ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е.,
Подрыга В.О., Рагимли О.Р.,
Шарова Ю.С.

Об одной двухслойной
полностью консервативной
разностной схеме газовой
динамики в эйлеровых
переменных с адаптивной
регуляризацией решения

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения / Ю.А.Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 14. 23 с. doi:[10.20948/prepr-2019-14](https://doi.org/10.20948/prepr-2019-14)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-14>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

**Ю.А. Повещенко, М.Е. Ладонкина, В.О. Подрыга,
О.Р. Рагимли, Ю.С. Шарова**

**Об одной двухслойной полностью
консервативной разностной схеме
газовой динамики в эйлеровых
переменных с адаптивной
регуляризацией решения**

Москва — 2019

Повещенко Ю.А., Ладонкина М.Е, Подрыга В.О., Рагимли О.Р., Шарова Ю.С.

Об одной двухслойной полностью консервативной разностной схеме газовой динамики в эйлеровых переменных с адаптивной регуляризацией решения

Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных построено семейство двухслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами. Значительное внимание в работе уделено способам конструирования регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии не нарушающих свойств полной консервативности разностных схем данного класса, анализу их амплитуды и возможности их использования на неравномерных сетках. Разработанные схемы могут быть использованы для расчета процессов в неравновесных по температуре средах, например, при необходимости учета электрон-ионной релаксации температуры в короткоживущей плазме в условиях интенсивного энерговклада.

Ключевые слова: полностью консервативные разностные схемы, метод опорных операторов, газовая динамика.

Poveshchenko Yu.A., Ladokina M.E., Podryga V.O., Rahimly O.R., Sharova Yu.S.

On a two-layer completely conservative difference scheme of gas dynamics in Eulerian variables with adaptive regularization of solution

For the equations of gas dynamics in Eulerian variables, a family of two-layer completely conservative difference schemes with temporal weights profiled on space has been constructed. Great attention is paid to the methods of constructing regularized mass, momentum and internal energy fluxes that do not violate the properties of complete conservatism of difference schemes of this class, to the analysis of their amplitude and to the possibility of their use on non-uniform grids. The developed schemes can be used to calculate processes in non-equilibrium temperature media, for example, if it is necessary to take into account electron-ion temperature relaxation in a short-lived plasma under conditions of intense energy input.

Keywords: completely conservative difference schemes, support operator method, gas dynamics.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15081-офи_м, 18-07-00841-а, 18-51-18004-Болг_а.

1. Введение

Как показала практика, принцип полной консервативности [1] является одним из весьма эффективных критериев качества разностных схем, возникающих при численном моделировании движений сплошной среды. Проблема построения двухслойных по времени разностных схем, удовлетворяющих этому принципу, была решена в [2] для случая лагранжева описания движения среды. Определенные трудности возникли при попытке построить такие схемы для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных. В [3] было рассмотрено весьма широкое семейство двухслойных разностных схем и показано, что оно не содержит полностью консервативной разностной схемы. В работе [4] была построена трехслойная полностью консервативная схема. На случай пространственных течений она была обобщена в [5].

Настоящая работа является естественным продолжением [6-8] с использованием операторного подхода [9-11] и конструированием регуляризованных потоков массы, импульса и внутренней энергии, придающих схеме свойство квазимонотонности и не нарушающих свойств полной консервативности системы. В построенной схеме работа сил давления, пропорциональная дивергенции скорости, аппроксимируется с использованием интерполяции по времени скорости вещества, причем весовые множители профилированы по пространству. Сами же интерполяционные веса связаны с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Такая нелинейная аппроксимация скоростей частиц в узлах разностной сетки (зависящая от массы этих частиц) обеспечивает одновременно две вещи. Во-первых, она сохраняет внутреннюю энергию в данном типе дивергентных разностных схем, что обеспечивается отсутствием постоянно действующих аппроксимационных источников разностного происхождения в уравнении внутренней энергии, производящих «вычислительную» энтропию, в том числе на сингулярных особенностях решения (например, на расходящихся центрированных волнах разрежения). Во-вторых, эта аппроксимация для узловых частиц переменной массы обеспечивает одновременный согласованный баланс их импульса и кинетической энергии с учетом потока вещества в движущейся среде. Наконец, она имеет второй порядок аппроксимации и проста в реализации.

Также в работе предложена естественная регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии системы, не нарушающая свойств полной консервативности разностных схем данного класса. Исследована амплитуда этих потоков на явном и неявном слоях по времени, а также допустимость их адаптивного использования на сетках переменной структуры. Адаптивное включение искусственной вязкости может производиться для данного класса двухслойных полностью консервативных разностных схем (ПКРС), следуя, например, результатам и рекомендациям работы [12].

2. Постановка задачи

Рассмотрим течение в эйлеровой системе координат. Пусть $\vec{u}$ — скорость течения. Плотность потока массы обозначим $\vec{\mu} = \rho \cdot \vec{u}$ (ρ — плотность среды). Тогда система уравнений Эйлера для течения среды примет вид:

$$\frac{D}{Dt}(dM) = -dV \operatorname{div} \vec{\mu},$$

$$\frac{D}{Dt}(\vec{u} dM) = -dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div} \left(\vec{\mu} \cdot \vec{u} \right),$$

$$\frac{D}{Dt}(\varepsilon dM) = -P dV \operatorname{div} \vec{u} - dV \operatorname{div}(\vec{\mu} \varepsilon) + dQ \text{ - закон сохранения}$$

внутренней энергии,

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} dM \right) = -\vec{u} dV \operatorname{grad} P - dV \operatorname{div} \left(\vec{\mu} \frac{\vec{u}^2}{2} \right) \text{ - закон сохранения}$$

кинетической энергии,

$$\frac{D}{Dt} \left(\left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) dM \right) = -dV \operatorname{div}(P \vec{u}) - dV \operatorname{div} \left(\vec{\mu} \left(\varepsilon + \frac{\vec{u}^2}{2} \right) \right) + dQ \text{ - закон}$$

сохранения полной энергии.

Мы воспользовались очевидным тождеством:

$$\vec{u} \frac{D}{Dt}(\vec{u} dM) = \frac{D}{Dt} \left(\frac{\vec{u}^2}{2} dM \right) + \frac{\vec{u}^2}{2} \frac{D}{Dt} dM.$$

Здесь считается, что частица среды массы dM , заключена в объем dV , через границы которого протекает поток массы $\vec{\mu}$, несущий импульс $\vec{\mu} \cdot \vec{u}$ и внутреннюю энергию $\vec{\mu} \varepsilon$. P — давление, ε — удельная внутренняя энергия.

3. Полностью консервативная дифференциально-разностная схема

На рис. 1 представлена разностная сетка, ω — узлы разностной сетки, Ω — ее ячейки. Термодинамические величины ρ , P , ε , а также объем ячейки V и ее массу $M = \rho V$ будем относить к ячейкам Ω . Скорость $\vec{u}$, приузловые массу m и объем v будем относить к узлам ω .

Рис. 1. Разностная сетка.

Очевидно:

$$m_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} M_{\Omega}, \quad v_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} V_{\Omega}.$$

Далее:

$$\mu_D = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \mu_{\omega}.$$

Здесь введены согласованные между собой узловые и ячеечные потоки массы μ_{ω} и μ_D .

Введем операции векторного анализа $DIV : (\omega) \rightarrow (\Omega)$

$$DIV \vec{u} = \frac{1}{V} \sum_{\omega(\Omega)} s_{\omega}(\Omega) u(\omega)$$

и $GRAD : (\Omega) \rightarrow (\omega)$

$$GRAD P = \frac{\Delta P}{v},$$

где

$$\Delta P = - \sum_{\Omega(\omega)} s_{\omega}(\Omega) P_{\Omega} + S_{\partial\omega} P_{\partial\omega}, \quad (1)$$

а также векторные операции для аппроксимации процессов переноса $DIV_D : (\Omega) \rightarrow (\omega)$ определим как

$$DIV_D \vec{\mu}_D = -\frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} s_\omega(\Omega) \mu_D(\Omega) \quad (2)$$

для балансного домена (соединяющего середины ячеек вокруг узла ω).

Также под дивергенцией диады $DIT_D : (\Omega) \rightarrow (\omega)$ будем понимать:

$$DIT_D (\vec{\mu}_D \bullet \vec{u}_D) = -\frac{1}{v} \sum_{\Omega(\omega)} s_\omega(\Omega) \mu_D(\Omega) \vec{u}_D(\Omega). \quad (3)$$

В (1), если узел $\omega = \partial\omega$ - граничный, добавлено слагаемое с величиной $P_{\partial\omega}$ на границе и знаковой функцией $S_{\partial\omega} = \pm 1$ в зависимости от направления граничной нормали.

Выпишем полностью консервативную [2] дифференциально-разностную схему (ПКРС) в переменных Эйлера:

$$\frac{D}{Dt} m = -v DIV_D \vec{\mu}_D, \quad (4)$$

$$\frac{D}{Dt} (mu) = -v GRAD P - v DIT_D (\vec{\mu}_D \bullet \vec{u}_D), \quad (5)$$

$$\frac{D}{Dt} (M \varepsilon) = -P V DIV \vec{u} - V DIV \left[(\rho \varepsilon \vec{u})_\omega \right], \quad (6)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(m \frac{\vec{u}^2}{2} \right) = -v (u, GRAD P) - v DIV_D \left(\vec{\mu}_D \frac{\vec{u}^2}{2} \right). \quad (7)$$

Здесь под $(\rho \varepsilon \vec{u})_\omega$ понимается некоторая аппроксимация потока внутренней энергии в узле ω . Также в ячейке, образованной узлами ω и ω' , введены величины:

$$\begin{aligned} \vec{u}_D &= \frac{1}{2} (\vec{u}_\omega + \vec{u}_{\omega'}), \\ \vec{u}_D^2 &= (\vec{u}_\omega, \vec{u}_{\omega'}). \end{aligned} \quad (8)$$

Закон сохранения полной энергии имеет вид:

$$\frac{D}{Dt} \left[\sum_{\Omega} (M \varepsilon)_\Omega + \sum_{\omega} \left(m \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_\omega \right] = (Pu)_{\underline{\Delta\partial\omega}} + (\rho \varepsilon u)_{\underline{\Delta\partial\omega}} + \left(\mu_D \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_{\underline{\Delta\partial\omega}}. \quad (9)$$

Здесь $(Pu)_{\underline{\Delta}\partial\omega}$ — работа граничных сил давления, $(\rho\epsilon u)_{\underline{\Delta}\partial\omega}$ — поток внутренней энергии через границу области, наконец, $\left(\begin{smallmatrix} -2 \\ \mu_D \frac{\mathbf{u}_D}{2} \end{smallmatrix}\right)_{\underline{\Delta}\partial\omega}$ —

граничный поток кинетической энергии в системе. Такие ПКРС обладают свойством покомпонентного сохранения импульса и видов энергии в системе.

Таким образом, имеет место следующая теорема.

Теорема 3-1. В эйлеровых переменных дифференциальная по времени и дискретная по пространству разностная схема (4)-(9) является полностью консервативной.

4. Двухслойная по времени полностью консервативная разностная схема в эйлеровых переменных

На временных слоях t и $\hat{t}=t+\tau$ ($\tau>0$ — шаг по времени) введем разностные производные по времени и пространственно-точечные (т.е. в узлах сетки ω) временные интерполяции:

$$a_t = (\hat{a} - a) / \tau, \quad a^{(\delta)} = \delta \hat{a} + (1 - \delta) a.$$

Здесь интерполяционный вес δ может зависеть от узла пространственной сетки ω , например, по закону:

$$\delta = \sqrt{\hat{m}} / (\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m}).$$

Также под произвольной интерполяцией по времени сеточных функций $a, \hat{a}$ между слоями t и $\hat{t}$ будем понимать некоторую сеточную величину $a^\sim$.

Выпишем полностью консервативную разностную схему:

$$m_t = -v \text{DIV}_D \tilde{\mu}_D, \quad (10)$$

$$(mu)_t = -v \text{GRAD} P^\sim - v \text{DIT}_D \left(\tilde{\mu}_D \cdot \tilde{u}_D \right), \quad (11)$$

$$(M \epsilon)_t = -P^\sim V \text{DIV} \vec{u}^\sim - V \text{DIV} \left[\left(\rho \epsilon \vec{u} \right)_\omega^\sim \right], \quad (12)$$

$$\left(m \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right)_t = -v (u^\sim, \text{GRAD} P^\sim) - v \text{DIV}_D \left(\tilde{\mu}_D \frac{\mathbf{u}_D^2}{2} \right). \quad (13)$$

Здесь:

$$\vec{u}_D \sim \frac{1}{2}(\vec{u}_{\omega}^{(\delta_{\omega})} + \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}), \quad \vec{u}_D \sim (\vec{u}_{\omega}^{(\delta_{\omega})}, \vec{u}_{\omega'}^{(\delta_{\omega'})}).$$

В разностном виде нами использовано тождество (теорема живых сил):

$$(\vec{u}^{(\delta)}, (m\vec{u})_t) = \left(m \frac{\vec{u}^2}{2} \right)_t + m_t \frac{(\vec{u}^{(\delta)})^2}{2}.$$

Далее под $\vec{u} \sim$ будем понимать $\vec{u} \sim \vec{u}^{(\delta)}$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема 4-1. В эйлеровых переменных разностная схема (10)-(13) является полностью консервативной.

5. Искусственная вязкость для полностью консервативных разностных схем в эйлеровых переменных

5.1. Регуляризация уравнения неразрывности

Запишем уравнение неразрывности в ячейке:

$$M_t + V \text{DIV } \vec{\mu} \sim = 0, \quad (14)$$

из которого следует (4), причем:

$$\vec{\mu}_D \sim = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \vec{\mu} \sim (\omega), \quad \vec{\mu} \sim (\omega) = \frac{1}{2}(\hat{\vec{\mu}}(\omega) + \vec{\mu}(\omega)).$$

Очевидно также:

$$\vec{\mu}_D = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \vec{\mu}(\omega), \quad \vec{\mu}_D \sim = \frac{1}{2}(\hat{\vec{\mu}}_D + \vec{\mu}_D).$$

В дальнейшем под плотностью потока массы будем понимать величины

$$\mu(\omega) = u_{\omega} \rho_{\omega} - (v \text{GRAD } \rho)_{\omega} = \mu_{i+1/2}, \quad (15)$$

$$\rho_{\omega} = \sum_{\Omega(\omega)} \gamma_{\omega, \Omega} \rho_{\Omega}, \quad \gamma_{\omega, \Omega} = \frac{1}{2} \frac{h_{\tilde{\Omega}(\omega) \neq \Omega}}{h_{\omega}},$$

где $-vGRAD\rho$ — адаптивная искусственная вязкость.

Для пространственных шагов сетки введем обозначения

$$V_{\Omega} = h_{\Omega} = h_i, \quad v_{\omega} = h_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} h_{\Omega} = \frac{h_i + h_{i+1}}{2} = h_{i+1/2},$$

$$\gamma_{i+1/2,i} = \frac{1}{2} \frac{h_{i+1}}{h_{i+1/2}}, \quad \gamma_{i+1/2,i+1} = \frac{1}{2} \frac{h_i}{h_{i+1/2}}.$$

Перепишем (14) в виде

$$-\frac{\hat{\rho}_i - \rho_i}{\tau} - \frac{\mu_{i+1/2}^{\sim} - \mu_{i-1/2}^{\sim}}{h_i} = 0. \quad (16)$$

Здесь использовано

$$V DIV \vec{\mu}^{\sim} = \mu_{i+1/2}^{\sim} - \mu_{i-1/2}^{\sim}$$

и

$$\mu_{i+1/2}^{\sim} = 1/2(\hat{\mu}_{i+1/2} + \mu_{i+1/2}),$$

$$\mu_{i+1/2} = u_{i+1/2}(\gamma_{i+1/2,i} \rho_i + \gamma_{i+1/2,i+1} \rho_{i+1}) - \left(\frac{v}{h}\right)_{i+1/2}(\rho_{i+1} - \rho_i).$$

Также (16) можно переписать в виде

$$\hat{A}_i \hat{\rho}_{i-1} - \hat{C}_i \hat{\rho}_i + \hat{B}_i \hat{\rho}_{i+1} = -\hat{D}_i \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$\hat{A}_i = \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u}_{i-1/2} \gamma_{i-1/2,i-1} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i-1/2} \right],$$

$$\hat{B}_i = \frac{\tau}{2h_i} \left[-\hat{u}_{i+1/2} \gamma_{i+1/2,i+1} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i+1/2} \right],$$

$$\hat{C}_i = 1 + \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u}_{i+1/2} \gamma_{i+1/2,i} - \hat{u}_{i-1/2} \gamma_{i-1/2,i} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i+1/2} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i-1/2} \right],$$

$$-\varphi_i = -\rho_i + \frac{\tau}{2h_i} (\mu_{i+1/2} - \mu_{i-1/2}) = -\left\{ B_i \rho_i + A_i \rho_{i+1} + C_i \rho_{i-1} \right\}. \quad (17)$$

Под $\hat{D}_i$ понимается величина $\hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i$. Согласно [13] выполнено:

$$\|\hat{\rho}\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |\hat{\rho}_i| \leq \|\varphi\|_c \quad (18)$$

при $\hat{A}_i > 0$, $\hat{B}_i > 0$, $\hat{C}_i \geq \hat{A}_i + \hat{B}_i$, $\hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i \geq 0$, $i = 1, \dots, N-1$, $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}_N = 0$, $\varphi_0 = \varphi_N = 0$ Величины B_i, A_i, C_i из (17) на явном слое по времени имеют вид:

$$\begin{aligned} B_i &= 1 - \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i+1/2} \gamma_{i+1/2,i} + \left(\frac{v}{h}\right)_{i+1/2} \right] + \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i-1/2} \gamma_{i-1/2,i} - \left(\frac{v}{h}\right)_{i-1/2} \right], \\ A_i &= -\frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i+1/2} \gamma_{i+1/2,i+1} - \left(\frac{v}{h}\right)_{i+1/2} \right], \\ C_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i-1/2} \gamma_{i-1/2,i-1} + \left(\frac{v}{h}\right)_{i-1/2} \right]. \end{aligned}$$

При выборе вязкости $\hat{v}$ “замораживаем” скорости $\hat{u}_{i-1/2} = \hat{u}_{i+1/2} = \hat{u} = \text{const}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} \hat{A}_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u} \gamma_{i-1/2,i-1} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i-1/2} \right], \\ \hat{B}_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[-\hat{u} \gamma_{i+1/2,i+1} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i+1/2} \right], \\ \hat{C}_i &= 1 + \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u} (\gamma_{i+1/2,i} - \gamma_{i-1/2,i}) + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i-1/2} + \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i+1/2} \right]. \end{aligned}$$

Очевидно:

$$\hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i = 1 + \frac{\tau}{2h_i} \hat{u} \left[(\gamma_{i+1/2,i} + \gamma_{i+1/2,i+1}) - (\gamma_{i-1/2,i} + \gamma_{i-1/2,i-1}) \right] = 1.$$

Также поскольку

$$\max\{\gamma_{i-1/2,i-1}, \gamma_{i+1/2,i+1}\} = \frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}},$$

имеем при

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} |\hat{u}| < \left(\frac{\hat{v}}{h}\right)_{i\pm 1/2} \quad (19)$$

положительность коэффициентов $\hat{A}_i > 0$, $\hat{B}_i > 0$. Т.е. в целом имеет место оценка (18).

На явном слое по времени при выборе вязкости v также “замораживаем” $u_{i-1/2} = u_{i+1/2} = u = \text{const}$ [12].

$$\text{Тогда } A_i + B_i + C_i = 1 + \frac{\tau}{2h_i} u \left[-(\gamma_{i+1/2,i} + \gamma_{i+1/2,i+1}) + (\gamma_{i-1/2,i} + \gamma_{i-1/2,i-1}) \right] = 1.$$

Далее из (17) следует, что выполнена оценка $\|\varphi\|_c \leq \|\rho\|_c$, если положительны A_i, B_i, C_i .

Аналогично неявному слою по времени видим, что $A_i > 0$ и $C_i > 0$, если

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} |u| < \left(\frac{v}{h}\right)_{i\pm 1/2}. \quad (20)$$

Также $B_i > 0$ при

$$\frac{1}{2} \left[(v/h)_{i-1/2} + (v/h)_{i+1/2} + |u| \cdot |\delta\gamma_i| \right] < \frac{h_i}{\tau}. \quad (21)$$

Здесь

$$\delta\gamma_i = \gamma_{i+1/2,i} - \gamma_{i-1/2,i} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{i+1}}{h_{i+1/2}} - \frac{h_{i-1}}{h_{i-1/2}} \right],$$

или в безындексной форме

$$\delta\gamma_i = \delta\gamma_\Omega = \gamma_{\omega^+(\Omega),\Omega} - \gamma_{\omega^-(\Omega),\Omega} = \frac{1}{2} \left[\frac{h_{(\Omega+1)}}{h_{\omega^+(\Omega)}} - \frac{h_{(\Omega-1)}}{h_{\omega^-(\Omega)}} \right].$$

Величина $\delta\gamma$ характеризует в оценках на явном слое по времени влияние неравномерности сетки. Очевидно, на равномерной сетке $\delta\gamma = 0$.

Итак, в целом выбор вязкости на явном слое согласно (20), (21) дает

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} |u| < \frac{1}{2} \left[(v/h)_{i-1/2} + (v/h)_{i+1/2} \right] < \frac{h_i}{\tau} - \frac{|u|}{2} \cdot |\delta\gamma_i|. \quad (22)$$

При этом выполнено $\|\phi\|_c \leq \|\rho\|_c$. Если одновременно верны (19) и (20), (21), то имеет место оценка

$$\|\hat{\rho}\|_c \leq \|\rho\|_c.$$

Это и будет нами использовано в дальнейшем в качестве критерия выбора адаптивной искусственной вязкости в уравнении неразрывности (14), (15).

Также из (22) следует необходимость выполнения критерия куранта в виде

$$\frac{1}{2} \left[\frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} + |\delta\gamma_i| \right] \cdot |u| < \frac{h_i}{\tau}. \quad (23)$$

5.1.1. “Размораживание” скорости $\hat{u}$ на неявном слое по времени согласно (19) дает

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} \max \left\{ \left| \hat{u}_{i\pm 1/2} \right| \right\} < (\hat{v}/h)_{i\pm 1/2},$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \frac{h_{\Omega}}{\min_{\omega} \{h_{\omega(\Omega)}\}} \max_{\omega} \left\{ \left| \hat{u}_{\omega(\Omega)} \right| \right\} < (\hat{v} / h)_{\omega(\Omega)}.$$

Соответственно, на явном слое “размораживание” скорости u согласно (20) даст

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min \{h_{i\pm 1/2}\}} \max \left\{ \left| u_{i\pm 1/2} \right| \right\} < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{v}{h} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{v}{h} \right)_{i+1/2} \right] < \frac{h_i}{\tau} - \frac{|\delta\gamma_i|}{2} \max \left\{ \left| u_{i\pm 1/2} \right| \right\},$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \frac{h_{\Omega}}{\min_{\omega} \{h_{\omega(\Omega)}\}} \max_{\omega} \left\{ \left| u_{\omega(\Omega)} \right| \right\} < \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} \left(\frac{v}{h} \right)_{\omega} < \frac{h_{\Omega}}{\tau} - \frac{1}{2} |\delta\gamma_{\Omega}| \max_{\omega} \left\{ \left| u_{\omega(\Omega)} \right| \right\}.$$

При этом будет выполнен «размороженный» аналог (21).

“Размораживание” критерия Куранта (23) также дает

$$\frac{1}{2} \left[\frac{h_i}{\min \{h_{i\pm 1/2}\}} + |\delta\gamma_i| \right] \cdot \max \left\{ \left| u_{i\pm 1/2} \right| \right\} < \frac{h_i}{\tau},$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \left[\frac{h_{\Omega}}{\min_{\omega} \{h_{\omega(\Omega)}\}} + |\delta\gamma_{\Omega}| \right] \cdot \max_{\omega} \left\{ \left| u_{\omega(\Omega)} \right| \right\} < \frac{h_{\Omega}}{\tau}.$$

5.2. Регуляризация импульса

Преобразуем уравнение импульса (11) в узле ω . Предварительно выполним следующие преобразования. Из (2) следует

$$\begin{aligned} v \operatorname{DIV}_D \tilde{\mu}_D &= \tilde{\mu}_{D\ i+1} - \tilde{\mu}_{D\ i}, \\ \tilde{\mu}_{D\ i} &= \frac{1}{2} (\tilde{\mu}_{i+1/2} + \tilde{\mu}_{i-1/2}). \end{aligned}$$

Также очевидно

$$m_{\omega} = \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} \rho_{\Omega} V_{\Omega} = \frac{\rho_i h_i + \rho_{i+1} h_{i+1}}{2} = m_{i+1/2}.$$

Из (15) следует

$$\mu_D = \frac{1}{2} \sum_{\omega(\Omega)} [u_\omega \rho_\omega - (v \text{GRAD} \rho)_\omega],$$

$$\mu_{Di} = \frac{1}{2} \left\{ \left[u_{i+1/2} \rho_{i+1/2} - \left(\frac{v}{h} \right)_{i+1/2} (\rho_{i+1} - \rho_i) \right] + \left[u_{i-1/2} \rho_{i-1/2} - \left(\frac{v}{h} \right)_{i-1/2} (\rho_i - \rho_{i-1}) \right] \right\},$$

$$\rho_{i+1/2} = \gamma_{i+1/2,i} \rho_i + \gamma_{i+1/2,i+1} \rho_{i+1}.$$

Из (8) следует

$$u_D = \frac{1}{2} (u_\omega + u_{\omega'}) = \frac{1}{2} (u_{i+1/2} + u_{i-1/2}) = u_{Di}.$$

Также из (3) имеем

$$v \text{DIT}_D (\tilde{\mu}_D \cdot u_D) = \mu_{Di+1} u_{Di+1} - \mu_{Di} u_{Di}.$$

Из (1) следует $\Delta \tilde{P} = \tilde{P}_{i+1} - \tilde{P}_i$.

Вводя импульс $I = m u$ в узле ω разностной сетки, для (11) имеем

$$I_t = -\Delta \tilde{P} - v \text{DIT}_D (\tilde{\mu}_D \cdot u_D). \quad (24)$$

В качестве добавки к давлению P_Ω , заданному в ячейках Ω , будем использовать линейную искусственную вязкость фон Неймана-Рихтмайера $-(v_u \text{DIV} \vec{u})_\Omega$ в адаптивной форме [12] так, что под величиной $\tilde{P}$ в (24) будем понимать

$$\tilde{P}_\Omega = [P_\Omega - (v_u \text{DIV} \vec{u})_\Omega]^{(0.5)} \quad (25)$$

или

$$\tilde{P}_i = [P_i - (v_u \text{DIV} \vec{u})_i]^{(0.5)} = [P_i - (v_u / h)_i (u_{i+1/2} - u_{i-1/2})]^{(0.5)}.$$

При выборе вязкости v_u «замораживаются» плотность потока массы в ячейках $\tilde{\mu}_D i = \tilde{\mu}_D i+1 = \mu_D = \text{const}$, а также не входящие в приузловой импульс $I = m u$ приузловые массы $m_{i-1/2} = m_{i+1/2} = m_{i+3/2} = m = \text{const}$ на явном и неявном слоях по времени. Тогда из (24) получим

$$(I_{i+1/2})_t = \frac{1}{m} \left[(v_u / h)_{i+1} (I_{i+3/2} - I_{i+1/2}) - (v_u / h)_i (I_{i+1/2} - I_{i-1/2}) \right]^{(0.5)} - \\ - \mu_D \left[u_{\tilde{D}i+1} - u_{\tilde{D}i} \right] - (\Delta P)_{i+1/2}^{(0.5)}.$$

Величина $-(\Delta P)_{i+1/2}^{(0.5)}$ в правой части уравнения при вычислении вязкости v_u не используется. Также при $m = const$ имеют место соотношения

$$\delta = \frac{\sqrt{\hat{m}}}{\sqrt{\hat{m}} + \sqrt{m}} = 0.5, \quad u_{\tilde{}} = u^{(0.5)}, \quad u_{\tilde{D}i} = 0.5(u_{i+1/2} + u_{i-1/2})^{(0.5)}.$$

Отсюда окончательно для вычисления вязкости получим уравнение

$$\frac{\hat{I}_{i+1/2} - I_{i+1/2}}{\tau} - \frac{1}{m} \left[\left(\frac{v_u}{h} \right)_{i+1} (I_{i+3/2} - I_{i+1/2}) - \left(\frac{v_u}{h} \right)_i (I_{i+1/2} - I_{i-1/2}) \right]^{(0.5)} + \\ + \frac{\mu_D}{2m} [I_{i+3/2} - I_{i-1/2}]^{(0.5)} = 0. \quad (26)$$

Это уравнение можно переписать в виде

$$\hat{A}_{i+1/2} \hat{I}_{i-1/2} - \hat{C}_{i+1/2} \hat{I}_{i+1/2} + \hat{B}_{i+1/2} \hat{I}_{i+3/2} = -\hat{D}_{i+1/2} \varphi_{i+1/2}, \quad (27)$$

где

$$\hat{A}_{i+1/2} = \frac{\tau}{2m} \left[\frac{\mu_D}{2} + \left(\frac{\hat{v}_u}{h} \right)_i \right], \\ \hat{B}_{i+1/2} = \frac{\tau}{2m} \left[-\frac{\mu_D}{2} + \left(\frac{\hat{v}_u}{h} \right)_{i+1} \right], \\ \hat{C}_{i+1/2} = 1 + \frac{\tau}{2m} \left[\left(\frac{\hat{v}_u}{h} \right)_i + \left(\frac{\hat{v}_u}{h} \right)_{i+1} \right], \\ \hat{D}_{i+1/2} = \hat{C}_{i+1/2} - \hat{B}_{i+1/2} - \hat{A}_{i+1/2} = 1.$$

Здесь также

$$-\varphi_{i+1/2} = - \left\{ B_{i+1/2} I_{i+1/2} + A_{i+1/2} I_{i+3/2} + C_{i+1/2} I_{i-1/2} \right\},$$

$$\begin{aligned}
B_{i+1/2} &= 1 - \frac{\tau}{2m} \left[\left(\frac{v_u}{h} \right)_i + \left(\frac{v_u}{h} \right)_{i+1} \right], \\
A_{i+1/2} &= \frac{\tau}{2m} \left(\frac{v_u}{h} \right)_{i+1} - \frac{\mu_D}{2m} \frac{\tau}{2}, \\
C_{i+1/2} &= \frac{\tau}{2m} \left(\frac{v_u}{h} \right)_i + \frac{\mu_D}{2m} \frac{\tau}{2}.
\end{aligned}$$

Пусть для определенности $i=1,2,\dots,N-1$ и выполнено $\hat{I}_{0+1/2} = \hat{I}_{N+1/2} = 0$, $\varphi_{0+1/2} = \varphi_{N+1/2} = 0$. Тогда (см. [13]) справедлива оценка решения (27) по правой части

$$\|\hat{I}\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |\hat{I}_{i+1/2}| \leq \|\varphi\|_C = \max_{0 \leq i \leq N} |\varphi_{i+1/2}|$$

при

$$\hat{A}_{i+1/2} > 0, \quad \hat{B}_{i+1/2} > 0 \text{ и } \hat{C}_{i+1/2} \geq \hat{A}_{i+1/2} + \hat{B}_{i+1/2}.$$

Это выполнено при

$$\frac{|\mu_D|}{2} < \left(\frac{\hat{v}_u}{h} \right)_{i,i+1}. \quad (28)$$

Поскольку

$$\begin{aligned}
A_{i+1/2} + B_{i+1/2} + C_{i+1/2} &= 1 \\
&\text{и} \\
A_{i+1/2} &> 0, \quad C_{i+1/2} > 0
\end{aligned}$$

при

$$\frac{|\mu_D|}{2} < \left(\frac{v_u}{h} \right)_{i,i+1}, \quad (29)$$

а также $B_{i+1/2} > 0$ при

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{v_u}{h} \right)_i + \left(\frac{v_u}{h} \right)_{i+1} \right] < \frac{m}{\tau}, \quad (30)$$

то при выборе вязкости на явном слое с выполнением условий (29) и (30) следуют оценки

$$\frac{|\mu_D|}{2} < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu_u}{h} \right)_i + \left(\frac{\nu_u}{h} \right)_{i+1} \right] < \frac{m}{\tau} \quad (31)$$

и $\|\varphi\|_C \leq \|I\|_C$.

Если одновременно верны (28), (29) и (30), то справедливо неравенство $\|\hat{I}\|_C \leq \|I\|_C$. Это будет использоваться в дальнейшем в качестве критерия выбора адаптивной искусственной вязкости Неймана-Рихтмайера в уравнениях (11), (25). Также из (31) следует необходимость выполнения критерия Куранта в виде

$$\frac{\tau |\mu_D|}{2m} < 1. \quad (32)$$

5.2.1. «Размораживание» плотности потока массы μ_D согласно (28) для вязкости на неявном слое по времени дает

$$\frac{1}{2} \max \left\{ \left| \mu_{Di} \right|, \left| \mu_{Di+1} \right| \right\} < \left(\frac{\hat{\nu}_u}{h} \right)_{i,i+1}, \quad (33)$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \max_{\Omega} \left\{ \left| \mu_{\tilde{D}} \Omega(\omega) \right| \right\} < \left(\frac{\hat{\nu}_u}{h} \right)_{\Omega(\omega)}. \quad (34)$$

Соответственно, для вязкости на явном слое по времени «размораживание» того же плотности потока массы μ_D согласно (29) и (30) и приузловых масс m даст

$$\frac{1}{2} \max \left\{ \left| \mu_{Di} \right|, \left| \mu_{Di+1} \right| \right\} < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu_u}{h} \right)_i + \left(\frac{\nu_u}{h} \right)_{i+1} \right] < \frac{1}{\tau} \min_{[t, \hat{t}]} \{ m_{i \pm 1/2}, m_{i+3/2} \}$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \max_{\Omega} \left\{ \left| \mu_{\tilde{D}} \Omega(\omega) \right| \right\} < \frac{1}{2} \sum_{\Omega(\omega)} \left(\frac{\nu_u}{h} \right)_{\Omega} < \frac{1}{\tau} \min_{[(\Omega(\omega), \tilde{\omega}(\Omega)), t, \hat{t}]} \{ m_{\tilde{\omega}} \},$$

если для вязкости ν_u выполнены также аналоги (33), (34) на явном слое по времени (т.е. вместо $\hat{\nu}_u$ берутся ν_u).

«Размораживание» критерия Куранта в форме (32) также дает

$$\frac{1}{2} \max \left\{ \left| \mu_{Di}^{\sim} \right|, \left| \mu_{Di+1}^{\sim} \right| \right\} < \frac{1}{\tau} \min_{[t, \hat{t}]} \{m_{i \pm 1/2}, m_{i+3/2}\},$$

или в безындексной форме

$$\frac{1}{2} \max_{\Omega} \left\{ \left| \mu_D^{\sim} \Omega(\omega) \right| \right\} < \frac{1}{\tau} \min_{[(\Omega(\omega), \tilde{\omega}(\Omega)), t, \hat{t}]} \{m_{\tilde{\omega}}\}.$$

5.3. Регуляризация внутренней энергии

Уравнение баланса внутренней энергии (6) в ячейке Ω перепишем в виде

$$E_t = -p^{\sim} DIV \bar{u}^{\sim} - DIV \mu_E^{\sim}, \quad (35)$$

где $E_{\Omega} = \rho_{\Omega} \varepsilon_{\Omega}$ — внутренняя энергия единицы объема в ячейке Ω , $\mu_E^{\sim} = \mu_E^{(0,5)}$.

Под плотностью потока внутренней энергии аналогично п. 5.1. будем понимать величину

$$\mu_E(\omega) = u_{\omega} E_{\omega} - \left(\nu_E GRAD E \right)_{\omega} = \mu_{Ei+1/2}, \quad (36)$$

$$E_{\omega} = \sum_{\Omega(\omega)} \gamma_{\omega, \Omega} E_{\Omega},$$

где $-\nu_E GRAD E$ — адаптивная искусственная вязкость.

Величина $-p^{\sim} DIV \bar{u}^{\sim}$ в правой части уравнения баланса внутренней энергии при вычислении вязкости ν_E не используется. Отсюда для вычисления вязкости получим уравнение

$$\frac{\hat{E}_i - E_i}{\tau} + \frac{\mu_{Ei+1/2}^{(0,5)} - \mu_{Ei-1/2}^{(0,5)}}{h_i} = 0, \quad (37)$$

$$\mu_{Ei+1/2} = u_{i+1/2} (\gamma_{i+1/2,i} E_i + \gamma_{i+1/2,i+1} E_{i+1}) - \left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i+1/2} (E_{i+1} - E_i).$$

Также (37) можно переписать в виде

$$\hat{A}_i \hat{E}_{i-1} - \hat{C}_i \hat{E}_i + \hat{B}_i \hat{E}_{i+1} = -\hat{D}_i \varphi_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1,$$

где

$$\begin{aligned}
\hat{A}_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u}_{i-1/2} \gamma_{i-1/2, i-1} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i-1/2} \right], \\
\hat{B}_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[-\hat{u}_{i+1/2} \gamma_{i+1/2, i+1} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i+1/2} \right], \\
\hat{C}_i &= 1 + \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u}_{i+1/2} \gamma_{i+1/2, i} - \hat{u}_{i-1/2} \gamma_{i-1/2, i} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i+1/2} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i-1/2} \right], \\
-\varphi_i &= -E_i + \frac{\tau}{2h_i} (\mu_{E, i+1/2} - \mu_{E, i-1/2}) = -\{B_i E_i + A_i E_{i+1} + C_i E_{i-1}\}. \quad (38)
\end{aligned}$$

Под $\hat{D}_i$ понимается величина $\hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i$.

Согласно [13] выполнено

$$\|\hat{E}\|_c = \max_{0 \leq i \leq N} |\hat{E}_i| \leq \|\varphi\|_c \quad (39)$$

при

$$\begin{aligned}
\hat{A}_i &> 0, \quad \hat{B}_i > 0 \quad \text{и} \quad \hat{C}_i \geq \hat{A}_i + \hat{B}_i, \quad i=1,2,\dots,N-1, \\
\hat{E}_0 &= \hat{E}_N = 0, \quad \hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i \geq 0, \quad \varphi_0 = \varphi_N = 0.
\end{aligned}$$

Величины B_i, A_i, C_i из (38) на явном слое по времени имеют вид:

$$\begin{aligned}
B_i &= 1 - \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i+1/2} \gamma_{i+1/2, i} + \left(\frac{v_E}{h} \right)_{i+1/2} \right] + \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i-1/2} \gamma_{i-1/2, i} - \left(\frac{v_E}{h} \right)_{i-1/2} \right], \\
A_i &= -\frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i+1/2} \gamma_{i+1/2, i+1} - \left(\frac{v_E}{h} \right)_{i+1/2} \right], \\
C_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[u_{i-1/2} \gamma_{i-1/2, i-1} + \left(\frac{v_E}{h} \right)_{i-1/2} \right].
\end{aligned}$$

При выборе вязкости $\hat{v}_E$ «замораживаем» скорости

$\hat{u}_{i-1/2} = \hat{u}_{i+1/2} = \hat{u} = const$. Тогда имеем

$$\begin{aligned}\hat{A}_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u} \gamma_{i-1/2, i-1} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i-1/2} \right], \\ B_i &= \frac{\tau}{2h_i} \left[-\hat{u} \gamma_{i+1/2, i+1} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i+1/2} \right], \\ C_i &= 1 + \frac{\tau}{2h_i} \left[\hat{u} (\gamma_{i+1/2, i} - \gamma_{i-1/2, i}) + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i+1/2} \right].\end{aligned}$$

Очевидно,

$$\hat{D}_i = \hat{C}_i - \hat{B}_i - \hat{A}_i = 1 + \frac{\tau}{2h_i} \hat{u} \left[(\gamma_{i+1/2, i} + \gamma_{i+1/2, i+1}) - (\gamma_{i-1/2, i} + \gamma_{i-1/2, i-1}) \right] = 1.$$

Также поскольку

$$\max \{ \gamma_{i-1/2, i-1}, \gamma_{i+1/2, i+1} \} = \frac{1}{2} \frac{h_i}{\min \{ h_{i\pm 1/2} \}},$$

при

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min \{ h_{i\pm 1/2} \}} |\hat{u}| < \left(\frac{\hat{v}_E}{h} \right)_{i\pm 1/2} \quad (40)$$

имеем положительность коэффициентов $\hat{A}_i > 0$, $\hat{B}_i > 0$. Т.е. в целом имеет место оценка (39).

На явном слое по времени при выборе вязкости ν_E также «замораживаем» $u_{i-1/2} = u_{i+1/2} = u = const$. Тогда

$$A_i + B_i + C_i = 1 + \frac{\tau}{2h_i} u \left[-(\gamma_{i+1/2, i} + \gamma_{i+1/2, i+1}) + (\gamma_{i-1/2, i} + \gamma_{i-1/2, i-1}) \right] = 1.$$

Далее из (38) следует, что выполнена оценка $\|\varphi\|_C \leq \|E\|_C$, если положительны A_i, B_i, C_i . Аналогично неявному слою по времени видим, что $A_i > 0$, $C_i > 0$, если

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min \{ h_{i\pm 1/2} \}} |u| < \left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i\pm 1/2}. \quad (41)$$

Также $B_i > 0$ при

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i+1/2} + |u| \cdot |\delta \gamma_i| \right] < \frac{h_i}{\tau} \quad (42)$$

(см. также (21)). Итак, в целом выбор вязкости на явном слое согласно (41), (42) дает

$$\frac{1}{2} \frac{h_i}{\min\{h_{i\pm 1/2}\}} |u| < \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i-1/2} + \left(\frac{\nu_E}{h} \right)_{i+1/2} \right] < \frac{h_i}{\tau} - \frac{|u|}{2} \cdot |\delta \gamma_i|; \quad (43)$$

при этом выполнено $\|\phi\|_c \leq \|E\|_c$. Если одновременно верны (40) и (41), (42), то имеет место оценка

$$\|\hat{E}\|_c \leq \|E\|_c.$$

Это будет нами использовано в дальнейшем как критерий выбора адаптивной искусственной вязкости в уравнении внутренней энергии (35), (36).

Также из (43) следует необходимость выполнения критерия Куранта в виде (23).

5.3.1. Поскольку при $\frac{\nu}{h} = \frac{\nu_E}{h}$ оценки (19) и (40), (20) и (41), (21) и (42) становятся тождественными, а также один и тот же критерий Куранта в форме (23), то «размораживание» скорости, как это выполнено в п. 5.1.1, будет одинаково справедливым и для выбора коэффициента вязкости ν_E в уравнении внутренней энергии (35), (36). При этом во всех формулах п. 5.1.1 следует сделать формальную замену $\frac{\nu}{h}$ на $\frac{\nu_E}{h}$.

5.4. Некоторые итоги

Результаты раздела 5 ниже приводятся в виде двух теорем.

Теорема 5.4-1. Для двухслойных по времени ПКРС (10)-(13) в эйлеровых переменных регуляризация потоков массы, импульса и внутренней энергии адаптивной вязкостью в виде (15) для уравнения неразрывности, (25) – для уравнения импульса и (36) – для уравнения внутренней энергии не нарушает свойств полной консервативности данного семейства разностных схем.

Теорема 5.4-2.

1. При выборе адаптивной вязкости $\left(\frac{\nu}{h} \right)_{i\pm 1/2}$ для уравнения неразрывности в

форме (16) с нулевыми однородными граничными условиями по плотности ρ в граничных ячейках Ω и с “замороженной” скоростью $u_{i-1/2} = u_{i+1/2} = u = const$ на границах ячеек пространственной сетки Ω_i на

явном и неявном слоях по времени, а также выполнением условий (19)-(21) имеет место оценка $\|\hat{\rho}\|_c \leq \|\rho\|_c$.

2. При выборе адаптивной вязкости $\left(\frac{\nu u}{h}\right)_{i,i+1}$ для регуляризатора

уравнения импульса в виде (26) с нулевыми однородными граничными условиями по скорости в граничных узлах ω и с “замороженными” потоками массы в ячейках $\mu_{D i} = \mu_{D i+1} = \mu_D = const$ вокруг узла сетки $i+1/2$, а также с “замороженными” на явном и неявном слоях по времени приузловыми массами $m_{i-1/2} = m_{i+1/2} = m_{i+3/2} = m = const$ и выполнением условий (28)-(30) имеет место оценка для импульсов узлов $\|\hat{I}\|_c \leq \|I\|_c$.

3. При выборе адаптивной вязкости $\left(\frac{\nu E}{h}\right)_{i\pm 1/2}$ для регуляризатора

уравнения внутренней энергии в виде (37) с нулевыми однородными граничными условиями по внутренней энергии E в граничных ячейках Ω и с “замороженной” скоростью $u_{i-1/2} = u_{i+1/2} = u = const$ на границах ячеек пространственной сетки Ω_i на явном и неявном слоях по времени, а также выполнением условий (40)-(42) имеет место оценка $\|\hat{E}\|_c \leq \|E\|_c$.

Заключение

Для уравнений газовой динамики в эйлеровых переменных с использованием операторного подхода и конструированием регуляризирующих потоков массы, импульса и внутренней энергии, не нарушающих свойств полной консервативности, построено семейство двуслойных по времени полностью консервативных разностных схем с профилированными по пространству временными весами, связанными с переменными массами движущихся узловых частиц среды. Эффективное сохранение баланса внутренней энергии в данном типе дивергентных разностных схем обеспечивается отсутствием постоянно действующих источников разностного происхождения, производящих «вычислительную» энтропию (в том числе на сингулярных особенностях решения). Разработанные схемы несложно обобщить с целью расчета высокотемпературных течений в средах, неравновесных по температуре (например, в плазме при различии температур электронной и ионной компонент), когда при необходимом для описания течения наборе переменных недостаточно одного уравнения баланса полной энергии.

Библиографический список

1. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. М.: Наука, 1992.
2. Попов Ю.П., Самарский А.А. Полностью консервативные разностные схемы // ЖВМиМФ. 1969. Т. 9, № 4. С. 953-958.
3. Кузьмин А.В., Макаров В.Л. Об одном алгоритме построения полностью консервативных разностных схем // ЖВМиМФ. 1982. Т. 22, № 1. С. 123-132.
4. Кузьмин А.В., Макаров В.Л., Меладзе Г.В. Об одной полностью консервативной разностной схеме для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1980. Т. 20, № 1. С. 171-181.
5. Головизнин В.М., Краюшкин И.В., Рязанов М.А., Самарский А.А. Двумерные полностью консервативные разностные схемы газовой динамики с разнесенными скоростями // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1983. № 105. 33 с.
6. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Двухслойные полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики в переменных Эйлера // ЖВМиМФ. 1987. Т. 27, № 5. С. 779-784.
7. Колдоба А.В., Кузнецов О.А., Повещенко Ю.А., Попов Ю.П. Об одном подходе к расчету задач газовой динамики с переменной массой квазичастицы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1985. № 57. 14 с.
8. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. Полностью консервативные разностные схемы для уравнений газовой динамики при наличии источников массы // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша АН СССР. 1982. № 160. 14 с.
9. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996.
10. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теорий упругости // Математическое моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.
11. Повещенко Ю.А., Подрыга В.О., Шарова Ю.С. Интегрально-согласованные методы расчета самогравитирующих и магнитогидродинамических явлений // Препринты ИПМ им М.В. Келдыша. 2018. № 160. 21 с.
12. Попов Ю.В., Фрязинов И.В. Метод адаптивной искусственной вязкости численного решения уравнений газовой динамики. М.: Красанд, 2015.
13. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971.

Оглавление

1. Введение.....	3
2. Постановка задачи.....	4
3. Полностью консервативная дифференциально-разностная схема	4
4. Двухслойная по времени полностью консервативная разностная схема в эйлеровых переменных	7
5. Искусственная вязкость для полностью консервативных разностных схем в эйлеровых переменных	8
Заключение.....	21
Библиографический список.....	22