ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 152 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Бахвалов П.А., Дубень А.П., Козубская Т.К., Родионов П.В.

EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания / П.А.Бахвалов [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 152. 22 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2019-152
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-152

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

П.А. Бахвалов, А.П. Дубень, Т.К. Козубская,
П.В. Родионов

EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания

Москва — 2019

П.А. Бахвалов, А.П. Дубень, Т.К. Козубская, П.В. Родионов

EBR схемы с криволинейными реконструкциями для решения двумерных задач внешнего обтекания

Работа посвящена развитию вершинно-центрированных EBR схем для расчета задач аэродинамики. Предлагается оснастить данные схемы возможностью криволинейной реконструкции переменных в пристеночных областях сетки. В рассматриваемом в препринте двумерном случае использование криволинейных реконструкций приводит к естественной трансформации EBR схемы в структурированный конечно-объёмный метод. Показывается преимущество такого подхода при численном моделировании задач внешнего обтекания. В качестве тестовой задачи рассматривается двумерное стационарное обтекание профиля NACA0012. Валидация нового алгоритма проводится путем сравнения с известными экспериментальными данными, а также результатами расчетов других авторов. Применение криволинейных реконструкций приводит к улучшению устойчивости алгоритма и повышению точности численных результатов.

Ключевые слова: EBR схема, квазиодномерная реконструкция, криволинейная реконструкция, пограничный слой, задача внешнего обтекания

P.A. Bakhvalov, A.P. Duben, T.K. Kozubskaya, P.V. Rodionov

EBR schemes with curvilinear reconstructions for solving two-dimensional external flow problems

This paper is devoted to the development of vertex-centered EBR schemes for numerical simulation of aerodynamics problems. We propose to equip these schemes with the curvilinear reconstructions in the boundary layer region. In the considered two-dimensional case, the curvilinear reconstructions provide the natural transformation of EBR scheme into a structured finite-volume method. The advantage of this approach for numerical simulations of external flows is shown. As a test case, two-dimensional stationary flow around the NACA0012 profile is considered. Validation of the new algorithm is carried out by comparison with the known experimental data and the numerical results obtained by other authors. The involvement of curvilinear reconstructions improves the algorithm stability and accuracy.

Keywords: EBR scheme, quasi-one-dimensional reconstruction, curvilinear reconstruction, boundary layer, external flow problem

Работа выполнена в рамках Проекта РФФИ 18-01-00445 с использованием оборудования Центра коллективного пользования сверхвысокопроизводительными вычислительными ресурсами МГУ имени М.В. Ломоносова.

Введение

При моделировании турбулентных течений в задачах внешнего обтекания естественным образом возникает необходимость адекватно разрешать формирующиеся пограничные слои, корректное моделирование которых критично для правильного воспроизведения течения в целом. Подробное сеточное разрешение необходимо, в первую очередь, в нормальном направлении по отношению к стенке обтекаемого объекта при сгущении сетки к поверхности. В продольном направлении значения переменных изменяются более плавно, а потому шаг сетки в этом направлении может быть существенно большим. Такой особенности приграничного турбулентного течения оптимальным образом отвечают слои анизотропной сетки, окружающие обтекаемое тело. При использовании таких сеток на протяженных участках обтекаемого объекта течение направлено вдоль разделяющих слои криволинейных поверхностей или, в двумерном случае, линий. В мировой литературе они получили название *strand*-сеток, то есть сеток, полученных протягиванием поверхностной сетки по нормальному направлению [1].

Учёт особенностей пристеночного течения и наличия структуры сетки в пристеночной области в используемом численном методе может существенным образом повысить точность моделирования. Особенно это касается методов, использующих пространственные аппроксимации переменных на расширенных шаблонах.

В работе рассматриваются алгоритмы, основанные на использовании вершинно-центрированных EBR (Edge-Based Reconstruction) схем для неструктурированных сеток [2]. Повышенная точность данных схем обеспечивается за счет реконструкций потоковых переменных на расширенных реберно-ориентированных шаблонах, а их экономность – за счёт квазиодномерной природы такого подхода. EBR схемы, изначально разработанные для произвольных тетраэдральных сеток, допускают обобщение

на гибридные неструктурированные сетки [3]. Однако на криволинейной структурированной сетке при большой степени анизотропии их использование может приводить как к снижению точности, так и к неустойчивости счета. В настоящей работе исследуются причины таких негативных явлений. Для преодоления возникающих трудностей предлагается использование криволинейных реконструкций, учитывающих структуру сетки в пристеночной области. Ранее аналогичный подход был реализован для метода коррекции потока [4, 5].

Целью настоящей работы является реализация техники криволинейных реконструкций в рамках EBR схемы для двумерного случая, а также демонстрация преимуществ такого подхода на численном решении одной из классических валидационных задач об обтекании профиля NACA0012 [6].

1. Математическая модель и численный метод

Рассматривается система осредненных по Рейнольдсу уравнений Навье-Стокса (RANS, Reynolds-averaged Navier–Stokes), в которых тензор рейнольдсовых напряжений замкнут с помощью линейной модели турбулентности на основе гипотезы Буссинеска. В настоящей работе для проведения расчетов использовалась модель турбулентности Спаларта-Аллмараса (SA) [7], записанная относительно модифицированной турбулентной вязкости. Для определения коэффициента динамической вязкости воздуха используется закон Сазерленда.

Сформулируем уравнения Навье-Стокса в матрично-векторной форме

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}(\mathbf{Q}) = \nabla \cdot \mathcal{F}_v(\mathbf{Q}, \nabla \mathbf{Q}), \qquad \mathcal{F} = \left(\rho \mathbf{u}, \rho \mathbf{u}\mathbf{u} + p\mathbf{I}, \left(E + p\right)\mathbf{u}\right), \tag{1}$$

относительно консервативных переменных $\mathbf{Q} = \left(\rho, \rho \mathbf{u}, E\right)^T$. Здесь ρ – плотность, $\mathbf{u}$ – вектор скорости, p – давление, $\mathbf{I}$ – единичная матрица, E – полная энергия, $\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}_v$ – конвективные и диффузионные потоки соответственно.

Определим сеточную функцию $\mathbf{Q}_i$ в сеточных узлах. Диффузионные потоки $\mathcal{F}_v$ аппроксимируем методом Галёркина с кусочно-линейными базисными функциями (с диагонализированной матрицей масс). Тогда консервативную аппроксимацию уравнений (1) запишем в общем виде как

$$v_i\left(\frac{d\mathbf{Q}}{dt}\right)_i = -\sum_{j\in N_1(i)} \mathbf{h}_{ij}\left|\mathbf{s}_{ij}\right| + \Phi_i,$$

где v_i – объем дуальной ячейки, построенной вокруг узла i, Φ_i – аппроксимация вязких потоков, $N_1(i)$ – множество соседей первого уровня узла i, $\mathbf{h}_{ij}$ – численный поток, посчитанный как $\mathbf{h}_{ij} = \mathcal{F}_{ij}\mathbf{n}_{ij}$, $\mathbf{s}_{ij} = \int\limits_{\partial C_{ij}} \mathbf{n}\,ds$ – ориентированная площадь общей грани ячеек, соответствующих узлам i и j, $\mathbf{n}_{ij} = \mathbf{s}_{ij} / \left|\mathbf{s}_{ij}\right|$ – единичный вектор нормали. Конкретная реберно-ориентированная схема определяется методом вычисления потока $\mathbf{h}_{ij}$. Численный поток $\mathbf{h}_{ij}$ может быть вычислен, например, на основе приближенного метода решения задачи о распаде разрыва (в расчетах, представленных в настоящей работе, используется метод Роу), использующего предварительно вычисленные (реконструированные) значения потоковых $\mathbf{F}_{ij}^{L/R} = \mathcal{F}_{ij}^{L/R}\mathbf{n}_{ij}$ и/или консервативных $\mathbf{Q}_{ij}^{L/R}$ переменных слева и справа от грани ячейки (иначе говоря, предраспадных значений этих переменных). Для схем EBR семейства эти величины определяются при помощи квазиодномерных реконструкций вдоль прямой линии, проходящей через соответствующее ребро сетки. Реконструкции строятся таким образом, чтобы получающаяся схема трансформировалась в конечно-разностную схему высокого порядка на трансляционно-инвариантной сетке. Будем обозначать схему семейства EBR схемой EBRn, если в линейном случае ее порядок на трансляционно-инвариантных (равномерных решетчатых) сетках равен n.

На рис. 1 сверху схематично показан квазиодномерный реберно-ориентированный шаблон, который используется для вычисления потока $\mathbf{h}_{ij}$ на

треугольной неструктурированной сетке по схеме EBR5 (контуры соответствующих дуальных объемов нарисованы серым цветом). Реконструкции для нахождения предраспадных значений $\mathbf{Q}_{ij}^{L}$ и $\mathbf{Q}_{ij}^{R}$ строятся с помощью разделенных разностей с использованием соответственно точек {-2, 2} и {-1, 3}, полученных посредством пересечения прямой, задаваемой ребром *ij*, с изоповерхностями уровней соседства. Указанные точки, вообще говоря, не совпадают с сеточными узлами, поэтому для вычисления значений переменных в них используется линейная интерполяция. Операторы реконструкций для некоторой сеточной функции ψ в терминах разделенных разностей

$$\Delta_m^L = \frac{\psi_{m+1} - \psi_m}{\left|\mathbf{r}_{m+1} - \mathbf{r}_m\right|}, \qquad \Delta_m^R = -\Delta_{-m}^L$$

могут быть записаны как

$$\begin{aligned} R_{ij}^L\{\psi\} &= \psi_i + \frac{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|}{2}\sum_m \beta_m \Delta_m^L, \\ R_{ij}^R\{\psi\} &= \psi_j + \frac{\left|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\right|}{2}\sum_m \beta_m \Delta_m^R. \end{aligned} \tag{2}$$

В частности, при использовании коэффициентов β_{-2} = -1/15, β_{-1} = 11/30, β_0 = 4/5, β_1 = -1/10 получим реконструкции по схеме EBR5, а при использовании коэффициентов β_{-1} = 1/3, β_0 = 2/3, $\beta_{-2} = \beta_1 = 0$ – реконструкции по схеме EBR3.

Из верхнего рис. 1 видно, что в случае квазиравномерной треугольной неструктурированной сетки характерные расстояния между точками квазиодномерного шаблона не сильно отличаются друг от друга, поэтому при вычислении предраспадных значений не возникает каких-либо сложностей. Очевидно, что схема EBR проявляет свои лучшие свойства, когда вычислительная сетка близка к трансляционно-инвариантной с равномерными шаблонами реконструкции.

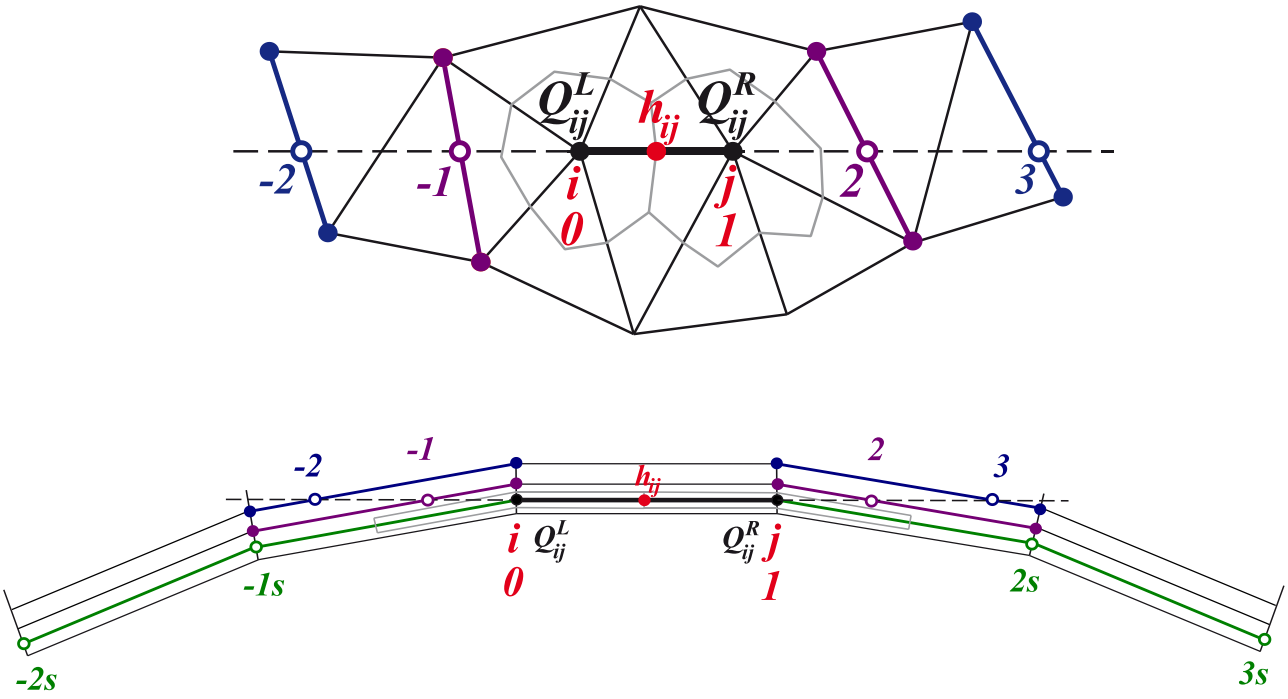


Рис. 1. Шаблоны EBR реконструкции вдоль ребра *ij* в случае квазиравномерной неструктурированной (вверху) и анизотропной структурированной сетки в пристеночной области (внизу)

На нижнем рис. 1 представлен характерный фрагмент вычислительной сетки, используемой в расчетах высокорейнольдсовых турбулентных течений возле криволинейной границы твердых тел. Она состоит из прямоугольников, сильно вытянутых вдоль границы тела. Шаг сетки в нормальном направлении к твердой поверхности оказывается существенно меньшим шага вдоль границы для корректного разрешения градиентов скорости в области тонких пограничных слоев. Отметим, что в реальных задачах, в том числе представленных в настоящей работе, характерные коэффициенты анизотропии (отношения шага сетки в тангенциальном направлении к нормальному) существенно больше по сравнению со слоистой сеткой, представленной на нижнем рис. 1. Здесь наглядно видны следующие недостатки оригинальной EBR схемы, обусловленные прямолинейным шаблоном квазиодномерной реконструкции. Во-первых, из-за направления прямой реконструкции,

параллельного касательной к поверхности тела, точки -2, -1, 2 и 3 шаблона аппроксимации оказываются в разных подобластях турбулентного пограничного слоя, а потому значения газодинамических величин в них могут сильно отличаться. Это может привести к существенной ошибке аппроксимации численного решения. Во-вторых, как можно заметить из нижнего рис. 1, характерные расстояния между точками шаблона (кроме точек *i* и *j*) могут оказаться в разы, а в реальных сетках на порядки, меньше длины ребра *ij*. Таким образом, сетка шаблона реконструкции может оказаться сильно неравномерной. Описанные обстоятельства могут приводить к некорректным предраспадным значениям и неустойчивости схемы в важных пристеночных областях течения.

В настоящей работе для решения указанных проблем предлагается использовать в приграничных областях криволинейные реконструкции, учитывающие структурированность сетки. В отличие от прямолинейных реконструкций, где выбор точек, по которым проводится реконструкция, обусловлен пересечением прямой, задаваемой ребром *ij*, с изоповерхностями уровней соседства, в криволинейных реконструкциях точки выбираются исходя из структурной смежности. Описанная разница проиллюстрирована на нижнем рис. 1, где шаблон прямолинейной реконструкции, помимо точек 0 и 1, включает точки {-2, -1, 2, 3}, а шаблон криволинейной реконструкции использует сеточные узлы {-2s, -1s, 2s, 3s}.

Что касается непосредственного вычисления реконструированных значений газодинамических переменных, для этого, как и в случае прямолинейных, так и криволинейных реконструкций, используются одни и те же формулы (2).

Таким образом, в работе предлагается новый, расширенный, вариант EBR схем, допускающий использование криволинейных реконструкций в структурированных областях сетки и переключающийся на прямолинейные реконструкции в неструктурированных регионах. При этом переключение от криволинейных шаблонов к прямолинейным происходит поэтапно путем встроенного в алгоритм анализа структурированности сетки в процессе

вычисления. Если при вычислении того или иного предраспадного значения не находится структурированного шаблона для выполнения криволинейной реконструкции схемы EBR5, то проводится проверка наличия укороченного криволинейного шаблона схемы EBR3. И лишь в случае отсутствия последнего происходит переключение на оригинальные прямолинейные реконструкции. Такой подход оказывается особенно эффективным при использовании в пристеночных областях *strand*-сеток.

При решении рассмотренной далее тестовой задачи о стационарном турбулентном течении около аэродинамического профиля для интегрирования по времени используется неявная схема первого порядка с линеаризацией разностной системы уравнений по Ньютону. Решение системы линейных алгебраических уравнений в рамках одной ньютоновской итерации осуществляется с помощью метода бисопряженных градиентов с ILU0 предобуславливателем.

2. Физическая постановка задачи

В качестве тестовой задачи в работе рассматривается задача об обтекании аэродинамического профиля NACA0012 [6]. Эта задача, с одной стороны, обладает довольно простой геометрией и, с другой, обладает доступной обширной базой экспериментальных и расчетных данных.

Постановка задачи формулируется следующим образом [6]. Профиль NACA0012 (рис. 2) с хордой единичной длины помещается в однородный поток воздуха со следующими физическими параметрами: $M_\infty = 0.15$, $T_\infty = 300$. Число Рейнольдса, посчитанное по длине хорды c, составляет $\mathrm{Re}_c = 6 \cdot 10^6$. В настоящей работе рассматриваются следующие углы атаки: α = 0°, 10° и 15°.

3. Вычислительная постановка задачи и сетки

При проведении расчетов предполагается, что фоновый поток характеризуется высоким уровнем турбулентности. Это обеспечивается

заданием на входе отношения турбулентной вязкости к молекулярной как $\nu_t/\nu = 1$.

Расчетная область представляет собой квадрат размером $-500 \le x/c,\ y/c \le 500$ с центром в точке (0,0), где находится передняя кромка профиля. На границе профиля задаются условия прилипания $\mathbf{u} = 0$, $\tilde{\nu} = 0$ и адиабатичности. На свободных границах задаются следующие условия: в случае входа держатся все параметры потока кроме давления, которое экстраполируется; в случае выхода, наоборот, держится только давление, а основные параметры экстраполируются из внутренней области.

Для проведения расчетов используется последовательность неструктурированных гибридных сеток, обозначаемых далее как cx (coarser ×; рис. 2), являющихся структурированными (состоящими из четырехугольников) вблизи профиля и неструктурированными (треугольными) в остальной области. Характерные размеры сеток приведены в таблице 1. Помимо сеток cx, для валидационных расчетов в настоящей работе используется структурированная сетка 897×257 (см. рис. 3 и таб. 1), применяющаяся в [6] для получения эталонных численных результатов.

Несмотря на то что в [6] дается последовательность разгрубляющихся структурированных сеток, построение сеток cx было обусловлено желанием экономии вычислительных ресурсов в ходе исследования. Так, размеры, например, сеток 897×257 и cx0.9 по количеству узлов различаются более чем в 2.5 раза, при этом сеточное разрешение в области возле профиля для них достаточно близко при любом угле атаки (см. рис. 4). Стоит также отметить, что в процессе работы были обнаружены отличия в пределах 1% в геометрии рассматриваемого аэродинамического профиля, которая берется за основу при построении сеток cx и 897×257. Однако это обстоятельство существенным образом не повлияло на результаты исследования.

Таблица 1

Размеры сеток

Mesh	cx4	cx3	cx2	cx1	cx0.9	897×257
N	54753	50689	68835	82692	87711	230529
N_{surf}	102	162	246	442	502	513

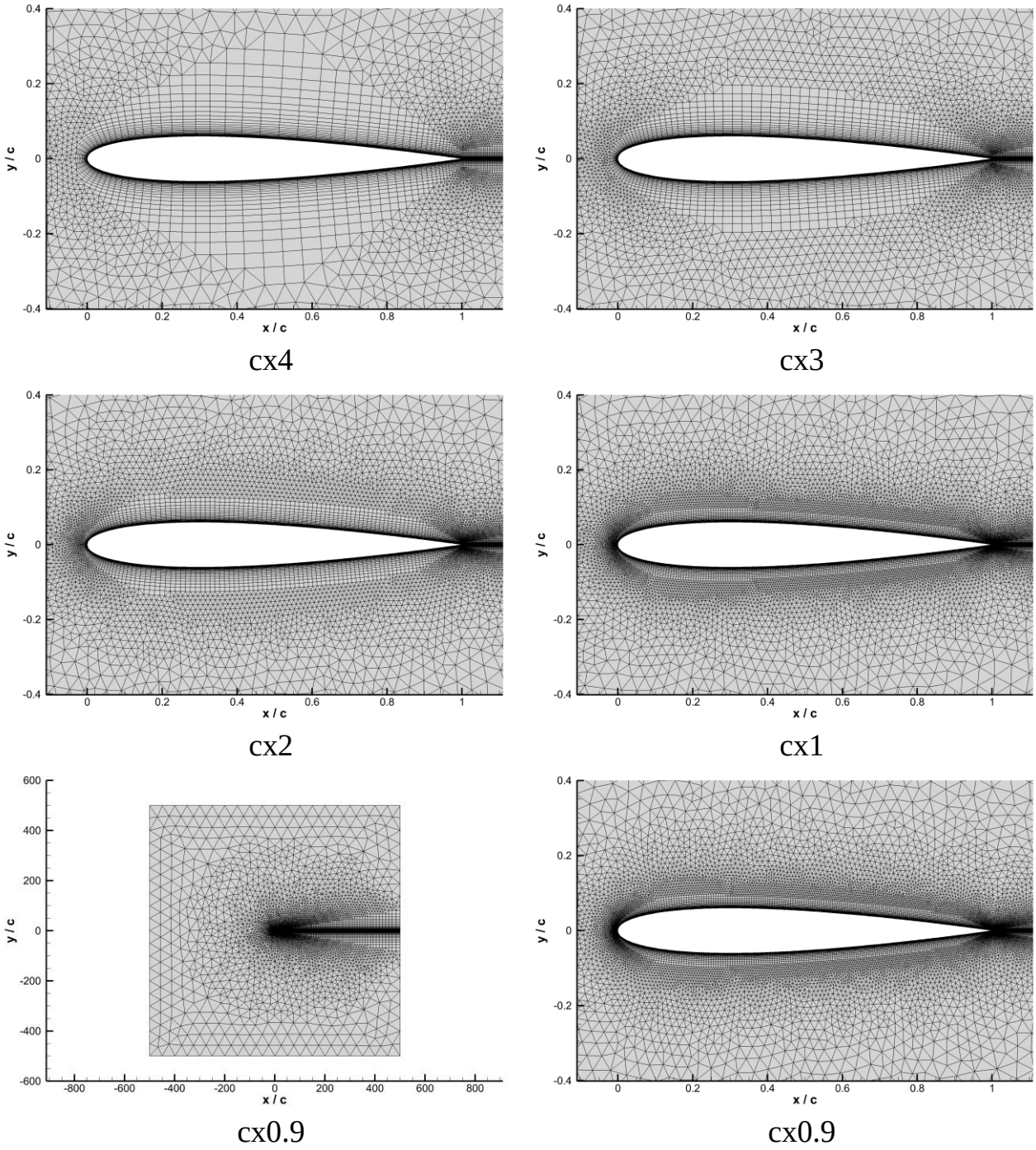


Рис. 2. Основные расчетные сетки cx

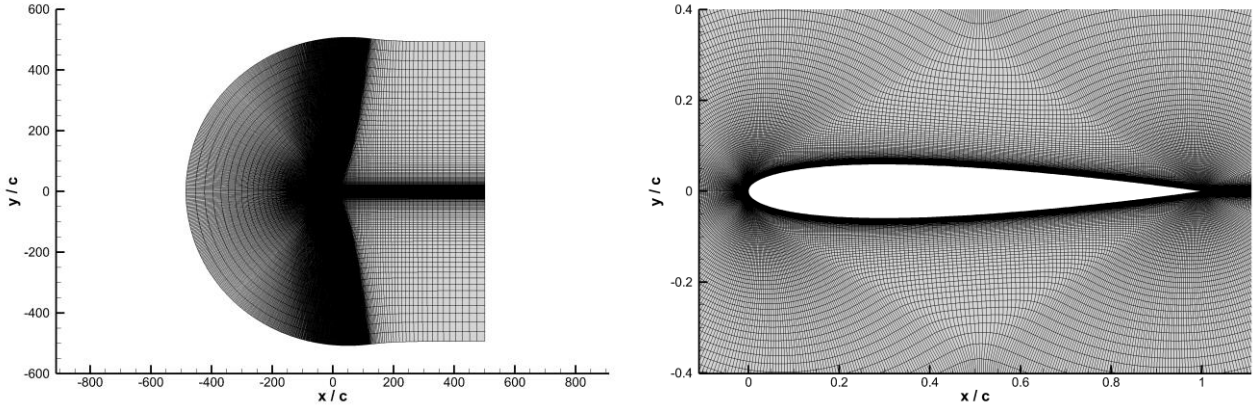
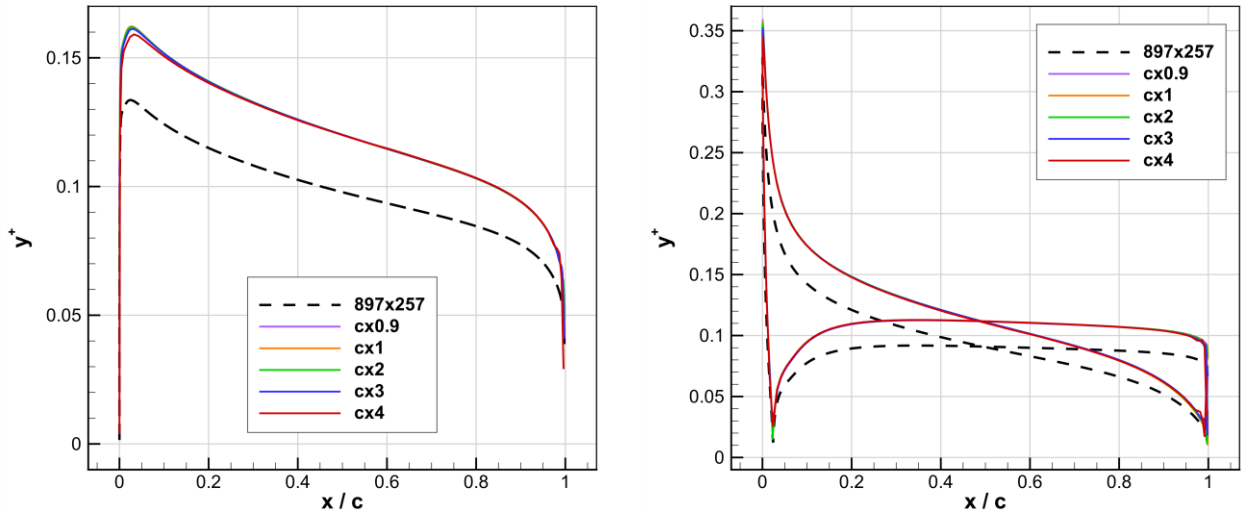
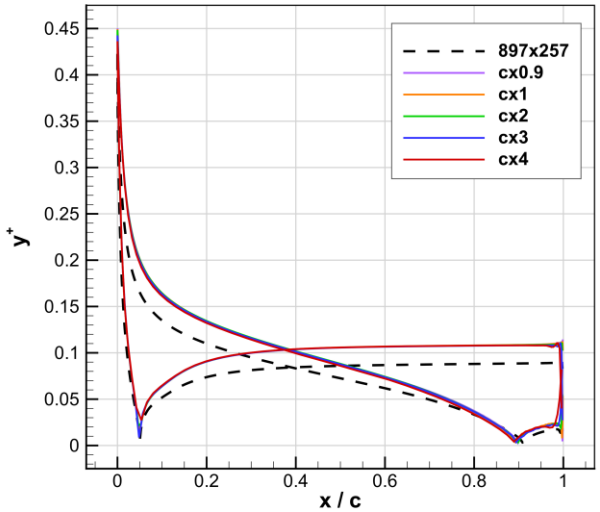


Рис. 3. Структурированная сетка 897×257 для эталонных расчетов



$\alpha = 0°$ $\alpha = 10°$



$\alpha = 15°$

Рис. 4. Безразмерная высота первой пристеночной ячейки y^+ вдоль поверхности профиля

Расчет задачи проводится до установления по абсолютной невязке (по полной энергии и турбулентной вязкости), а также до выхода значений коэффициентов подъёмной силы и сопротивления к асимптотике. При этом характерное время счета в конвективных временных единицах составляет примерно $500 c/U_\infty$. Глобальное значение числа Куранта составляет $5 \cdot 10^4$.

4. Валидация

Для тестирования описанной в разделе 2 EBR схемы с криволинейными реконструкциями на сформулированной в предыдущем разделе задаче использовалась неструктурированная сетка cx0.9 и эталонная структурированная сетка 897×257. Валидация метода и его программной реализации проводилась путем сопоставления значений безразмерных коэффициентов подъемной силы (CL) и сопротивления формы (CD) для различных углов атаки. Выполнялись расчеты с применением прямолинейных и криволинейных реконструкций в схеме EBR5 при соответствующих обозначениях EBR5 и EBR5 Strand. Сравнение полученных результатов с данными из [6] представлено в таблице 2.

Видно, что как на сетке cx0.9, так и на 897×257 полученные как с помощью криволинейных, так и прямолинейных реконструкций значения безразмерных коэффициентов отклоняются от валидационных значений не более чем на 4% по CD и не более чем на 1% по CL, причем не более чем на 1% по CD и не более чем на 0.1% по CL друг от друга.

Валидация EBR5 с криволинейными реконструкциями по распределениям коэффициентов давления (C_p) и трения (C_f) для различных углов атаки с помощью данных из [6] приведена на рис. 5. Проведенное сравнение показывает, что результаты расчетов соответствуют экспериментальным данным, а сами результаты расчетов по коэффициентам давления и трения между собой практически совпадают.

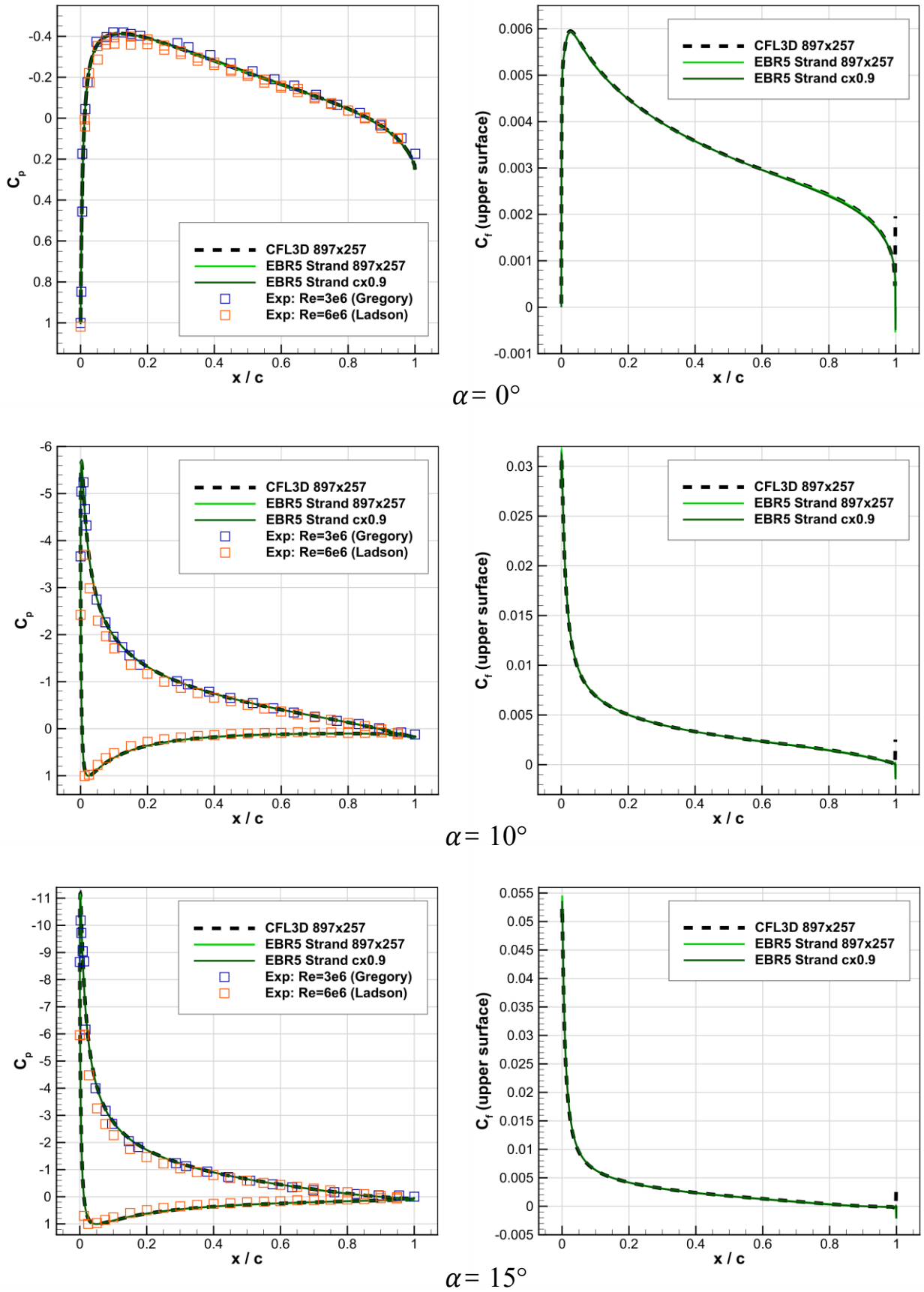


Рис. 5. Распределение коэффициентов давления и трения по поверхности

Таблица 2

Валидация коэффициентов подъемной силы и сопротивления формы

Code	CL $\alpha = 0°$	CL $\alpha = 10°$	CL $\alpha = 15°$	CD $\alpha = 0°$	CD $\alpha = 10°$	CD $\alpha = 15°$
EBR5 cx0.9	~ 0	1.0874	1.5321	0.00811	0.01241	0.02188
EBR5S cx0.9	~ 0	1.0872	1.5329	0.00811	0.01237	0.02174
EBR5	~ 0	1.0946	1.5437	0.00810	0.01264	0.02219
EBR5S	~ 0	1.0940	1.5436	0.00810	0.01259	0.02203
CFL3D	~ 0	1.0909	1.5461	0.00819	0.01231	0.02124
FUN3D	~ 0	1.0983	1.5547	0.00812	0.01242	0.02159
NTS	~ 0	1.0891	1.5461	0.00813	0.01243	0.02105
JOE	~ 0	1.0918	1.5490	0.00812	0.01245	0.02148
SUMB	~ 0	1.0904	1.5446	0.00813	0.01233	0.02141
TURNS	~ 0	1.1000	1.5642	0.00830	0.01230	0.02140
GGNS	~ 0	1.0941	1.5576	0.00817	0.01225	0.02073

Таким образом, можно заключить, что разработанная EBR схема с криволинейными реконструкциями работает корректно. Также видно, что в данной задаче для сравнения точности решений, получаемых с помощью прямолинейных и криволинейных реконструкций, необходимости в более подробных сетках, чем сетка cx0.9, нет.

5. Сравнительный анализ решений, получаемых с помощью EBR схем с прямолинейными и криволинейными реконструкциями

Рассмотрим теперь результаты расчетов, проведенных с использованием EBR схем с прямолинейными и криволинейными реконструкциями на гибридных неструктурированных сетках, включающими *strand*-сетки в области пограничного слоя. Сразу отметим, что на достаточно грубых сетках cx2, cx3 и cx4 применение прямолинейных реконструкций приводит к неустойчивости, обусловленной причинами, подробно описанными во второй части п. 1. Для

обеспечения устойчивости алгоритма в таких случаях можно использовать дополнительные техники, а именно, ограничение максимально допустимого отношения длин шагов на сетке шаблона и, при его несоблюдении, переключение на схему EBR3, а также лимитирование градиентов сеточных функций. Для рассматриваемой задачи и сеток cx2, cx3, cx4 достаточным оказалось ограничение на перепад шагов шаблона в 20 раз.

Проанализируем сначала полученные численные результаты для нулевого угла атаки (рис. 6). На данном рисунке представлены невязкая ($C_{d,nonvisc}$) и вязкая ($C_{d,visc}$) составляющие коэффициента подъемной силы для расчетов, выполненных с помощью схем EBR3, EBR3 Strand (EBR3S), EBR5 и EBR5 Strand (EBR5S). Из результатов видно, что для всех схем на более грубых сетках ожидаемо получается менее точное решение, а для каждой из используемых сеток бóльшую точность закономерно демонстрируют схемы EBR5 по сравнению с EBR3, а также EBR5S по сравнению с EBR3S. При сравнении же схем EBR5S с EBR5 и EBR3S с EBR3 всюду наблюдается существенное уменьшение получаемой ошибки при использовании криволинейных шаблонов, особенно заметное на грубых сетках. Причем значения контрольных величин, полученные по схеме EBR5S, даже на достаточно грубой сетке cx4 оказываются уже вполне близкими к соответствующим значениям, полученным на эталонных подробных сетках. Также следует отметить, что при увеличении сеточного разрешения разница между схемами с прямолинейными и криволинейным реконструкциями (EBR3S vs EBR3 и EBR5S vs EBR5) уменьшается, что обусловлено постепенным выпрямлением шаблонов криволинейных реконструкций в пограничном слое.

Приведенные выше выводы подтверждаются аналогичными результатами для углов атаки 10° и 15° (рис. 7 и 8). Причем стоит заметить, что при ненулевом угле атаки на грубых сетках схема EBR3S, использующая укороченный криволинейный шаблон, показывает более высокую точность, чем схема EBR5, работающая на более протяженном, но прямолинейном шаблоне.

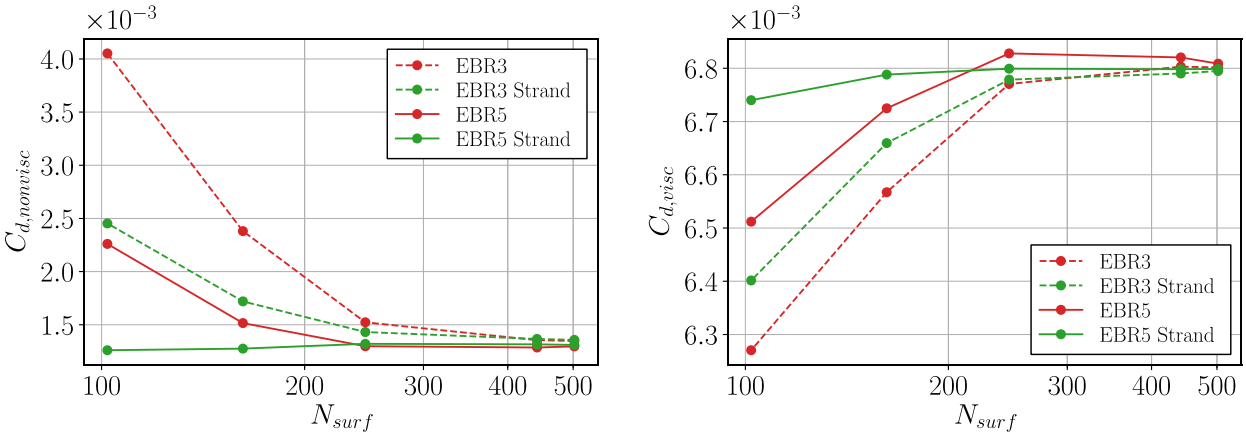


Рис. 6. Сравнение аэродинамических коэффициентов при $\alpha = 0°$

На рис. 9 для иллюстрации работы рассматриваемых вариантов схем на разных сетках приведены некоторые наиболее характерные распределения коэффициентов давления и трения по поверхности аэродинамического профиля. Из приведенных графиков видно, что для всех углов атаки наибольшее отклонение от эталонных численных результатов демонстрирует схема EBR3 на сетке cx4, далее следуют схемы EBR5 на той же сетке, EBR3 на сетке cx3, EBR5 на сетке cx3 и EBR5S на сетке cx4. Описанная последовательность подтверждается данными, представленными на рис. 6, 7 и 8, причем результаты схемы EBR5S на еще достаточно грубой сетке cx4 уже вполне хорошо согласуются с эталонными результатами, полученными на подробной сетке, как это и было отмечено выше.

По проведенному анализу полученного в расчетах коэффициента трения можно оценить изменения размеров зоны рециркуляции. Соответствующие координаты точки отрыва сведены в таблицу 3. Из таблицы следует, что без использования в EBR схемах криволинейных реконструкций на грубых сетках численно предсказанный размер рециркуляционной зоны может существенно отличаться от соответствующего физически корректного результата. Особенно это видно на сетке cx4. Также использование прямолинейных реконструкций на грубых сетках может приводить к ложному отрыву при угле атаки 10°.

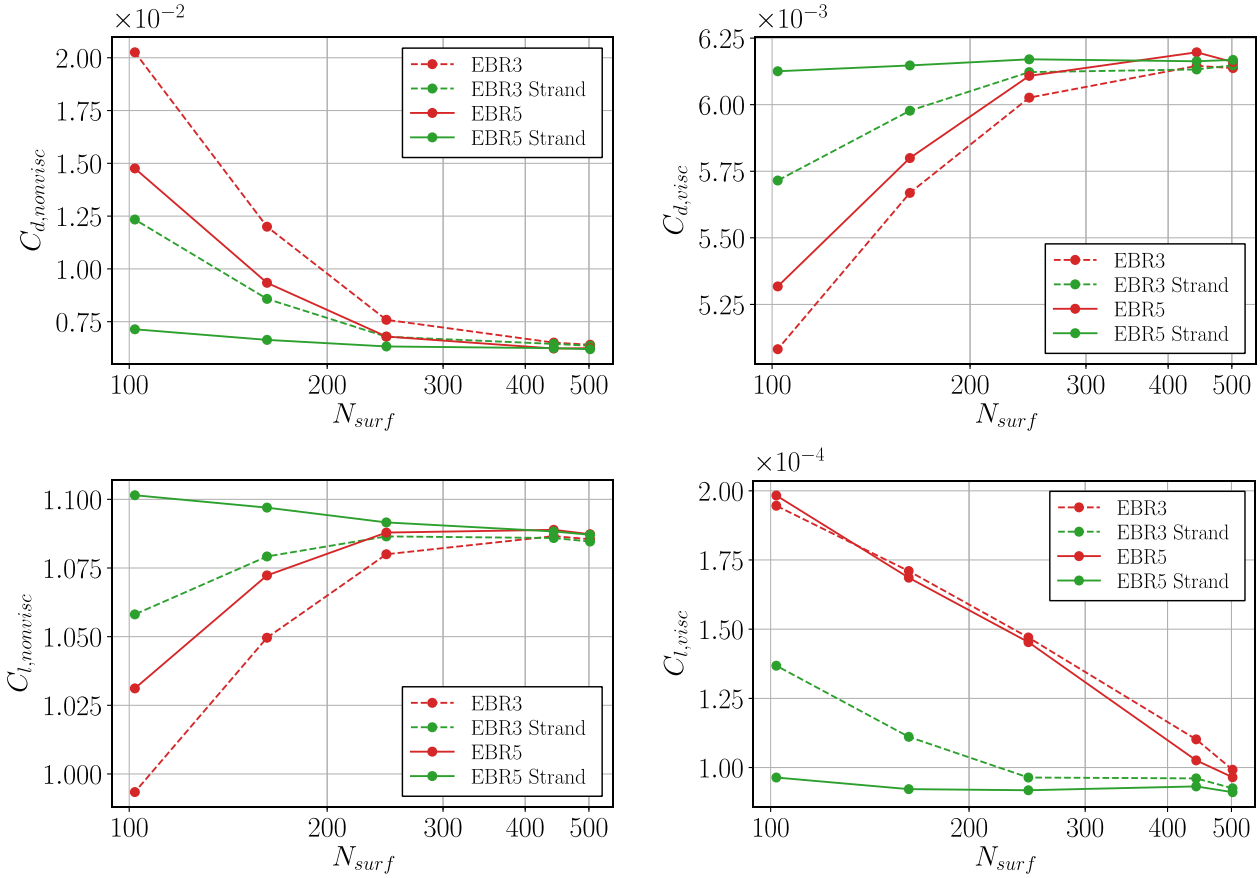


Рис. 7. Сравнение аэродинамических коэффициентов при α = 10°

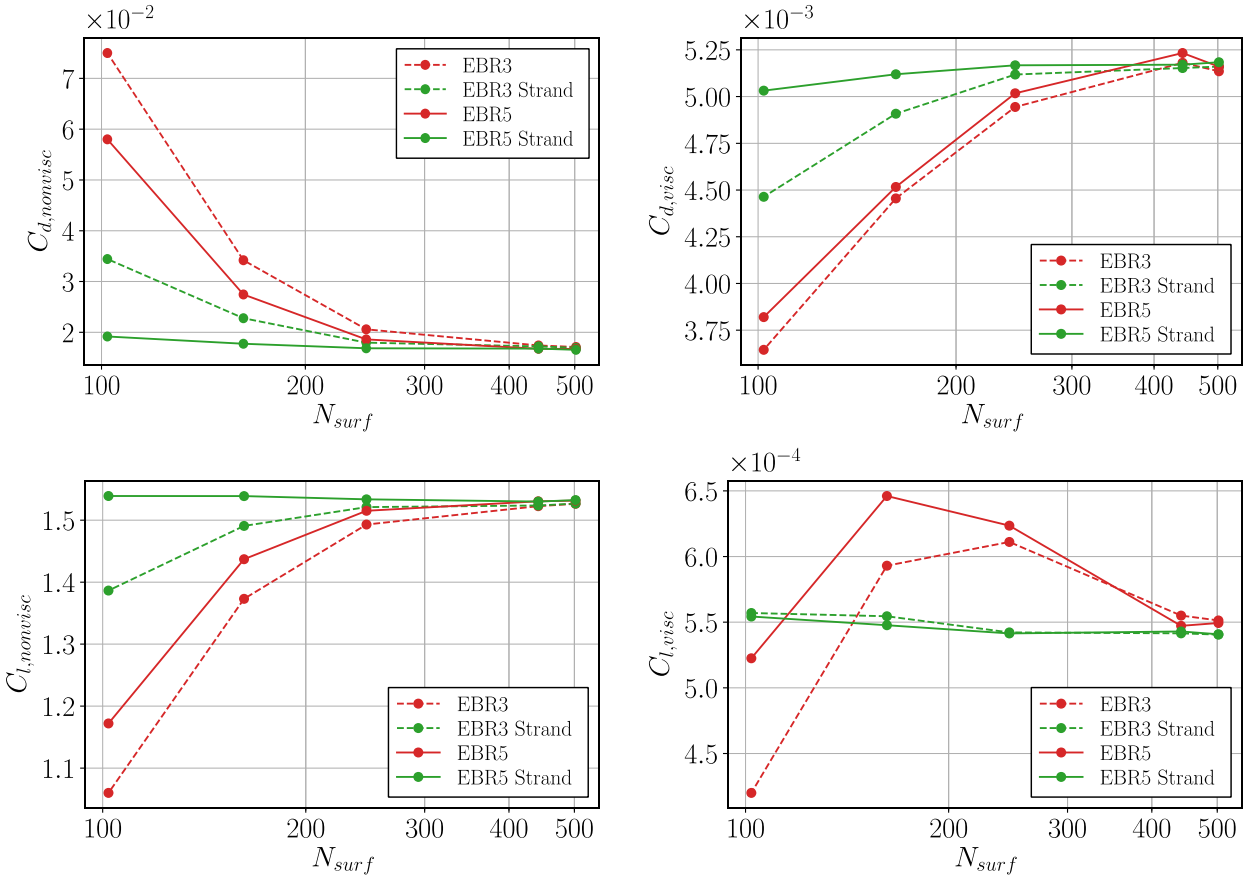


Рис. 8. Сравнение аэродинамических коэффициентов при α = 15°

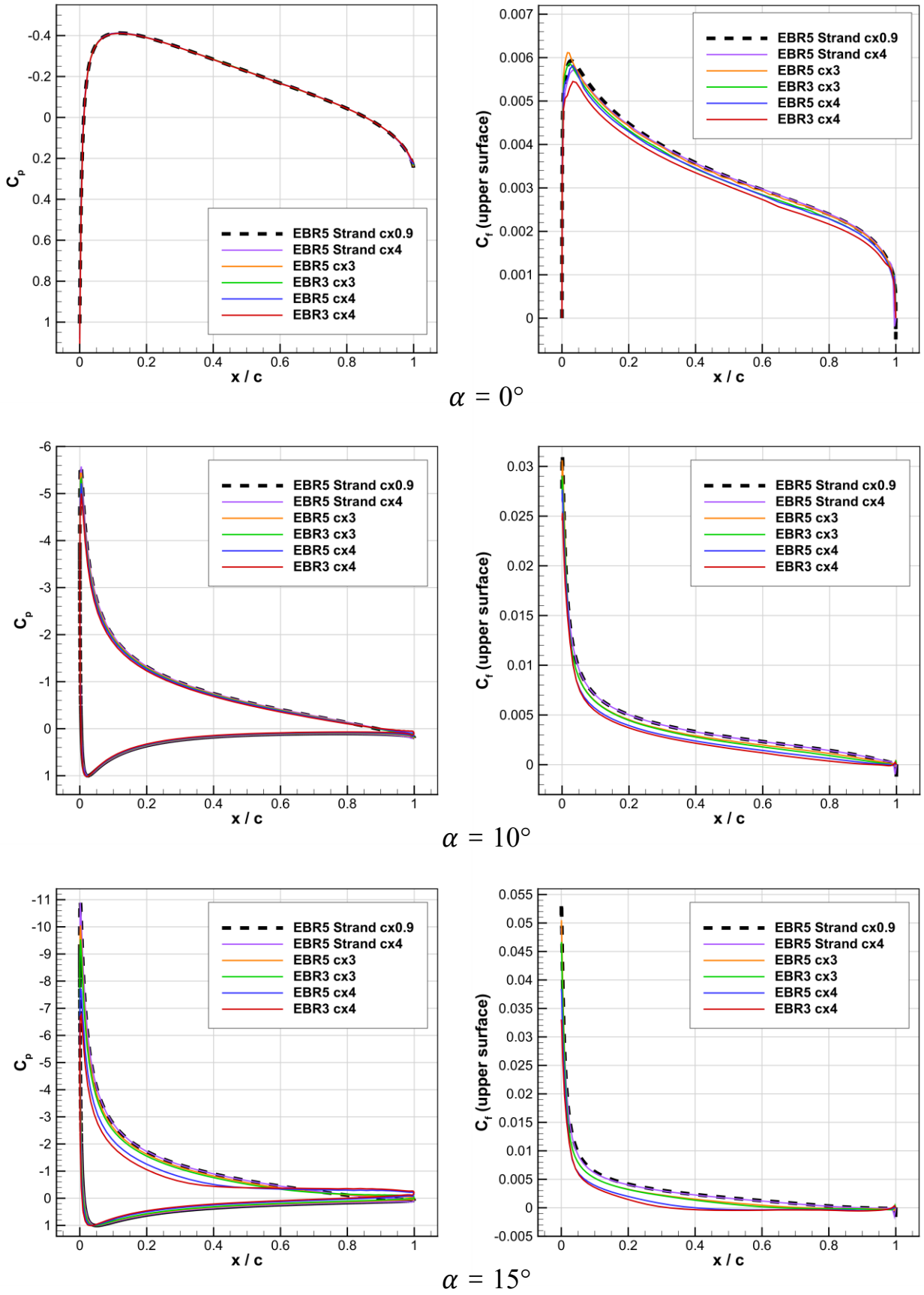


Рис. 9. Сравнение распределений коэффициентов давления и трения для различных сеток и схем

Таблица 3

Координата точки отрыва течения $[x/c]$

Scheme and mesh	$\alpha = 10°$	$\alpha = 15°$
EBR5 897×257	–	≈ 0.91
EBR5S 897×257	–	≈ 0.91
EBR5 cx0.9	–	≈ 0.90
EBR5S cx0.9	–	≈ 0.90
EBR5S cx4	–	≈ 0.89
EBR5 cx3	–	≈ 0.74
EBR3 cx3	≈ 0.99	≈ 0.66
EBR5 cx4	≈ 0.97	≈ 0.40
EBR3 cx4	≈ 0.94	≈ 0.32

Из проведенного анализа можно заключить, что предлагаемое в работе обобщение EBR схем на случай криволинейных шаблонов реконструкции в областях *strand*-сеток не только корректно работает, но и является крайне необходимым в расчетах на относительно грубых анизотропных сетках в областях пограничных слоев, которые используются при моделировании высокорейнольдсовых турбулентных течений.

Заключение

В работе предложено обобщение EBR схем на неструктурированных сетках за счёт допущения в двумерном случае возможности проводить реберно-ориентированные реконструкции не вдоль прямой, содержащей данное ребро, а вдоль его содержащей криволинейной (точнее, кусочно-линейной) сеточной линии. Такое обобщение дает ряд важных преимуществ, особенно заметных при моделировании течений вокруг тел произвольной формы.

Во-первых, возможность реконструкции по криволинейному шаблону в области stand-сетки позволяет получить бóльшую точность численного решения, благодаря большей сонаправленности шаблона потоку.

Во-вторых, использование криволинейных реконструкций дает возможность избежать резкого перепада расстояний между узлами шаблона, который обычно возникает при пересечении прямолинейной реконструкции с криволинейной слоистой сеточной структурой. Применительно к алгоритму EBR схемы (и не только к нему), сильная неравномерность расположения узлов внутри шаблона существенным образом снижает точность аппроксимации и устойчивость.

Модификация EBR схемы, использующая криволинейные реконструкции, не показала значимых преимуществ с вычислительной точки зрения по сравнению с EBR схемой, основанной на прямолинейных реконструкциях.

На примере моделирования турбулентного течения показан выигрыш от применения криволинейных шаблонов реконструкции, заключающийся главным образом в обеспечении устойчивого счета и получении более точного и приемлемого с инженерной точки зрения результата на достаточно грубых сетках.

Дальнейшая работа авторов будет посвящена обобщению предлагаемого подхода на трехмерный случай.

Список литературы

1. Meakin, R., Wissink, A., Chan, W., Pandya, S., and Sitaraman, J. On Strand Grids for Complex Flows // AIAA-2007-3834, 18th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, Miami, FL, June 2007.

2. Bakhvalov P.A., Abalakin I.V., Kozubskaya T.K. Edge-based reconstruction schemes for unstructured tetrahedral meshes, Int. J. Numer. Methods Fluids. 81(6) (2016) 331–356

3. Bakhvalov P.A., Kozubskaya T.K. On Efficient Vertex-Centered Schemes on Hybrid Unstructured Meshes, AIAA paper 2016-2966, 2016. 22nd AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, Lyon, France.

4. Katz A.J., Work D. High-order flux correction/finite difference schemes for strand grids. Journal of Computational Physics 2015; 282:360–380

5. Tong O., Katz A.J., Wissink A.M., Sitaraman J. High-order methods for three-dimensional strand-cartesian grids // AIAA 2015–0835, 53rd AIAA Aerospace Sciences Meeting, 2015

6. NASA Langley Research Center. Turbulence Modeling Resource. 2DN00: 2D NACA 0012 Airfoil Validation Case URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val.html. SA Model Results URL: https://turbmodels.larc.nasa.gov/naca0012_val_sa.html.

7. Spalart P.R., Allmaras S.R. A One-Equation Turbulence Model for Aerodynamic Flows // AIAA Paper 92-0439, 30th Aerospace Science Meeting, Reno, Nevada (1992).

Оглавление

Введение 3
1. Математическая модель и численный метод 4
2. Физическая постановка задачи 9
3. Вычислительная постановка задачи и сетки 9
4. Валидация 13
5. Сравнительный анализ решений, получаемых с помощью EBR схем с прямолинейными и криволинейными реконструкциями 15
Заключение 20
Список литературы 21