v,w)=\mathcal{G}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\left(v^{\eta-\delta_j}w^{\delta_j}+v^{\delta_j}w^{\eta-\delta_j}\right), \tag{20}$$

где $\mathcal{G}$ − множитель, определяемый специфическими условиями, при которых идёт коагуляция. К этому классу ядер относятся и ядра (3), при которых кинетическое уравнение допускает точные решения.

При подстановке (20) в (7) получается следующая бесконечная система дифференциальных уравнений для моментов

$$\frac{\partial m_0}{\partial t}=\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t}=-\mathcal{G}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j m_{\eta-\delta_j}m_{\delta_j},$$

$$\frac{\partial m_1}{\partial t}=\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t}=0,$$

……..

$$\frac{\partial m_p}{\partial t} = \frac{\mathcal{G}}{2}\sum_{j=0}^{n}\alpha_j\sum_{k=1}^{p-1}C_p^k(m_{\eta-\delta_j+p-k}m_{\delta_j+k} + m_{\eta-\delta_j+k}m_{\delta_j+p-k}),\ \ (p=2,3,...), \quad (21)$$

где $C_n^j = n!/j!(n-j)!$ – биномиальные коэффициенты.

Для решения этой системы уравнений, в правые части которых входят в общем случае дробные моменты, необходимо задать связующие соотношения между дробными и целыми моментами (см. ниже). Эти соотношения могут быть получены на основе параметрических и непараметрических предположений о виде этих связей. Параметрические методы базируются на условии, что искомое распределение принадлежит определённому параметрическому классу.

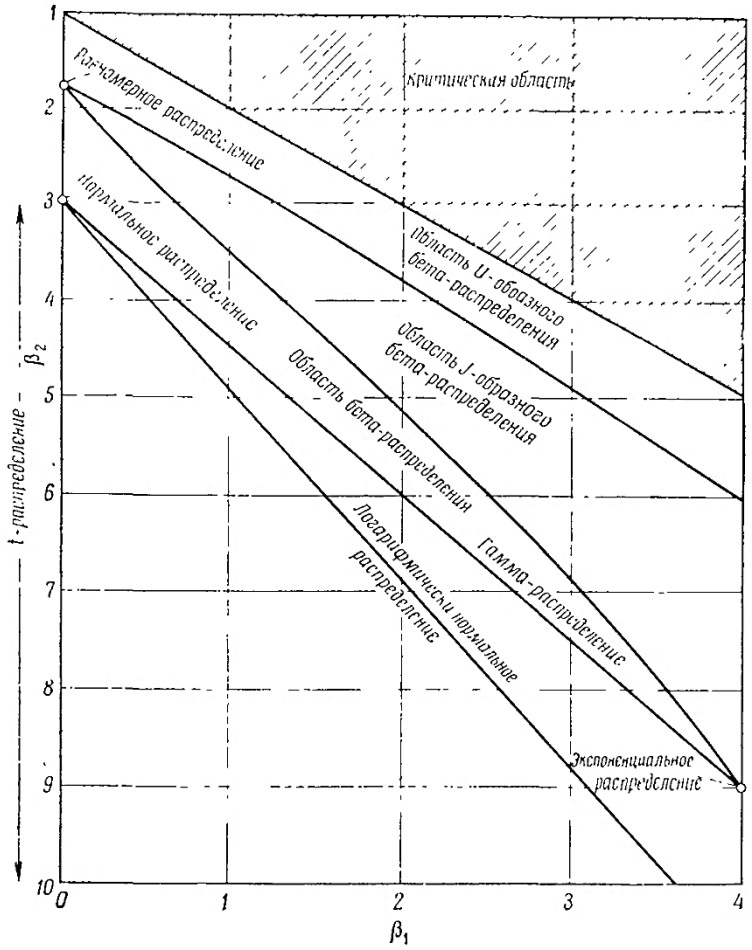


Рис. 2. Области в плоскости (β_1, β_2) для различных распределений

Для уменьшения числа отыскиваемых параметров в качестве такого класса может быть выбрана совокупность известных распределений $f(v,t)$, включающая начальное. Наиболее распространённым подходом является использование нормального распределения, которое даёт приемлемое описание многих (хотя далеко не всех) реальных явлений. Аналогично, гамма-распределение и логарифмическое нормальное распределение могут быть использованы для описания случайных величин, ограниченных с одной стороны (сверху, или снизу), в то время как бета-распределение – для описания случайных величин, ограниченных как сверху, так и снизу. Хотя эти модели приводят к распределениям самой различной формы, всё же и они не дают той степени

обобщения, которая часто бывает необходима. Это иллюстрируется на Рис.2, где показаны области в плоскости (β_1,β_2) для различных распределений − нормального, бета-распределения (частный случай − равномерное распределение), гамма-распределения (частный случай – экспоненциальное распределение) и логарифмически нормального, где β_1 − квадрат нормированного показателя асимметрии, а β_2 − нормированный показатель островершинности. Сюда входит также t-распределение Стьюдента − симметричное распределение, сходящееся к нормальному, когда его параметр (число степеней свободы) произвольно увеличивается.

Пример 1. Примем для простоты, что в результате процессов коагуляции распределение $f(v,t)$ остаётся в классе распределений, к которым принадлежит начальное распределение, а со временем меняются только его статистические параметры: среднее значение, дисперсия и т.п. В качестве начального распределения пылевых частиц по размеру (диаметру) $d(v)$ в газопылевом облаке, по аналогии с атмосферным аэрозолем, выберем двухпараметрическое логнормальное распределение.

Плотность вероятности логарифмически нормального закона зависит от среднего значения $\langle \ln d\rangle$ и показателя рассеяния (дисперсии) $\sigma_L^2 \equiv \langle(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2\rangle$ логарифма диаметра d:

$$f(d;\mu^*,\sigma_L) = \frac{\mathcal{N}}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{(\ln d - \langle \ln d\rangle)^2}{2\sigma_L^2}\right\} = \frac{\mathcal{N}}{\sigma_L d\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{\ln^2(d/\mu^*)}{2\sigma_L^2}\right\}. \quad (22)$$

Медиана распределения определяется, как нетрудно убедиться из (22), соотношением $\mu^* = \exp\langle \ln d\rangle$, а средние значения самого диаметра и его дисперсии соответственно равны

$$\langle d\rangle = \exp\left(\tfrac{1}{2}\sigma_L^2 + \ln\mu^*\right), \quad \sigma^2 \equiv \langle(d-\langle d\rangle)^2\rangle = \langle d\rangle^2\left[\exp\sigma_L^2 - 1\right]. \quad (23)$$

Используя это соотношения, можно получить формулы для статистических параметров (σ_L^2 и μ^*) логнормального распределения (22) только через средний диаметр частиц $\langle d\rangle$ и относительную дисперсию $\beta^2 \equiv \langle(d-\langle d\rangle)^2\rangle / \langle d\rangle^2$ их размера:

$$\sigma_L^2 = \ln(1+\beta^2), \quad \mu^* = \langle d\rangle / \sqrt{1+\beta^2}\,. \quad (24)$$

Используем для этого формулу перехода $f(v)=f\left[d(v)\right]\left|\dfrac{\partial d(v)}{\partial v}\right|$ (справедливую для строго возрастающей функции $v=v(d)$ случайной величины d (см. Хан, Шапиро, 1969)) и распределение (22) для определения плотности начального распределения объёма $v=(\pi/6)d^3$ пылевых частиц; тогда

$$f(v;\sigma_L,\mu)=\frac{\mathcal{N}}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L v}\exp\left[-\frac{\ln^2(v/\mu)}{18\sigma_L^2}\right],\qquad (\mu=(\pi/6)\mu^{*3}). \tag{25}$$

Пусть теперь процесс коагуляции пылевых частиц в диске не меняет этого распределения, а со временем меняются только параметры $\mu(t)$ и $\sigma_L^2(t)$. Введём моменты логнормального распределения

$$m_p(t)=\frac{\mathcal{N}}{3\sqrt{2\pi}\sigma_L(t)}\int_0^\infty v^{p-1}\exp\left\{-\frac{\ln^2[v/\mu(t)]}{18\sigma_L^2(t)}\right\}dv\,. \tag{26}$$

Согласно (Lee,1983), для момента p-го порядка справедливо представление

$$m_p=m_1\mu^{p-1}\exp\left[\tfrac{3}{2}(p^2-1)\sigma_L^2\right],\quad m_1=\mathcal{S}=const\,, \tag{27}$$

позволяющее выразить дробные моменты, входящие в (21), через m_1,μ,σ_L^2. В итоге получим следующую параметрическую систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (число уравнений должно совпадать с числом неизвестных коэффициентов) для определения параметров $\mu(t),\sigma_L^2(t)$ по заданным начальным значениям $\mu(0),\sigma_L^2(0)$:

$$\mathcal{N}\equiv m_0=\mathcal{S}\mu^{-1}\exp(-\tfrac{3}{2}\sigma_L^2),\quad \mathcal{S}\equiv m_1=const\,,\quad m_2=\mathcal{S}\mu\exp(\tfrac{9}{2}\sigma_L^2); \tag{28}$$

$$\frac{\partial m_0}{\partial t}=-\mathcal{G}\sum_{j=0}^{K}\beta_j m_{\eta-\delta_j}m_{\delta_j}=-\mathcal{G}m_1^2\mu^{\eta-2}\sum_{j=0}^{n}\beta_j\exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2+(\eta-\delta_j)^2-2]\sigma_L^2\right\}=$$

$$=-\mathcal{G}\mu^{\alpha}m_0^2\sum_{j=0}^{K}\beta_j\exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2+(\eta-\delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial m_2}{\partial t}=2\mathcal{G}\sum_{j=0}^{n}\beta_j m_{\eta-\delta_j+1}m_{\delta_j+1}=$$

$$=2\mathcal{G}m_1^2\mu^{\alpha}\sum_{j=0}^{n}\beta_j\exp\left\{\tfrac{3}{2}[(\delta_j+1)^2+(\eta-\delta_j+1)^2-2]\sigma_L^2\right\}=$$

$$= 2\mathcal{G}\mu^{\eta+2}\sum_{j=0}^{n}\beta_j \exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta-\delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \qquad (30)$$

Эта параметрическая система уравнений не линейна и может быть решена только численно. Результаты подобного моделирования в связи с задачей осаждения пылевых частиц к центральной плоскости диска представлены в монографии (Kolesnichenko, Marov, 2014b). Здесь же отметим, что изменение во времени среднего числа частиц $\mathcal{N}(t)$ можно оценить, предположив, что дисперсия σ_L^2 остаётся постоянной. В этом случае, ограничившись двумя первыми моментами, из (21) будем иметь

$$\frac{\partial\mathcal{N}}{\partial t} = -\mathcal{G}\mu^{\alpha}\mathcal{N}^2\sum_{j=0}^{K}\beta_j \exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta-\delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \qquad (31)$$

Решение этого уравнения, полученное при использовании начального условия $\mathcal{N}(0) \equiv \mathcal{N}_0 = \mathcal{S}/\tilde{v}(0)$, имеет вид

$$\mathcal{N}(t) = \frac{\mathcal{S}}{\tilde{v}(0)}\frac{1}{1+qt}, \quad q = \mathcal{G}\mu^{\alpha}\frac{\mathcal{S}}{\tilde{v}(0)}\sum_{j=0}^{n}\beta_j \exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta-\delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}, \qquad (32)$$

где $\tilde{v}(0) = (\pi/6)\langle d\rangle^3 = \mu(0)\exp\left(\tfrac{3}{2}\sigma_L^2\right)$ – начальное значение среднего объёма. Отсюда, при использовании соотношения $\tilde{v}(t) = \mathcal{S}/\mathcal{N}$, можно найти изменение во времени среднего объёма частиц. Для относительно больших значений времени, когда $qt >> 1$, из (32) следует

$$\mathcal{N}(t) = 1/\mathcal{G}\mu^{\alpha}t\sum_{j=0}^{n}\beta_j \exp\left\{\tfrac{3}{2}[\delta_j^2 + (\eta-\delta_j)^2]\sigma_L^2\right\}. \qquad (33)$$

Из этого выражения видно, что при достаточно большом времени коагуляции среднее число частиц в системе перестаёт зависеть от их начального распределения, т.е. как бы «забывает своё прошлое», и может быть описано некоторой универсальной функцией, вид которой определяется только ядром коагуляции. Аналогичное рассмотрение может быть проведено и с другими возможными распределениями пылевых частиц по объёмам в коагулирующем потоке, например с гамма-распределением.

Пример 2. Пусть, например, исходная плотность распределения частиц по объёмам является гамма-распределением. И пусть на начальном участке процесса коагуляции $f(v,t)$ остаётся в двухпараметрическом классе этого распределения, которое задаётся равенством

$$p(v,0)=\mathcal{N}_0\frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)}v^{\beta-1}exp(-\lambda v),\quad \lambda=\lambda(t),\quad \beta=\beta(t). \tag{34}$$

Тогда $f(v,t)$ запишется в виде

$$f(v,t)=\frac{\mathcal{S}}{\langle v\rangle}p(v,t),\quad \langle v\rangle=\int_0^\infty vp(v,t)dv=\frac{\beta}{\lambda}. \tag{35}$$

Определяя моменты $f(v,t)$, получим

$$\begin{gathered} m_0=\mathcal{S}\frac{\lambda}{\beta},\quad m_2=m_0\frac{(\beta+1)\beta}{\lambda^2},\\ m_\alpha=\frac{m_0}{\lambda^\alpha}\frac{\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)},\quad m_{1+\alpha}=\frac{m_0}{\lambda^{\alpha+1}}\frac{(\beta+\alpha)\Gamma(\beta+\alpha)}{\Gamma(\beta)}. \end{gathered} \tag{36}$$

При больших значениях β и $\beta>>\alpha$, раскрывая гамма-функцию по асимптотическому разложению Стирлинга, получим

$$\Gamma(\beta+\alpha)/\Gamma(\beta)\simeq\mathcal{A}\beta^\alpha,\quad A=(1+\alpha)exp(-\alpha), \tag{37}$$

что позволяет переписать третье и четвёртое равенства в (36) в виде

$$m_\alpha=\mathcal{A}m_0^{1-\alpha}\mathcal{S}^\alpha,\quad m_{1+\alpha}=\mathcal{A}m_0^{-\alpha}\mathcal{S}^{1+\alpha}. \tag{38}$$

Рассмотрим случай, когда ядро коагуляции определяется равенством

$$\mathcal{K}(v,w)=\mathcal{G}v^{\eta/2}w^{\eta/2}. \tag{39}$$

Соответствующие ему первые три уравнения для моментов запишем в виде

$$\frac{\partial m_0}{\partial t}=-\frac{1}{2}\mathcal{G}m_{\eta/2}^2,\quad \frac{\partial m_1}{\partial t}=0,\quad \frac{\partial m_2}{\partial t}=2Gm_{1+\eta/2}^2. \tag{40}$$

Учитывая (38), получим

$$\frac{\partial m_0}{\partial t}=-\frac{1}{2}\mathcal{G}\mathcal{A}^2\mathcal{S}^\eta m_0^{2(1+\eta/2)},\quad m_1=\mathcal{S},\quad \frac{\partial m_2}{\partial t}=-2\mathcal{G}\mathcal{A}^2\mathcal{S}^{2(1+\eta/2)}m_0^\eta. \tag{41}$$

Дополняя эти уравнения начальными условиями и решая их, получим

$$\frac{m_0(\tau)}{m_0(0)}=\left\{1+\frac{1-\eta}{2}[m_0(0)]^{1-\eta}\tau\right\}^{1/(\eta-1)},\quad \tau=\mathcal{G}\mathcal{A}^2\mathcal{S}^\eta t, \tag{42}$$

$$\frac{m_2(\tau)}{m_2(0)}=1+\frac{2\mathcal{S}^2}{m_2(0)m_0(0)}\left[\frac{m_0(0)}{m_0(\tau)}-1\right]. \tag{43}$$

3. НЕПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Параметрические методы регуляризации системы моментных уравнений (21), несмотря на их логическую простоту получения решения, основаны на

очень сильном исходном допущении о виде искомого распределения, которое обычно выбирают «волевым» способом. Этот недостаток в выборе доопределяющих соотношений можно устранить, если воспользоваться непараметрическим методом интерполяции для определения связей между целыми и дробными моментами на временном интервале $[t, t+\Delta t]$. Переходя к безразмерным переменным при помощи нормирования всех моментов на их значения в начале интервала, запишем интерполяционный полином Лагранжа $L_j^n(x)$ (см. Демидович, Марон, 1963) для оценки дробного момента $m_{i+\alpha}$ в виде (Логунов, 1979; Press и др.,1992; Marov, Kolesnichenko, 2001)

$$m'_{i+\alpha}(t) = \sum_{j=k}^{k+n} \left[m'_j(t) \right]^{L_j^{(n)}}, \quad k \le t \le k+n, \quad m'_\gamma(t) \equiv \frac{m_\gamma(t)}{m_\gamma(0)}, \tag{44}$$

где

$$L_j^n(x) = \frac{1}{n!} \prod\nolimits_{n+1} \frac{(-1)^{n-j} C_n^j}{x-j}, \quad C_n^j = \frac{n!}{j!(n-j)!},,$$

$$\prod\nolimits_{n+1}(x) = x(x-1)(x-2)...(x-n), \quad x = i+\alpha-j. \tag{45}$$

Эта интерполяционная формула справедлива для любого времени t и обеспечивает совпадение оценки интерполируемого момента с его точным значением в любой момент времени, если α − целое, и при $t=0$, если α − дробное число. Определив затем моменты распределения из соответствующей системы дифференциальных уравнений (при выбранном начальном распределении) можно по первым пяти моментам оценить вид искомого распределения частиц по размерам с помощью диаграммы Пирсона (см. Хан, Шапиро, 1969).

Заметим, что для оценки точности интерполяции по формуле (44) в литературе были проведены численные расчёты дробных моментов гамма- и логнормальных распределений. Результаты показали, что относительная ошибка интерполяции монотонно убывает с ростом параметра n, при увеличении дисперсий исследуемых распределений, а также при увеличении порядка интерполируемого момента. Так, относительная ошибка интерполяции для начальных дробных моментов гамма-распределения зависит только от его параметра формы β и имеет порядок 10^{-2} при $\beta = 2$ и порядок 10^{-3} при $\beta = 5$. С ростом β ошибка монотонно убывает. Знак ошибки в общем случае зависит от β и порядка интерполируемого момента. Для логнормального распределения соотношение (44) становится точным при $n \ge 2$.

Аппроксимация ядер коагуляции. Для исследования процессов укрупнения допланетных тел теоретически можно использовать любые методы, рассмотренные выше, с соответствующим ограничением на вид ядра коагуляции. Однако с точки зрения вычислений и последующего анализа результатов наиболее прост метод, основанный на непараметрическом доопределении системы моментных уравнений. Этот метод является достаточно общим, так как применим для решения уравнений с ядрами коагуляции вида (20). В случае, когда исследуемое ядро коагуляции имеет другой вид, для него можно построить аппроксимирующую формулу типа (20).

Пусть $\mathcal{K}(v,w)$ − симметричная функция двух переменных со степенью однородности η, которую надо аппроксимировать рядом вида (20). Учитывая условие однородности, запишем $\mathcal{K}(v,w)$ в виде (Логинов, 1979)

$$\mathcal{K}(v,w)=v^{\eta}\mathcal{K}(1,\mathcal{X})=v^{\eta}\sum_{j=0}^{n}\beta_j\left(\mathcal{X}^{\delta_j}+\mathcal{X}^{\eta-\delta_j}\right),\quad \mathcal{X}\equiv\frac{w}{v}. \tag{46}$$

Неизвестные коэффициенты β_j определим из условия выполнения равенства между правой и левой частью (46) при фиксированных значениях $\mathcal{X}$, которые являются точками привязки. Чтобы при последующем интегрировании разложения (46) не появлялись моменты порядка выше степени однородности η, коэффициенты δ_j можно определить равенством

$$\delta_j=\eta j(n+1)^{-1}\ . \tag{47}$$

С учётом введённых обозначений систему уравнений для нахождения коэффициентов β_j можно переписать в виде

$$\mathcal{K}(1,\mathcal{X}_k)=\sum_{j=0}^{n}\beta_j\left(\mathcal{X}_k^{\delta_j}+\mathcal{X}_k^{\eta-\delta_j}\right),\quad k=1,2,3,\ldots\ldots. \tag{48}$$

Умножая теперь правую и левую части (48) на v^{η}, получаем, что при $n=0$ аппроксимация ядра $\mathcal{K}(v,w)$ отыскивается в классе функций

$$\mathcal{K}(v,w)=\beta_0^{(0)}(v^{\eta}+w^{\eta}); \tag{49}$$

при $n=1$ − в классе функций

$$\mathcal{K}(v,w)=\beta_0^{(1)}(v^{\eta}+w^{\eta})+\beta_1^{(1)}v^{\eta/2}w^{\eta/2}; \tag{50}$$

при $n=2$ − в классе функций

$$\mathcal{K}(v,w)=\beta_0^{(2)}(v^{\eta}+w^{\eta})+\beta_1^{(2)}\left(v^{2\eta/3}w^{\eta/3}+v^{\eta/3}w^{2\eta/3}\right) \tag{51}$$

и т.д.

Таким образом, решая уравнения (48) относительно коэффициентов β_j можно получить, что:

при $n=0$

$$\beta_0^{(0)} = \mathcal{K}(1,\mathcal{X}_1)/(1+\mathcal{X}_1^{\eta}); \tag{52}$$

при $n=1$

$$\begin{aligned}\beta_0^{(1)} &= \left(\mathcal{K}(1,\mathcal{X}_1)\mathcal{X}_2^{\eta/2} - \mathcal{K}(1,\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_1^{\eta/2}\right)/\left(\mathcal{X}_2^{\eta/2}(1+\mathcal{X}_1^{\eta}) - \mathcal{X}_1^{\eta/2}(1+\mathcal{X}_2^{\eta})\right),\\ \beta_1^{(1)} &= \left(\mathcal{K}(1,\mathcal{X}_2)(1+\mathcal{X}_1^{\eta}) - \mathcal{K}(1,\mathcal{X}_1)(1+\mathcal{X}_2^{\eta})\right)/\left(\mathcal{X}_2^{\eta/2}(1+\mathcal{X}_1^{\eta}) - \mathcal{X}_1^{\eta/2}(1+\mathcal{X}_2^{\eta})\right);\end{aligned} \tag{53}$$

при $n=2$

$$\beta_0^{(2)} = \frac{\mathcal{K}(1,\mathcal{X}_1)(\mathcal{X}_2^{\eta/3}+\mathcal{X}_2^{2\eta/3}) - \mathcal{K}(1,\mathcal{X}_2)(\mathcal{X}_1^{\eta/3}+\mathcal{X}_1^{2\eta/3})}{(1+\mathcal{X}_1^{\eta})(\mathcal{X}_2^{\eta/3}+\mathcal{X}_2^{2\eta/3}) - (1+\mathcal{X}_2^{\eta})(\mathcal{X}_1^{\eta/3}+\mathcal{X}_1^{2\eta/3})},$$

$$\beta_1^{(2)} = \frac{\mathcal{K}(1,\mathcal{X}_2)(1+\mathcal{X}_1^{\eta}) - \mathcal{K}(1,\mathcal{X}_1)(1+\mathcal{X}_2^{\eta})}{(1+\mathcal{X}_1^{\eta})(\mathcal{X}_2^{\eta/3}+\mathcal{X}_2^{2\eta/3}) - (1+\mathcal{X}_2^{\eta})(\mathcal{X}_1^{\eta/3}+\mathcal{X}_1^{2\eta/3})}. \tag{54}$$

Аппроксимацию ядра $\mathcal{K}(v,w)$ называют m- точечной, если правая и левая части (46) совпадают в m точках при изменении параметров $\mathcal{X}_i$ от 0 до ∞. Когда выбрана m-точечная схема привязки, то последовательность точек $\mathcal{X}_i$ для системы (48) определяется следующим рекуррентным соотношением

$$(m-1)\left[(\mathcal{X}_i+1)^{-1} - (\mathcal{X}_{i+1}+1)^{-1}\right] = 1, \quad i = 2,3,\ldots, \quad \mathcal{X}_1 = 0. \tag{55}$$

Рассчитанные по формуле (55) значения величин $\mathcal{X}_i$ при различном числе точек привязки приведены в Табл. 1.

Таблица 1. Значения величин $\mathcal{X}_i$ при различном числе точек привязки.

X	m=2	m=3	m=4	m=5	m=6	m=7	m=8	m=9
X_0	0	0	0	0	0	0	0	0
X_1		1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	1/7
X_2				1	2/3	1/2	2/5	1/3
X_3						1	3/4	3/5

4. АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ СМОЛУХОВСКОГО ЭМПИРИЧЕСКИМИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ

Подход Пирсона. Рассмотрим теперь подход Пирсона к описанию распре-

делений, основанный на отыскании семейства кривых, при помощи которого можно удовлетворительно представить встречающиеся на практике распределения. На Рис. 3 представлены графики для определения типа кривой Пирсона в зависимости от параметра β_1, измеряющего отношение асимметрии распределения к мере рассеяния, и параметра β_2, являющегося относительным показателем эксцесса. Эти графики заимствованы из работ (Крамер, 1948; Elderton, 1953; Кендал, Стьюарт,1966).

Пирсон предложил для описания статистического распределения $f(x)$ случайной величины x использовать решения дифференциального уравнения

$$\frac{df}{dx} = -\frac{(x-a)f}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2}. \tag{56}$$

Семейство плотностей, определяемых этой формулой, известно под названием «семейства распределений Пирсона». Если иметь в виду унимодальные распределения, то представляется интересным изучить тот класс плотностей, которые: (а) имеют единственную моду, т. е. $df/dx = 0$ в некоторой точке $x = a,$ где $a-$ мода; (б) имеют гладкое соприкосновение с осью x на концах интервала, где сосредоточено распределение, т. е. $df/dx = 0$, когда $f = 0$. Нетрудно видеть, что, вообще говоря, решения уравнения (56) удовлетворяют этим условиям. Следует заметить, что среди распределений семейства (56) существуют и такие распределения, которые имеют J- и U-образную форму.

Прежде чем переходить к нахождению семейства точных решений уравнения (56), рассмотрим некоторые свойства, присущие этому семейству в целом. Имеем: $x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)\frac{df}{dx} = x^n(x-a)$. Интегрируя левую часть этого уравнения по частям и предполагая, что полученные интегралы существуют, получим

$$\left[x^n(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)f\right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty}\left(nb_0 x^{n-1} + (n+1)b_1 x^n + (n+2)b_2 x^{n+1}\right)fdx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x^{n+1} fdx - a\int_{-\infty}^{\infty} x^n fdx. \tag{57}$$

Предположим теперь, что выражение в квадратных скобках обращается в нуль на концах распределения $\lim\limits_{f\to\pm\infty} x^{n+2} f \to 0$ или что распределение имеет беско-

нечный диапазон. Тогда, пользуясь обозначениями (11) для моментов относительно нуля, будем иметь

$$nb_0 m_{n-1} + \{(n+1)b_1 - a\}m_n + \{(n+2)b_2 + 1\}m_{n+1} = 0. \qquad (58)$$

Это уравнение позволяет выразить четыре константы a, b_0, b_1 и b_2 через моменты m_1, m_2, m_3, m_4 или через три момента (13), взятых относительно среднего: μ_2, μ_3, μ_4. Полагая в (58) последовательно $n = 0, 1, 2, 3$, можно найти следующие соотношения:

$$a = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'},$$

$$b_0 = -\frac{\mu_2(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2)}{A} = -\frac{\mu_2(4\beta_2 - 3\beta_1)}{A'},$$

$$b_1 = -\frac{\mu_3(\mu_4 + 3\mu_2^2)}{A} = -\frac{\sqrt{\mu_2}\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{A'},$$

$$b_2 = -\frac{(4\mu_2\mu_4 - 3\mu_3^2 - 6\mu_2^3)}{A} = -\frac{(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)}{A'}, \qquad (59)$$

где

$$A \equiv 10\mu_2\mu_4 - 18\mu_2^3 - 12\mu_3^2, \qquad A' \equiv 10\beta_2 - 18 - 12\beta_1, \qquad (60)$$

а параметры β_1 и β_2 определяются формулами (14) и (16). В этих формулах нулевое значение принято в качестве среднего, так что распределения семейства (56) полностью определяются своими четырьмя первыми моментами.

Семейство кривых Пирсона, удовлетворяющее уравнению (56), приведено в Табл. 2.

Из уравнения (56) следует, что мода равна $x = a$. Из (59) следует, что для пирсоновской меры асимметрии (*skewness*) имеем

$$Sk \equiv \frac{-a}{\sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\beta_1}(\beta_2 + 3)}{10\beta_2 - 12\beta_1 - 18}. \qquad (61)$$

Далее, если $a = 0$, то

$$d^2 f / dx^2 = f(b_0 - b_2 x^2)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2)^{-2},$$

поэтому точки перегиба графика плотности распределения $f(x)$ определяются формулой $x^2 = b_0 / b_2$. Следовательно, у плотности из семейства Пирсона существует не более чем две точки перегиба, и если их действительно две, то они

отстоят от моды на одинаковом расстоянии. В общем случае может случиться, что одна из точек перегиба находится вне области, где сосредоточено распределение. Семейство кривых Пирсона, удовлетворяющее уравнению (56), приведено в Табл. 2.

***Таблица* 2**. Плотности распределений из семейства Пирсона

ТИП УРАВНЕНИЯ	НАЧАЛО ОТСЧЁТА ДЛЯ x	ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ
I. Бета-распределение $f(x)=f_0\left(1+\frac{x}{a_1}\right)^{m_1}\left(1-\frac{x}{a_2}\right)^{m_2}$	Мода	$-a_1<x<a_2$
II. $f=f_0\left(1-x^2/a^2\right)^m$	Мода (среднее)	$-a<x<a$
III. Гамма-распределение $f=f_0e^{-\gamma x}\left(1-x/a\right)^{\gamma a}$	Мода	$-a<x<\infty$
IV. Распределение Пирсона четвёртого типа $f=f_0e^{-\gamma\, arctg\, x/a}\left(1+\frac{x^2}{a^2}\right)^{-m}$	Среднее $+\nu a/(2m-2)$	$-\infty<x<\infty$
V. $f=f_0e^{-\gamma/x}x^{-p}$	Начало кривой	$0<x<\infty$
VI. Распределение Пирсона шестого типа $f=f_0(x-a)^{q_2}x^{-q_1}$	Точка, отстоящая на $\lvert a\rvert$ от начала кривой	$a<x<\infty$
VII. $f=f_0\left(1+x^2/a^2\right)^{-m}$	Среднее (мода)	$-\infty<x<\infty$

Дискриминант знаменателя в уравнении (56) равен: $D=b_1^2(1-\kappa^{-1})$, где

$$\kappa=b_1^2/4b_0b_2=\frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)} \tag{61}$$

− «каппа Пирсона». Общий интеграл уравнения (56) зависит от вида корней квадратного уравнения $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 = 0$ и определяется параметром κ-критерием Пирсона и дополнительными параметрами:

$$a \equiv 2\beta_2 - 3\beta_1 - 6), \quad c \equiv 8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 = 0, \quad d \equiv \beta_2 - \beta_1 - 1 < 0$$

В Табл. 3 приведены типы кривых Пирсона и соответствующие им критерии, а так же границы области кривых Пирсона. Граница 1 – это верхняя граница всех распределений, а граница 0 – граница кривых Пирсона.

Таблица 3. Типы кривых Пирсона и соответствующие им критерии.

Тип кривой	Граница 0	I	II	III	IV	V	VI	VII	Граница 1
Критерии		$\kappa < 0$	$\kappa = 0$	$\kappa = \pm\infty$	$0 < \kappa < 1$	$\kappa = 1$	$\kappa > 1$	$\kappa = 0$	
	$d < 0$		$\beta_2 < 3$	$a = 0$				$\beta_2 > 3$	$c \geq 0$ $\mu_3 = \infty$

Таким образом, если вдоль осей прямоугольной системы координат условиться откладывать отрезки, отвечающие величинам β_1 и β_2, то в плоскости $\beta_2 0 \beta_1$ различным типам кривых Пирсона будут соответствовать области, кривые и точки.

На Рис.3. указано такое разбиение плоскости $\beta_2 0 \beta_1$ для основных типов кривых Пирсона I-VII. Прямая линия с уравнением $d \equiv \beta_2 - \beta_1 - 1 = 0$ представляет собой верхнюю границу для допустимых точек (β_2, β_1), так как не существует распределений, для которых $d < 0$. Кроме этого, если кривая принадлежит семейству Пирсона, причём $c \equiv 8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 \geq 0$, то $\mu_3 = \infty$. На Рис.3 прямая с уравнением $c = 0$ служит нижней границей точек с координатами (β_2, β_1).

Заметим, что наиболее типичная колоколообразная форма кривой типа I наблюдается тогда, когда m_1 и m_2 положительны (см. область I на Рис.3): для J-образного бета-распределения (см. область I(J)) один из этих показателей отрицателен. Если же m_1 и m_2 оба отрицательны, то бета-распределение имеет U-образную форму (см. на Рис.3 область I(U)).

− Граница области I(J) задаётся уравнением

$$4(4\beta_2 - 3\beta_1)(5\beta_2 - 6\beta_1 - 9)^2 = \beta_1(\beta_2 + 3^2)(8\beta_2 - 9\beta_1 - 12).$$

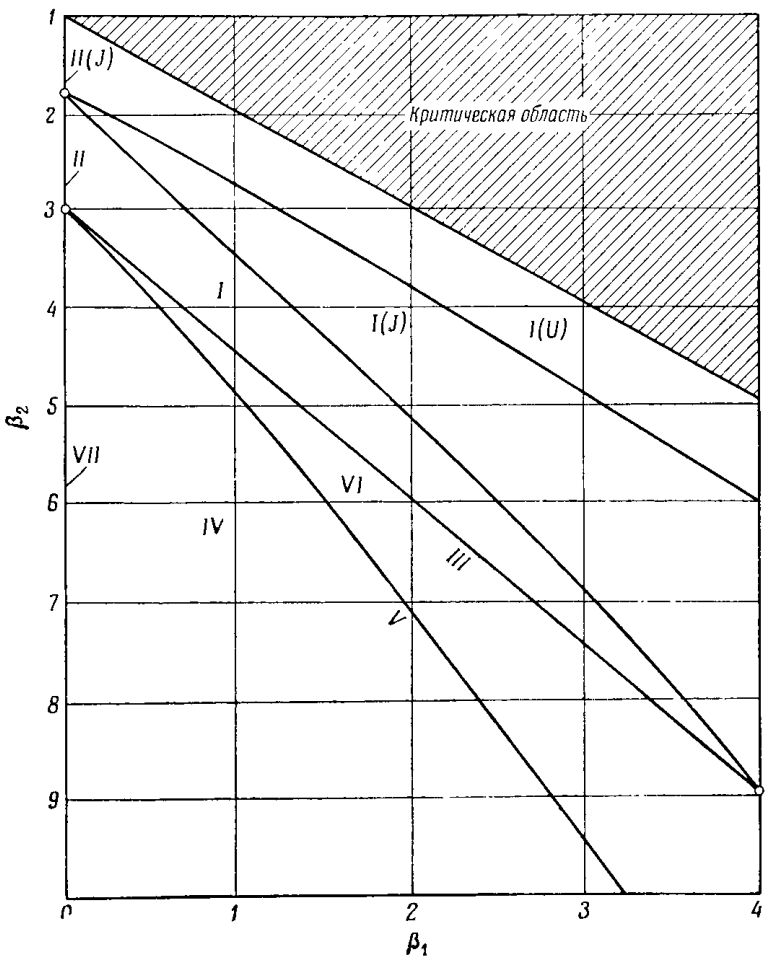
– Линия III типа: $2\beta_2 - 3\beta_1 - 6 = 0$.

– Линия V типа: $\beta_1(\beta_2 + 3)^2 = 4(4\beta_2 - 3\beta_1)(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)$.

– Линия, ниже которой (а также на ней самой) для всех кривых Пирсона:

$$\mu_8 = \infty,\ 8\beta_2 - 15\beta_1 - 36 = 0.$$

Было установлено (см.), что пирсоновские распределения нередко хорошо соответствуют результатам наблюдений. Другое достоинство этих распределений (в частности, распределений I и III типов) состоит в том, что ими можно с хорошей точностью приближать теоретические распределения, зная их моменты. Систематическое изложение техники подбора аппроксимирующих распределений было дано Элдертоном (Elderton,1953).



Все распределения Пирсона определяются своими четырьмя первыми моментами за исключением распределений, задаваемых меньшим количеством моментов. Пирсоновский метод подгонки состоит в следующем:

1. определяются первые четыре момента для эмпирического распределения, отвечающие результатам наблюдений;

2. вычисляются значения β_1 и β_2 и величина к (см. (61)), и, следовательно, определяется тип распределений;

Рис. 3 Графики для определения типа кривой Пирсона в зависимости от β_1 и β_2.

3. эмпирические моменты приравниваются моментам подходящего распределения, которые выражены в терминах его параметров;

4. полученные уравнения разрешаются относительно неизвестных пара-

метров и, следовательно, находится искомое распределение (см. Большев, Смирнов, 1983).

Следующий пример иллюстрирует этот процесс.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ РЕШЕНИЯ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Схему вычисления моментов решения разберём на примере кинетического уравнения (1) с ядром коагуляции

$$\mathcal{K}(v,w) = \mathcal{G} v^{\alpha} w^{\alpha} . \tag{62}$$

Подставляя (62) в (21) и учитывая (44), получим следующую систему уравнений для определения первых пяти моментов решения кинетического уравнения

$$\frac{d}{d\tau} m'_0 = B_0 (m'_\alpha)^2 , \quad \frac{d}{d\tau} m'_1 = 0 , \quad \frac{d}{d\tau} m'_2 = B_2 (m'_{1+\alpha})^2 ,$$

$$\frac{d}{d\tau} m'_3 = B_3 m'_{1+\alpha} m'_{2+\alpha} , \quad \frac{d}{d\tau} m'_4 = B_4 m'_{1+\alpha} m'_{3+\alpha} + B_5 (m'_{2+\alpha})^2 \tag{63}$$

где дифференцирование проводится по $\tau = G m_1^{2\alpha} t$. Здесь

$$B_0 = -\frac{1}{2} m_1^{-2\alpha} m_0^{-1}(0) m_{1+\alpha}^2(0) , \quad B_2 = m_1^{-2\alpha} m_2^{-1}(0) m_{1+\alpha}^2(0) ,$$

$$B_3 = 3 m_1^{-2\alpha} m_{1+\alpha}(0) m_{2+\alpha}(0) m_3(0) \quad B_4 = 4 m_1^{-2\alpha} m_{1+\alpha}(0) m_{3+\alpha}(0) m_4^{-1}(0) ,$$

$$B_5 = 3 m_1^{-2\alpha} m_{2+\alpha}^2(0) m_4^{-1}(0) \tag{64}$$

Для случая двухточечной интерполяции дробных моментов через целые доопределяющие уравнения для системы (63) можно записать в виде (Логунов, 1979)

$$m'_\alpha = (m'_0)^{1-\alpha} , \quad m'_{1+\alpha} = (m'_2)^{\alpha} ,$$

$$m'_{2+\alpha} = (m'_2)^{1-\alpha} (m'_3)^{\alpha} , \quad m'_{3\alpha} = (m'_{3+\alpha})^{1-\alpha} (m'_4)^{\alpha} . \tag{65}$$

Подставляя (65) в (63), получим

$$\frac{d}{d\tau} m'_0 = B_0 (m'_0)^{2(1-\alpha)} , \quad \frac{d}{d\tau} m'_1 = 0 , \quad \frac{d}{d\tau} m'_2 = B_2 (m'_2)^{2\alpha} , \quad \frac{d}{d\tau} m'_3 = B_3 m'_2 (m'_3)^{\alpha} ,$$

$$\frac{d}{d\tau} m'_4 = B_4 (m'_2)^{\alpha} (m'_3)^{1-\alpha} (m'_4)^{\alpha} + B_5 (m'_2)^{1-\alpha} (m'_3)^{2\alpha} . \tag{66}$$

Первые четыре уравнения имеют аналитические решения, которые можно записать в виде:

при $\alpha = 1/2$

$$m_0' = exp(B_0\tau),\ \ m_1' = 1,\ \ m_2' = exp(B_2\tau),$$

$$m_3' = \left[1 + (B_3 / 2B_2)exp(B_2\tau)\right]^2; \qquad (67^*)$$

при $\alpha \neq 1/2$

$$m_0' = \left[1 + (2\alpha - 1)B_0\tau\right]^{-1/(1-2\alpha)},\ \ m_1' = 1,\ \ \ m_2' = \left[1 + (2\alpha - 1)B_2\tau\right]^{1/(1-2\alpha)},$$

$$m_3' = \left\{1 + \frac{B_3}{2B_2}\left[\left(1 + \frac{B_2\tau}{1-2\alpha}\right)^{2(1-\alpha)/(1-2\alpha)} - 1\right]\right\}^{1/(1-\alpha)}. \qquad (67^{**})$$

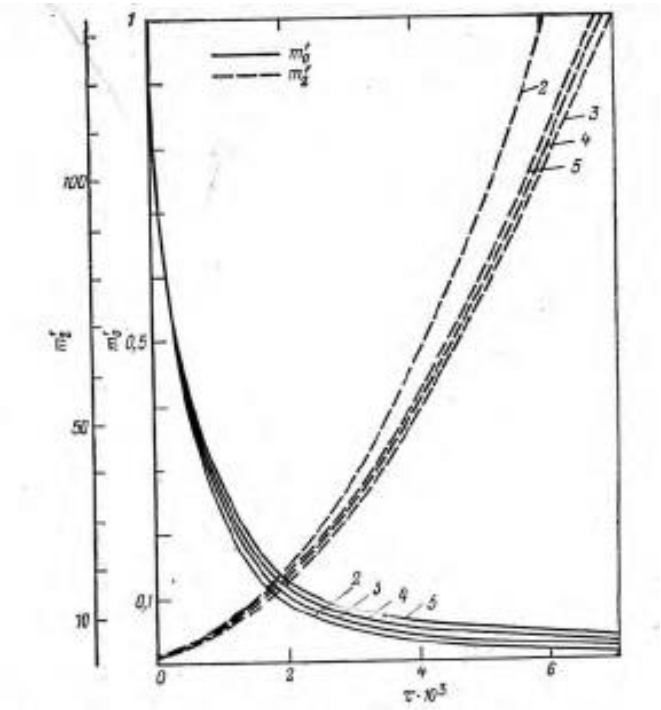


Рис.4 Зависимость $m_0'(\tau)$ и $m_2'(\tau)$

Номер кривой соответствует порядку интерполяционной схемы при оценке дробных моментов (Логунов,1979).

Графики $m_0'(\tau)$ и $m_2'(\tau)$, рассчитанные при $\alpha = 1/4$ и различных порядках интерполяционных схем, применяемых для выражения дробных моментов через целые, приведены на Рис.4. Для интерполяционных схем выше второго порядка эти зависимости были определены численно. Все расчёты проведены в предположении, что $m_1 = 1/100$, а начальная плотность распределения частиц по размерам является гамма- распределением

$$p(v,0) = \frac{\lambda^\beta}{\Gamma(\beta)} v^{\beta-1} exp(-\lambda v), \quad при \quad \lambda = 4 \cdot 10^9,\ \beta = 2), \qquad (68)$$

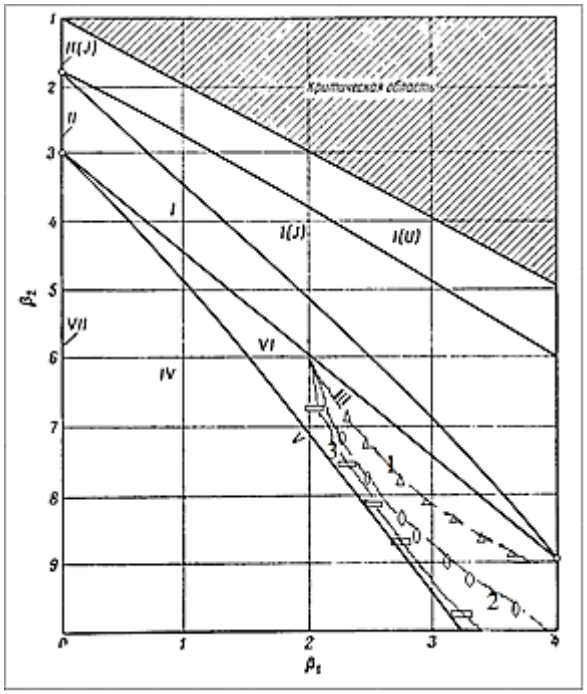
причём начальные значения моментов определялись как

$$m_\gamma(0) = \Gamma(\beta + \gamma) / \lambda^\gamma \Gamma(\beta). \qquad (69)$$

По первым пяти моментам решения можно сделать параметрическую оценку самого решения на основе диаграммы Пирсона, построенных в координатах квадрата асимметрии β_1 и эксцесса β_2 оцениваемого распределения

$$\beta_1 = \left[\mu_3' / (\mu_2')^{3/2}\right]^2, \quad \beta_2 = \mu_4' / (\mu_2')^2, \quad \mu_i' = \int_0^\infty (v - \overline{v})^i p(v) dv . \qquad (70)$$

На Рис. 5 представлена диаграмма Пирсона для классических распределений, на которой нанесены годографы точек с координатами $\beta_1(\tau)$ и $\beta_2(\tau)$, рассчитанные для ядра вида (62) при $\alpha = 0$, $\alpha = 1/4$ и $\alpha = 1/2$ и начальном условии (68).



Чтобы решить, какое из семейств распределений Пирсона аппроксимирует искомое распределение, нужно использовать годограф совокупности параметров $\beta_1(\tau)$ и $\beta_2(\tau)$. В нашем случае точки β_1, β_2 лежат в области, ограниченной графиками кривых гамма-распределения и логнормального распределения (см Рис. 2). Следовательно, для описания экспериментальных данных нужно выбрать семейство распределений Пирсона III.

Рис.5. Диаграмма Пирсона с годографами решений кинетического уравнения соответствующих ядрам (62) при 1- $\alpha = 0$; 2- $\alpha = 1/4$; 3- $\alpha = 1/2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Изучение проблемы происхождения и эволюции Солнечной системы, возникновения разнообразных природных условий на Земле и других планетах представляет одно из важнейших направлений современного естествознания. Её решение связано с проведением комплекса исследований по самым актуальным вопросам астрофизики, геофизики и космохимии на основе развития теории, обобщения и анализа экспериментальных данных и разработки математических моделей.

Данная работа является необходимым звеном в ряду проводимых нами исследований (см. Список литературы), посвящённых математическим аспектам

гидродинамического моделирования допланетного газопылевого облака, в процессе эволюции которого формируются и взаимодействуют друг с другом разномасштабные пылевые фрактальные агломераты, служащие, в конечном счёте, основой зародышей рыхлых протопланетезималей. Поскольку строгое решение задачи образования и эволюции фрактальных кластеров включает одновременно с оценкой их скоростей также и определение функции распределения (спектра) кластеров по размерам (т.е. решение обобщённого нелинейного пространственно-неоднородного кинетического уравнения Смолуховского), то в ряде наших работ были получены практически важные модели для ядер коагуляции фрактальных кластеров. При этом были рассмотрены две группы моделей образования кластеров в дисковой фрактальной среде. К первой группе моделей ядер коагуляции относятся модели, обусловленные прилипанием мономеров к кластеру; при этом учитывался связанный с характером движения отдельного мономера, переход от кинетического режима к диффузионному. Ко второй группе моделей относятся модели, описывающие рост фрактальных агрегатов в результате ассоциации двух кластеров. Поскольку алгебраические выражения для коэффициентов коагуляции фрактальных кластеров (в частности, коэффициентов мономер-кластерной коагуляции и кластер-кластерной коагуляции) существенно усложняются по сравнению с их видом в континуальной коагулирующей среде, то это обстоятельство существенно затрудняет решение кинетического уравнения Смолуховского, моделирующего процессы аккумуляции допланетных тел. По этой причине требуется разработка подхода, позволяющего находить эмпирические распределения допланетных тел по размерам, когда имеются лишь отдельные данные о параметрах стохастической коагулирующей системы.

В представленной статье рассмотрен подход к решению уравнения столкновительной коагуляции Смолуховского с произвольными ядрами коагуляции, который может быть полезным в тех случаях, когда необходимо знание только общих свойств функции распределения допланетных тел по размерам. Этот подход включает в себя решение конечного числа связанных между собой дифференциальных уравнений для целых моментов функции распределения пылевых агломератов по размерам. Преимущество метода моментов состоит в том, что он позволяет значительно сэкономить вычислительное время по сравнению с прямым численным решением кинетического уравнения коагуляции, которое требует отслеживания размеров для каждого допланетного тела в каждом пространственно-временном интервале.

В работе рассмотрен подход, позволяющий находить подходящее распре-

деление допланетных тел, когда имеются лишь ограниченные данные о характеристиках коагулирующей газопылевой системы. Такие аппроксимационные распределения можно получить в тех случаях, когда теоретически найдено конечное число моментов распределения, причём точный вид искомого распределения заранее неизвестен. Подбор аппроксимирующих распределений по известным моментам функции распределения имеет долгую историю. В данной работе аппроксимацию эмпирическими распределениями искомого распределения предложено выполнять с помощью кривых Пирсона.

Решение поставленной задачи базируется на приближённых методах получения моментов системы, которые позволяют найти центральные моменты, а затем и параметры кривых Пирсона. Проводится сравнение этих методов и обсуждается практическая применимость каждого из них. При рассмотрении методов получения моментов стохастической системы приводятся выражения, позволяющие оценить среднее расстояние, симметрию и островершинность вероятностного распределения частиц по размерам. Эти выражения используются затем при подборе эмпирических моделей по диаграмме Пирсона.

Полученные результаты открывают возможности создания усовершенствованных (и более приближённых к реальности) моделей эволюции газопылевого облака, обеспечивая тем самым новый подход в решении ключевой проблемы звёздно-планетной космогонии, связанной с объяснением процесса роста межзвёздных пылевых частиц до крупных планетезималей.

Работа выполнена при частичной поддержке Программы Президиума РАН № 28 и гранта РФФИ № 18-01-00064.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики.- М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1983. 416 с.

Волощук В. М., Седунов Ю. Процессы коагуляции в дисперсных средах. М.: Гидрометеоиздат. 1975. 320 с.

Волощук В.М. Кинетическая теория коагуляции. М.: Гидрометиздат. 1984. 283 с.

Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Физматгиз. 1963. 664 с.

Кендал М. Дж., Стьюарт А. Теория распределений. Пер. с англ. / Под ред. А. Н. Колмогорова. М.: Наука. 1966. 588 с.

Колесниченко А.В. Проблемы моделирования процессов массопереноса и коагуляции в допланетном газопылевом облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2000. № 41. 30 с.

Колесниченко А.В. О синергетическом механизме возникновения когерентных структур в континуальной теории развитой турбулентности// Астрон. вестн. 2004. Т. 38. № 5. С. 405-427.

Колесниченко А.В. О роли индуцированных шумом неравновесных фазовых переходов в структурировании гидродинамической турбулентности// Астрон. вестн. 2005. Т. 39. № 3. С. 243-262.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых прото-планетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014a. № 75. 44 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Турбулентность и самоорганизация. Проблемы моделирования космических и природных сред. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2014b. 632 с.

Крамер Г. Математические методы статистики. –М.: ИЛ. 1948. 648 с.

Левин Б. Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.: Советское радио. 1974. 656 с.

Логунов В.И. Динамика процессов дробления капельной жидкости в турбулентном потоке // ПМТФ. 1985. № 4. С. 66-73.

Логунов В.И. Обезвоживание и обессоливание нефтей. М.: Химия. 1979. 216 с.

Попель А. С., Регирер С. А., Шадрина Н.Х. // Прикл. математика и механика. 1975. Т. 39, С. 131-143.

Сафронов В.С. О гравитационной неустойчивости в плоских вращающихся системах с осевой симметрией // ДАН СССР. 1960. Т. 130. № 1. С. 53-56.

Сафронов В.С. Эволюция допланетного облака и образование Земли и планет. М.: Наука. 1969. 244 с.

Синайский Э. Г. Гидродинамика физико-химических процессов. М.: Недра 1997. 339 с.

Barrett J.C., Jheeta, J.S. Improving the Accuracy of the Moments Method for Solving the Aerosol General Dynamic Equation // J. Aerosol Sci. 1996. V. 27. P. 1135-1142.

Barrett J.C., Webb N.A. A Comparison of Some Approximate Methods for Solving the Aerosol General Dynamic Equation // J. Aerosol Sci. 1998. V. 29. P. 31-39.

Blum J. Grain growth and coagulation. In ASP Conf. Ser. Vol.309, Astrophysics of Dust, ed. A.N. Witt, G.C. Clayton and B.T. Draine (San Francisco: ASP). 2004. P. 369-391.

Chan T.L., Lin J.Z., Zhou K., Chan C.K. Simultaneous Numerical Simulation of Nano and Fine Particle Coagulation and Dispersion in a Round Jet // J. Aerosol Sci. 2006. V. 37. P. 1545-1561.

Dubrulle B., Morfill G., Sterzik M. The dust subdisk in the protoplanetary nebula// Icarus. 1995. V. 114. P. 237-246.

Elderton W.P. Frequen curves and correlation. Cambridg Univerrsity Press. 1953.290 p.

Goldrich P., Ward W.R. The formation of planetesimals// Astrophys. J. 1973. V. 183. № 3. P. 1051-1061.

Hahn G.J., Shapiro S.S. Statistical models in engineering. New York, Wiley 1967.376 p. (Russ. ed.: ***Хан Г., Шапиро С.*** Статистические модели в инженерных задачах М.: Изд. «МИР». 1969. 395 с.)

Frenklach M. Method of Moments with Interpolative Closure // Chem. Engineer. Sci. 2002. V. 57. P. 2229-2239.

Frenklach M., Harris S. J. Aerosol Dynamics Modeling Using the Method of Moments // J. Coll. Interface Sci. 1987. V. 118. P. 252-261.

Kolesnichenko A. V. Hydrodynamic Aspects of Modeling of the Mass Transfer and Coagulation Processes in Turbulent Accretion Disks // Solar System Research. 2001. V. 35. № 2. P. 125-140.

Kolesnichenko A. V., Marov M. Ya. Fundamentals of the Mechanics of Heterogeneous Media in the Circumsolar Protoplanetary Cloud: The Effects of Solid Particles on Disk Turbulence // Solar System Research. 2006. V. 40. № 1. P. 1-56.

Lee K.W. Change of Particle Size Distribution during Brownian Coagulation // *J.* Colloid Interface Sci. 1983. V. 92. № 2. P. 315-325.

Marchisio D. L., Fox R. O. Solution of population balance equations using the direct quadrature method of moments // J. Aerosol Sci. 2005. V. 36. P. 43-73.

Marov M. Ya., Kolesnichenko A. V. Mechanics of Turbulence of Multicomponent Gases. Kluwer Academic Publishers. 2001. 375 p.

Marov M.Ya., Kolesnichenko A.V. Turbulence and Self-Organization. Modeling Astrophysical Objects. Springer. 2013. 657 p.

McGraw R. Description of aerosol dynamics by the quadrature method of moments // Aerosol Sci. Technol. 1997. V. 27. P. 255-265.

Mingzhou Yu., Jianzhong Lin., Tatleung C. A. New Moment Method for Solving the Coagulation Equation for Particles in Brownian Motion // Aerosol Science and Technology. 2008. V. 42. P. 705-713.

Nakagawa Y., Nakazawa K., Hayashi C. Growth and sedimentation of dust grains in the primordial solar nebula // Icarus. 1981. V. 45. P. 517-528.

Nakagawa Y., Hayashi C., Nakazawa K. Accumulation of planetesimals in the solar nebula // Icarus. 1983. V. 54. P. 361-376.

Nakagawa Y., Sekiya M. Hayashi C. Settling and growth of dust particles in a laminar phase of a low-mass Solar nebula// Icarus. 1986. V. 67. P. 375-390.

Nakamoto T., Nakagawa Y. Formation, early evolution, and gravitational stability of protoplanetary disks// Astrophys. J. 1994. V. 421. P. 640-651.

Okuzumi S., Tanaka H., Takeuchu T., Sakagami M.-A. Electrostatic barrier against dust growth in protoplanetary disks.1. Classifying the evolution of size distribution // ApJ. 2011. V. 731. P. 95-115.

Ormel C. W., Spaans M., Tielens A. G. G. M. Dust coagulation in protoplanetary disks: porosity matters// Astron. Astrophys. 2007. V. 461. P. 215-236.

Pearson E. S., Hartley H.O. Biometrika Tables for Statisticians, V.I. Cambridge University Press. Cambridge. 1954. 25 p.

Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P. Numerical Recipes in Fortran: 2 nd edition/ Cambridge University Press. 1992. 994 p.

Smoluchowski M. V. Experiments on a mathematical theory of kinetic coagulation of colloid solutions // Z. Phys. Chem.-Stochiometrie und Verwandtschaftslehre 1917. V. 92. P. 129-68.

Suyama T., Wada K., Tanaka H. Numerical simulation of density evolution of dust aggregates in protoplanetary disks. I. Head-on collisions// Astroph. J. 2008. V. 684. P .1310-1322.

Suyama T., Wada K., Tanaka H., Okuzumi S. Geometrical cross sections of dust aggregates and a compression model for aggregate collisions // arxiv:1205.1894vl [astro-ph. EP]. 2012. 28 P.

Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media// Annls of Physics. 2005. V. 318. № 2. P. 286-307.

Tarasov V.E. Fractional dynamics: Applicationsof fractional calculus to dynamics of particles, fields and media // Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

Wada K., Tanaka H., Suyama T., Kimura H., Yamamoto T. Simulation of dust aggregate collisions. ii. compression and disruption of three-dimensional aggregates in head-on collisions // Astrophys. J. 2008. V. 677. P. 1296-1308.

Weidenschilling S.J. Dust to planetesimals: Settling and coagulation in the solar nebula// Icarus. 1980. V. 44. P. 172-189.

Youdin A.N., Shu F. Planetesimal formation by gravitational instability// Astrophys. J. 2002. V. 580. P. 494-505

Yu M. Z., Lin J. Z., Chan T. L. A new moment method for solving the coagulation equation for particles in Brownian motion // Aerosol Sci. Technol. 2008.V. 42. P. 705-713.

Yu M. Z., Lin J., Jin H., Jiang Y. The verification of the Taylor-expansion moment method for the nanoparticle coagulation in the entire size regime due to Brownian motion // J. Nanopart. Res. 2011. V. 13. P. 2007-2020.

Оглавление

Введение 3
1. Решение уравнения Смолуховского методом моментов 5
2. Параметрические методы 11
3. Непараметрические методы 18
4. Аппроксимация решения уравнения Смолуховского эмпирическими распределениями 21
5. Вычисление моментов решения кинетического уравнения 27
Заключение 29
Список литературы 31