ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 133 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ахметшин Р.З.

Примеры решения «неполной» краевой задачи для многовитковых перелетов на геостационарную орбиту с нулевой тягой в области тени

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ахметшин Р.З. Примеры решения «неполной» краевой задачи для многовитковых перелетов на геостационарную орбиту с нулевой тягой в области тени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 133. 32 с. http://doi.org/10.20948/prepr-2019-133
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-133

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Р.З. Ахметшин

Примеры решения «неполной» краевой задачи для многовитковых перелетов на геостационарную орбиту с нулевой тягой в области тени

Москва — 2019

Ахметшин Р.З.

Примеры решения «неполной» краевой задачи для многовитковых перелетов на геостационарную орбиту с нулевой тягой в области тени

Рассматриваются перелеты космического аппарата в центральном ньютоновом поле Земли с высокоэллиптических орбит на геостационарную орбиту с малой тягой, которая обнуляется при попадании в тень Земли. Для получения таких перелетов решается двухточечная краевая задача, названная "неполной", поскольку в ней не учитываются условия оптимального пересечения границ тени. Показано, что если долгота восходящего узла начальной орбиты $\Omega_0 = 180^0$, то таким образом можно получать траектории, близкие по затратам рабочего вещества к траекториям "номинальным" (без обнуления тяги). А для траекторий продолжительностью полгода или меньше за счет выбора наилучших Ω_0 затраты получаются меньше номинальных.

Ключевые слова: многовитковые траектории, космический аппарат, малая тяга, геостационарная орбита, тень Земли, двухточечная краевая задача

Rauf Zulfarovich Akhmetshin

Some examples of “non-completed” boundary value problem solutions for multi-orbital transfers to geostationary orbit with zero thrust in the shadow

Transfers in the central Newtonian field from high-elliptical orbits to geostationary one of a spacecraft with low thrust, which becomes zero in the Earth shadow, are considered. To find such trajectories so called "non-completed" two-point boundary value problem that do not include a condition of optimal crossing the shadow boundary is solved. It's shown that when a longitude of ascending node Ω_0 is equal to 180^0 expenditures of working substance are not much more than for a basic transfer (without switching the low thrust off). If Ω_0 is chosen the best and the duration of flight is half-year or smaller then expenditures are less than for a basic transfer.

Key words: multi-orbital trajectories, spacecraft, low thrust, geostationary orbit, Earth shadow, two-point boundary value problem

«Неполная» краевая задача «возникла» при попытке учесть влияние обнуления малой тяги (МТ) в области тени на траекторию перелета на геостационарную орбиту (ГСО) космического аппарата (КА) с питанием от солнечных батарей. Влияние тени рассматривалось в различных работах, использовавших как прямые, так и непрямые методы оптимизации, методы осреднения уравнений движения, синтез управления с обратной связью [1–7].

«Неполная» краевая задача получается из задачи управления малой тягой, с возможностью включения и выключения электроракетных двигателей (ЭРД), формальной заменой функции переключения (величины тяги с минимального значения на максимальное и обратно) на функцию тени. В результате получаем управление с постоянной по величине малой тягой, которая обнуляется только при попадании КА в тень Земли. Однако, в отличие от задачи с функцией переключения, решениями которой являются оптимальные по расходу рабочего вещества траектории, в случае с функцией тени траектории уже не оптимальны. В случае с тенью должны дополнительно выполняться условия оптимального пересечения границ тени. Это т.н. условия скачка в сопряженных переменных. В их отсутствие краевая задача оказывается неполной.

Тем не менее, такая «неполная» краевая задача была сформулирована и рассмотрена в [8]. Объяснялось это, с одной стороны, тем, что такая задача существенно проще «полноценной» краевой задачи, а также желанием воспользоваться имевшимися наработками (программами, в которых необходимо было заменить одну функцию и ее производные на другую). С другой стороны, из-за отсутствия опыта в решении задач со скачками в сопряженных переменных, было непонятно, насколько важны условия скачка и нельзя ли обойтись без них, если получаемые решения будут близки к оптимальным.

Отдельные расчеты, проведенные в [8], показали, что решения «неполной» краевой задачи могут быть очень близки к номинальной траектории (без выключения тяги в области тени) и даже могут быть лучше ее по функционалу (затратам рабочего вещества), но могут быть и значительно хуже. Более подробные расчеты [9] на примере одной номинальной траектории показали, что дополнительные затраты могут превышать 30% от номинала. Они же показали, что для каждой даты старта в течение года можно подобрать долготу восходящего узла начальной орбиты, такую, что затраты рабочего вещества будут меньше, чем на номинальной траектории.

Чтобы понять, насколько типична такая ситуация, были проведены подробные расчеты для нескольких номинальных траекторий, различающихся по продолжительности перелета, количеству витков и другим параметрам.

Результаты расчетов приведены в данной работе.

«Неполная» краевая задача

Напомним, в какой постановке решается краевая задача [9]. Будем использовать уравнения оптимального движения КА с постоянно работающими

ЭРД постоянной по величине малой тяги с питанием от солнечных батарей из работы [10]. Они описывают движение в центральном ньютоновом поле Земли, без учета гравитационного влияния Солнца и Луны и других возмущающих факторов, и имеют вид:

$$d\mathbf{x} / dt = \boldsymbol{F}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}), \quad d\boldsymbol{\lambda} / dt = \boldsymbol{\Phi}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

где t – время, $\mathbf{x} = < \varphi, m, h, y, z, v, w >$ – вектор фазовых переменных, $\boldsymbol{\lambda} = < \lambda_\varphi, \lambda_m, \lambda_h, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_v, \lambda_w >$ – вектор сопряженных переменных. Здесь m – масса КА, а φ, h, y, z, v, w – равноденственные переменные, которые определяются через гравитационную постоянную Земли μ_E и оскулирующие переменные $p, e, \theta, \omega, \Omega, i$ формулами:

$$h = (\mu_E / p)^{1/2}, \; y = e \cdot \cos(\omega + \Omega), \; v = \cos\Omega \cdot \tan(i / 2),$$
$$\varphi = \theta + \omega + \Omega, \; z = e \cdot \sin(\omega + \Omega), \; w = \sin\Omega \cdot \tan(i / 2).$$

В отличие от [10], будем предполагать, что если КА попадает в тень Земли, то тяга обнуляется. Будем использовать модель “цилиндрической” тени. Для нее функция тени Sh конкретизирована в [8]:

при $R_E + h_{\min} < r$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) < 0$: $\quad Sh = 1 - (R_E^{\,2} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^{\,2}) / r^2$,
при $R_E + h_{\min} < r$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) \geq 0$: $\quad Sh = 1 - R_E^{\,2} / r^2$,
при $R_E + h_{\min} \geq r$: $\quad Sh = 1 - R_E^{\,2} / (R_E + h_{\min})^2$,

где $\mathbf{r}$ – радиус-вектор КА, $\mathbf{R}_S$ – радиус-вектор Солнца, $r = |\mathbf{r}|$, $R_S = |\mathbf{R}_S|$, R_E – радиус Земли, $h_{\min}$ – заданная константа (например, высота атмосферы). Функция тени определяет величину тяги: если $Sh < 0$ – тяга нулевая, иначе тяга максимальная.

Заданы начальная и конечная орбиты, между которыми необходимо осуществить перелет. То есть необходимо найти начальные значения сопряженных переменных $\boldsymbol{\lambda}_0$, такие, чтобы в конечный момент времени КА вышел на конечную орбиту.

Дополнительно полагается, что КА стартует из перигея начальной орбиты (т.е. $\theta_0 = 0$), а конечный момент времени определяется заданной угловой дальностью перелета, а именно, целым количеством витков N в переменной φ ($\varphi_к = \varphi_0 + 2\pi N$). Как правило, значение N подбирается оптимальным, для чего приходится решать несколько краевых задач.

Замечание 1. Получившаяся «краевая» задача очень похожа на краевую задачу в [10] без тени, но с возможностью включения/выключения ЭРД. Разница между ними в том, что в [10] величина тяги определяется функцией переключения Sw (если $Sw < 0$ – тяга нулевая, иначе тяга максимальная), а в данном случае – функцией тени Sh.

Замечание 2. От «полноценной» краевой задачи с тенью «неполная» краевая задача отличается тем, что в ней не учитываются условия оптимального пересечения границ тени, т.н. условия скачка в сопряженных переменных [11]:

$$\boldsymbol{\lambda}^{+} = \boldsymbol{\lambda}^{-} + \mu \cdot \partial G / \partial \mathbf{x} ,$$

где $G = Sh$, $\boldsymbol{\lambda}^{-}$ и $\boldsymbol{\lambda}^{+}$ – значения сопряженных переменных слева и справа от границы тени. Другими словами, можно сказать, что в «неполной» краевой задаче в условиях скачка полагается $\mu = 0$.

Замечание 3. В качестве конечной орбиты здесь, как и в [8–9], будем рассматривать геостационарную орбиту, а в качестве начальной – орбиты из табл. 1. Характеристики соответствующих траекторий перелета с постоянной тягой (без обнуления ее в области тени), т.н. «номинальных», представлены в табл. 2. Там же приведены начальные значения массы КА $M_{КА}$ и затраты рабочего вещества на перелет $M_{РВ}$.

Таблица 1

Примеры начальных орбит, с которых осуществляется перелет на ГСО с помощью малой тяги

	H_π [тыс. км]	H_α [тыс. км]	R_π [тыс. км]	R_α [тыс. км]	e	i [град]	T [сут]
1	23	55.6	29.371	61.971	0.3569	4	1.124
2	9.2	76.8	15.571	83.171	0.6846	13	1.264
3	2.793	78.8	9.164	85.171	0.8057	26	1.180
4	0.793	79.8	7.164	86.171	0.8465	41	1.161
5	0.793	68.94	7.164	75.311	0.8263	46.5	0.965

H_π, R_π – высота и радиус перигея, H_α, R_α – высота и радиус апогея, e – эксцентриситет, i – наклонение, T – период.

Таблица 2

«Номинальные» траектории перелета на ГСО (в отсутствие возмущений)

	1	2	3	4	5
Δi [град]	4	13	26	41	46.5
N [витки]	65	157	232	281	103
T [сут]	69.1	180	269.7	343.9	120.3
$M_{КА}$ [кг]	4287	5548	6397	7074	2325
$M_{РВ}$ [кг]	186.3	485.3	727.2	927.3	324.2
a [мм/с^2]	$1.28 \cdot 10^{-3}$	$0.99 \cdot 10^{-3}$	$0.86 \cdot 10^{-3}$	$0.77 \cdot 10^{-3}$	$2.36 \cdot 10^{-3}$

Δi – изменение наклонения, N – количество витков, T – продолжительность перелета, $M_{КА}$ – начальная масса КА, $M_{РВ}$ – затраты рабочего вещества, a – ускорение МТ.

Первые четыре траектории по продолжительности перелета условно названы: 1) «короткая» – 2.3 месяца, 2) «средняя» – 6 месяцев, 3) «длинная» – 9 месяцев и 4) «очень длинная» – почти год (11.5 месяцев); последняя (4 месяца) – траектория перелета «легкого» КА.

Говоря о номинальных траекториях, мы имеем в виду, что заданы все параметры начальной орбиты, которые определяют ее конфигурацию и положение относительно конечной орбиты, в частности, параметр ω задан нулевым [12]. Два параметра: Ω_0 и $\tau = t_0$ – в отсутствие возмущающих факторов, упоминавшихся выше, не влияют на конфигурацию траектории перелета и на минимизируемый функционал (затраты рабочего вещества). Но они влияют на траектории перелета в случае обнуления тяги в области тени и поэтому будут рассматриваться в качестве параметров «неполной» краевой задачи. А соответствующие им траектории можно будет сравнивать по функционалу с номинальными траекториями.

Короткая номинальная траектория (2.3 месяца)

Результаты расчетов представлены в табл. 3 и на рис. 1–4. Приведены значения ΔM_{PB} дополнительных затрат на перелет (при обнулении тяги на теневых участках) в процентах от номинальных затрат. Общее представление о том, как зависит ΔM_{PB} от параметров Ω_0 и t_0, можно получить из табл. 3, даже несмотря на то, что в ней шаг по времени старта большой и составляет 1.5 месяца. По параметру Ω_0 шаг 10^0. Прочерки в колонках для t_0 = 137 и 320, а также частично для t_0 = 91, означают, что в этих случаях на траектории вообще нет теневых участков. Таких позиций в таблице 79. В 71 случае $\Delta M_{PB} < 0$, в 25 случаях $\Delta M_{PB} > 2\%$ (они выделены жирным шрифтом). В остальных 105 случаях $0 < \Delta M_{PB} \leq 2\%$. Если условно считать, что $\Delta M_{PB} \leq 2\%$ – это хороший результат, то плохих вариантов совсем немного – менее 8.7% от представленных в таблице.

На рис. 1–3 результаты представлены более подробно – с шагом по времени 5 суток. По параметру Ω_0 шаг 20^0. Если сравнивать представленные графики $\Delta M_{PB}(t_0)$ по критерию, на каком из них наибольшее значение самое маленькое, то лучшим оказывается график для $\Omega_0 = 180^0$: максимальное значение < 1.5% (рис. 3). Все результаты собраны на итоговом графике на рис. 2. Из него видно, что наихудший результат $\Delta M_{PB} \approx 10\%$ при t_0 = 220 суток и $\Omega_0 = 60^0$. В диапазоне дат 120 – 170 и 305 – 350 суток на траекториях нет участков с тенью при любых значениях Ω_0. Наилучшие результаты представлены в более удобном масштабе на рис. 3. Минимальные значения были получены с точностью до 1^0 по параметру Ω_0. Примечательно, что для всех дат t_0, при которых на траектории есть участки с тенью, минимальные значения ΔM_{PB} отрицательны. Здесь же для сравнения приведен график для $\Omega_0 = 180^0$.

Таблица 3

Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ («короткая» траектория)

t_0 [сут]	0	46	91	137	183	228	274	320
Ω_0	$\Delta M_{РВ}$ % от $M_{РВ}$ = 186.3 кг (2% – 3.7 кг)							
0^0	-0.00	0.40	0.10	--	0.34	1.44	0.41	--
10^0	-0.03	0.49	0.05	--	0.32	1.66	0.41	--
20^0	-0.07	0.75	0.02	--	0.29	**2.22**	0.37	--
30^0	-0.13	0.92	--	--	0.24	**3.27**	0.31	--
40^0	-0.18	0.61	--	--	0.19	**4.64**	0.25	--
50^0	-0.22	-0.13	--	--	0.11	**6.09**	0.17	--
60^0	-0.21	-0.65	--	--	0.01	**7.38**	0.10	--
70^0	-0.16	-0.82	--	--	-0.07	**7.87**	0.04	--
80^0	-0.05	-0.40	--	--	-0.13	**7.01**	-0.00	--
90^0	0.04	0.44	--	--	-0.16	**4.52**	-0.03	--
100^0	0.12	1.29	-0.01	--	-0.16	0.97	-0.04	--
110^0	0.19	**2.15**	-0.01	--	-0.13	-0.12	-0.03	--
120^0	0.25	**2.56**	-0.01	--	-0.10	1.42	-0.02	--
130^0	0.31	**2.66**	0.00	--	-0.06	1.76	-0.01	--
140^0	0.35	**2.44**	0.02	--	-0.03	1.53	-0.01	--
150^0	0.38	**2.09**	0.06	--	-0.01	1.05	-0.00	--
160^0	0.39	1.61	0.10	--	-0.00	0.67	0.01	--
170^0	0.40	1.25	0.15	--	-0.00	0.43	0.03	--
180^0	0.39	1.10	0.19	--	-0.01	0.35	0.08	--
190^0	0.36	1.19	0.23	--	-0.03	0.40	0.15	--
200^0	0.31	1.54	0.26	--	-0.06	0.52	0.22	--
210^0	0.26	**2.17**	0.28	--	-0.08	0.60	0.19	--
220^0	0.20	**2.86**	0.30	--	-0.11	0.52	0.12	--
230^0	0.14	**3.81**	0.30	--	-0.12	0.15	0.03	--
240^0	0.06	**4.55**	0.29	--	-0.12	-0.36	-0.07	--
250^0	-0.05	**5.22**	0.25	--	-0.10	-0.66	-0.15	--
260^0	-0.13	**5.36**	0.19	--	-0.06	-0.59	-0.23	--
270^0	-0.18	**4.55**	0.08	--	-0.01	0.03	-0.29	--
280^0	-0.19	**2.76**	-0.05	--	0.06	0.89	-0.25	--
290^0	-0.17	-0.24	-0.17	--	0.12	1.93	-0.13	--
300^0	-0.13	0.40	-0.25	--	0.19	**2.67**	0.04	--
310^0	-0.09	1.28	-0.23	--	0.25	**3.00**	0.20	--
320^0	-0.05	1.43	-0.12	--	0.31	**2.77**	0.29	--
330^0	-0.01	1.17	-0.00	--	0.33	**2.28**	0.35	--
340^0	0.01	0.80	0.10	--	0.34	1.83	0.39	--
350^0	0.01	0.52	0.13	--	0.35	1.53	0.41	--

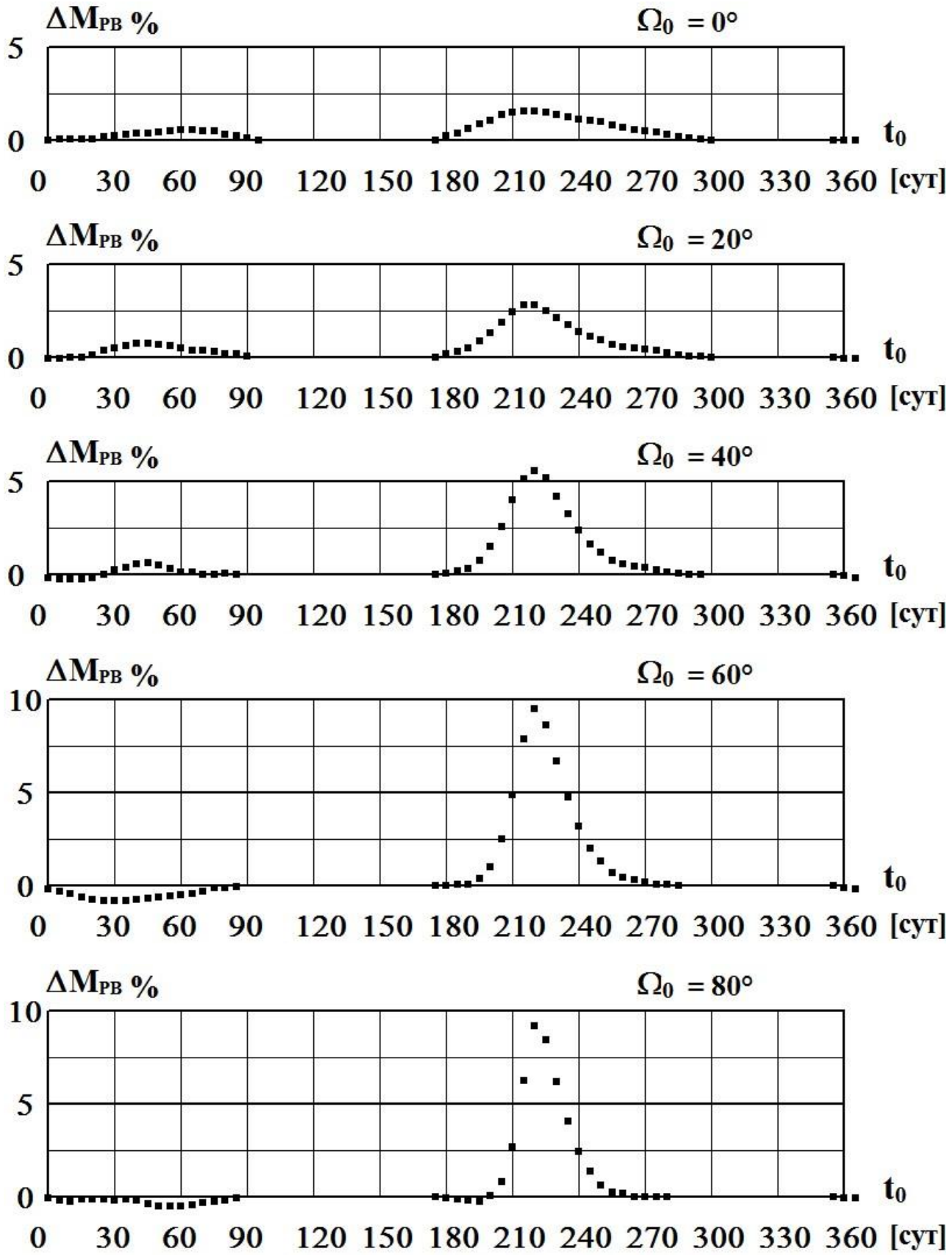

Рис. 1(а). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 0^0, 20^0, 40^0, 60^0, 80^0$ («короткая» траектория).

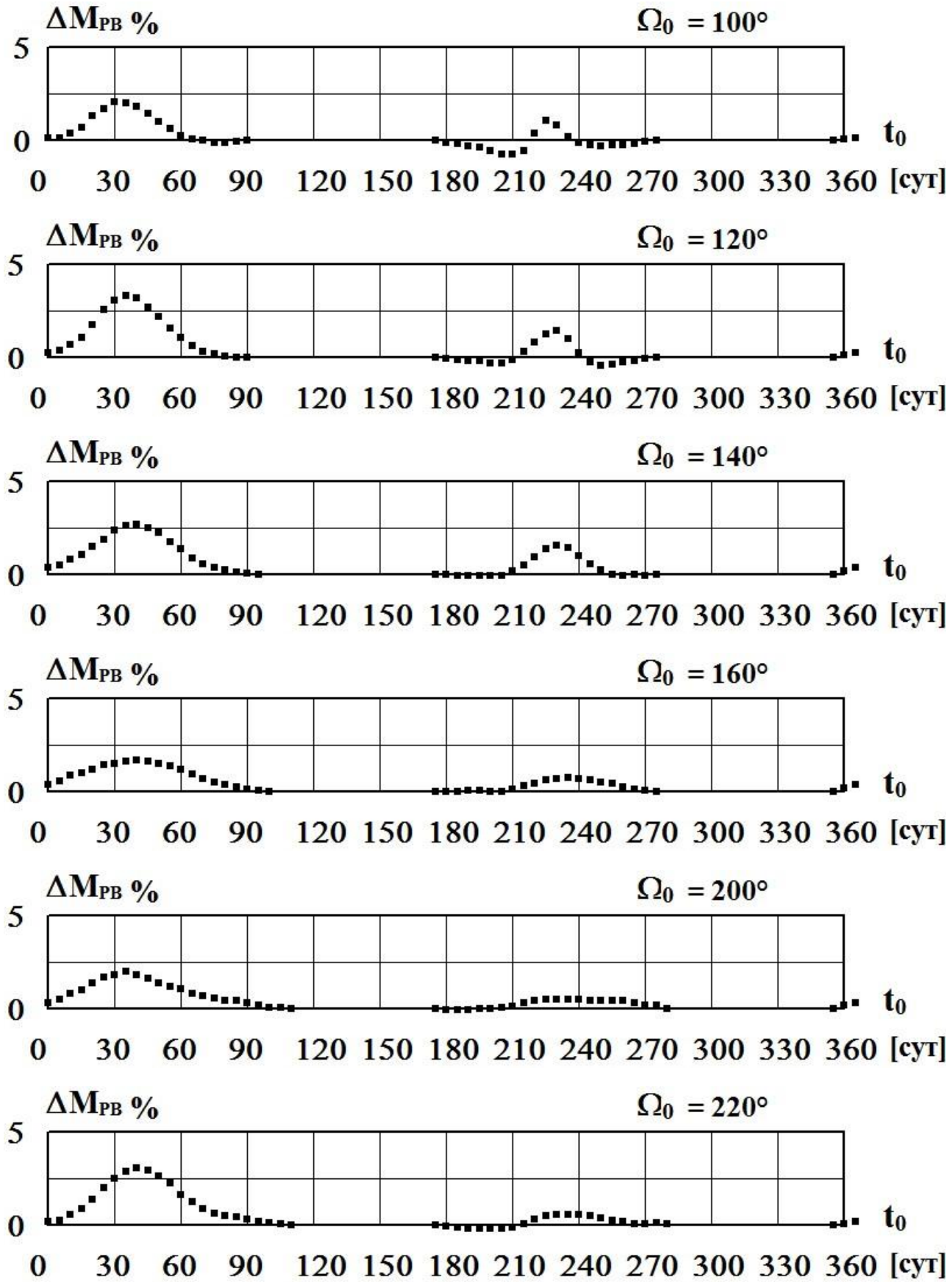

Рис. 1(б). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 100^0$, 120^0, 140^0, 160^0, 200^0, 220^0 («короткая» траектория).

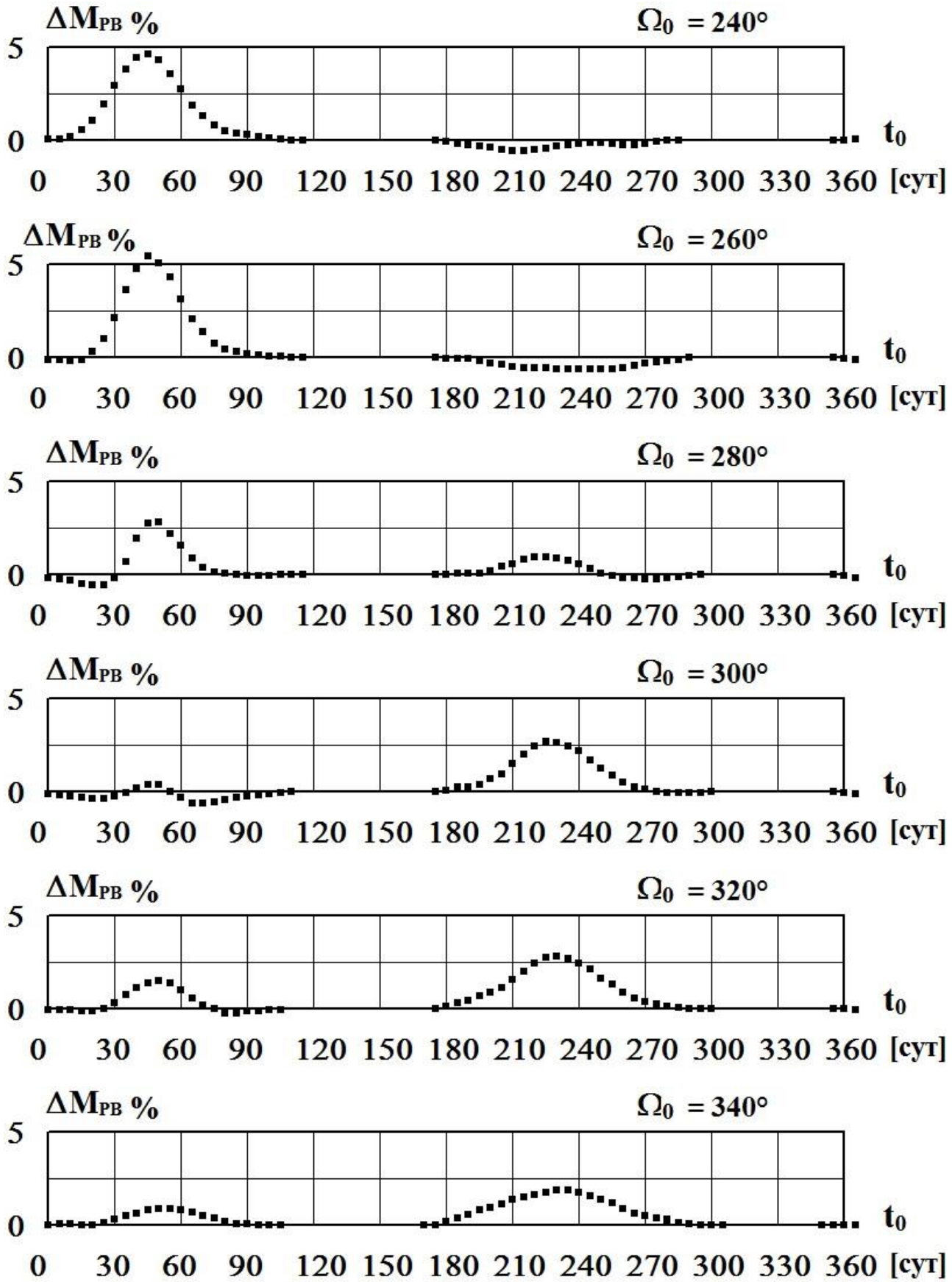

Рис. 1(в). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 240^0$, 260^0, 280^0, 300^0, 320^0, 340^0 («короткая» траектория).

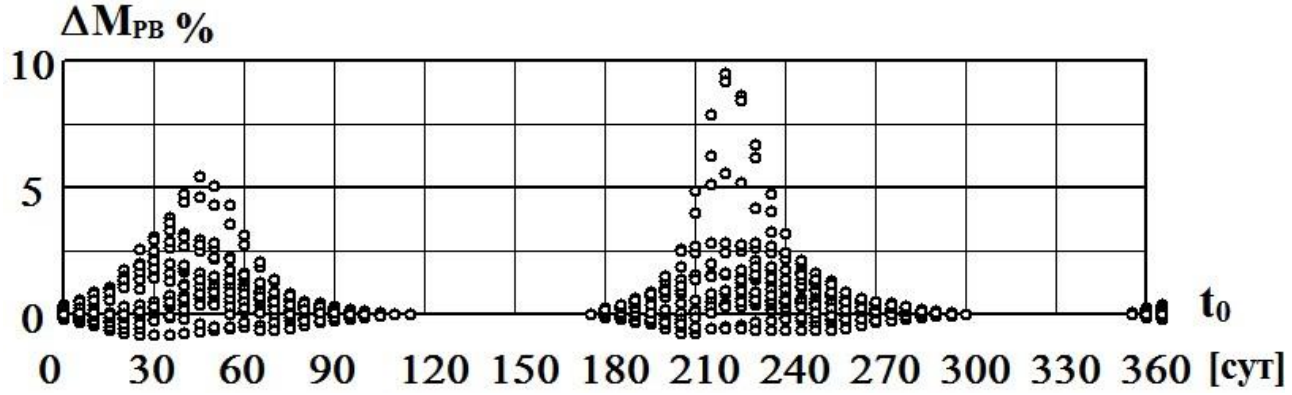

Рис. 2. Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для всех Ω_0 с рис. 1(а)-(в) («короткая» траектория).

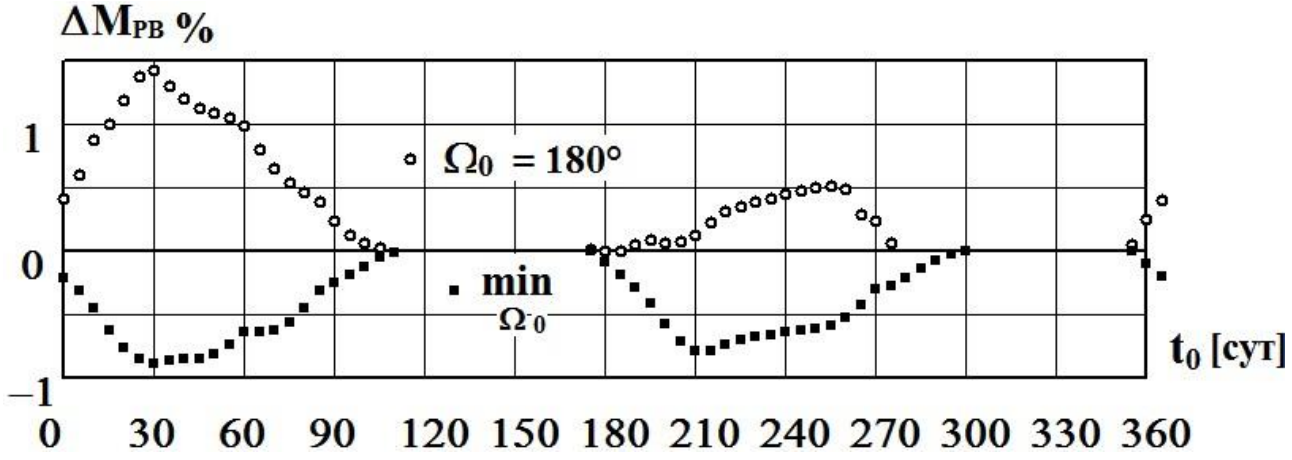

Рис. 3. Минимальные значения $\Delta M_{РВ}$ по параметру Ω_0 и значения $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 180^0$ («короткая» траектория).

На первый взгляд это выглядит несколько неожиданным, поскольку возмущения обычно приводят к ухудшению результатов. Но в случае с тенью все объясняется просто. Возможность включения/выключения ЭРД расширяет возможности управления и позволяет получить лучшие результаты по сравнению со случаем постоянно работающей тяги, при условии, что моменты включения/выключения тяги выбираются оптимальными или по крайней мере так, что во время пауз функция переключения отрицательна. И в случае с короткой траекторией добиться этого удается, по-видимому, хотя бы для части участков с тенью за счет поворота траектории выбором параметра Ω_0.

В [9], где проводились расчеты для средней номинальной траектории, было выявлено, что могут существовать разные ветви решений. Для короткой номинальной траектории, после того как были получены решения, представленные на рис. 1, казалось, что все устроено гораздо проще. И хотя иногда получались и иные – побочные решения (это может происходить, когда в процессе итерационного поиска на каких-то витках исчезают участки с тенью, либо, наоборот, появляются), представлялось, что поскольку траектория короткая, то вряд ли могут существовать другие полноценные ветви. Оказалось,

однако, что другие ветви могут существовать, причем во всем рассматриваемом диапазоне дат.

На рис. 4 для $\Omega_0 = 140^0$ приведен пример двух ветвей. Вторая ветвь для всех значений t_0 хуже первой (основной) и выглядит несколько странно – как бы сама состоящая из нескольких подветвей. На рисунке разные подветви побочной ветви отмечены разными значками, с указанием соответствующего N. Связано это с тем, что понимать под ветвью. Так как для заданных (t_0, Ω_0) обычно существует много решений с разным количеством витков N, то, как правило, при решении краевой задачи выбирается наилучшее N. И если с изменением t_0 меняется N, то ветвь действительно оказывается состоящей из нескольких подветвей, каждая со своим N. На основной ветви это практически незаметно, а на побочной видно очень хорошо. Это связано с тем, что для такого t_0 продолжение подветви уже невозможно, т.к. не существует решения с прежним значением N. А решение с бóльшим N существенно хуже. Например, при переходе от t_0 = 205 к 210 на рис. 4.

Необходимо отметить, что наличие второй ветви связано не только с наличием тени. Как оказалось, существует второе решение для задачи без тени, т.е. еще одна номинальная траектория с тем же значением N, но по функционалу хуже на 7.1%. И получено оно было в результате продолжения побочной ветви с тенью. На рис. 4 оно отмечено крестиками.

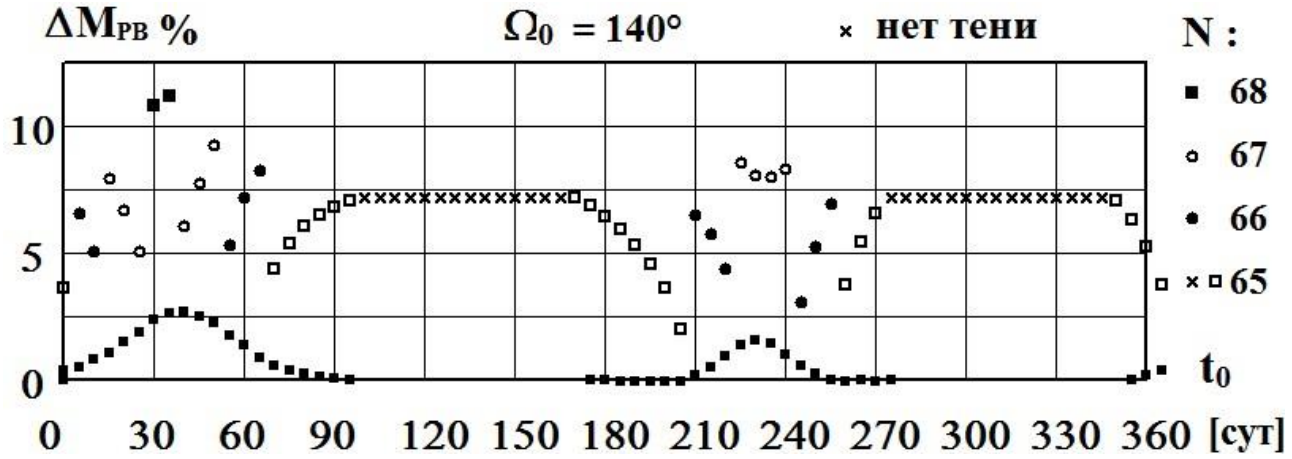

Рис. 4. Две ветви решений краевой задачи для $\Omega_0 = 140^0$
(«короткая» траектория).

Средняя номинальная траектория (6 месяцев)

Результаты расчетов представлены в табл. 4 и на рис. 5, 6.

Первое, что бросается в глаза при взгляде на таблицу – отсутствие прочерков, которых много в табл. 3. Как было показано в [8], на средней траектории всегда есть витки с тенью. Причина в том, что номинальная траектория более продолжительная (полгода) и более протяженная (157 витков). За полгода Солнце, а вместе с ним и цилиндр тени делают пол-оборота

Таблица 4

Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ («средняя» траектория)

t_0 [сут]	0	46	91	137	183	228	274	320
Ω_0	$\Delta M_{РВ}$ % от $M_{РВ}$ = 485.3 кг (2% – 9.7 кг)							
0^0	0.2	0.5	0.6	1.7	**3.5**	0.9	0.5	0.1
10^0	1.4	0.8	0.5	**8.8**	**6.9**	0.3	0.2	0.5
20^0	**2.4**	0.8	0.7	**20.4**	**10.6**	1.0	0.0	1.2
30^0	1.1	0.5	0.8	**27.2**	**13.3**	**2.4**	-0.1	1.1
40^0	0.1	-0.0	0.8	**29.7**	**14.7**	**3.4**	-0.2	0.4
50^0	-0.2	-0.2	0.8	**30.3**	**15.0**	**3.7**	-0.2	-0.1
60^0	0.1	-0.3	0.7	**30.0**	**14.7**	**3.4**	-0.3	-0.2
70^0	0.9	-0.2	0.4	**28.9**	**13.0**	**2.7**	-0.1	0.3
80^0	1.9	-0.0	0.1	**27.5**	**5.5**	1.8	0.2	1.5
90^0	**2.9**	0.2	-0.1	**4.9**	1.6	0.1	0.6	**3.0**
100^0	**3.8**	0.4	-0.2	1.3	0.0	-0.3	0.9	**4.5**
110^0	**4.5**	0.6	-0.2	-0.2	0.3	-0.2	1.1	**5.8**
120^0	**4.9**	0.8	-0.2	1.2	**2.9**	0.2	1.0	**6.5**
130^0	**4.8**	1.0	-0.2	**5.9**	**8.2**	0.5	0.8	**6.4**
140^0	**4.2**	1.0	-0.1	**5.0**	**5.9**	0.6	0.7	**5.4**
150^0	**3.2**	0.9	-0.1	**2.8**	**3.4**	0.5	0.5	**3.6**
160^0	1.9	0.8	-0.1	1.2	1.6	0.4	0.5	1.8
170^0	0.8	0.5	-0.1	0.3	0.5	0.3	0.5	0.7
180^0	0.4	0.2	-0.1	0.1	0.2	0.2	0.5	0.6
190^0	1.7	0.1	-0.1	0.3	0.4	0.3	0.6	1.7
200^0	**5.1**	0.7	-0.1	0.7	1.0	0.5	0.7	**5.2**
210^0	**8.8**	**2.1**	-0.1	0.9	1.3	0.8	0.8	**10.9**
220^0	**11.9**	**3.7**	-0.1	0.7	1.2	1.0	0.9	**16.2**
230^0	**14.5**	**5.2**	-0.1	0.2	0.7	0.8	0.8	**20.0**
240^0	**16.4**	**6.6**	0.0	-0.1	0.2	0.4	0.7	**22.8**
250^0	**18.0**	**7.8**	0.4	-0.2	-0.2	-0.0	0.5	**24.8**
260^0	**19.0**	**8.7**	0.9	0.1	-0.1	-0.2	0.1	**26.2**
270^0	**12.3**	**9.2**	1.4	0.8	0.4	-0.1	-0.3	**27.0**
280^0	**5.9**	**9.4**	1.8	2.0	1.5	0.4	-0.5	**4.1**
290^0	1.9	**4.4**	2.0	**3.4**	**3.0**	1.3	-0.4	0.7
300^0	-0.1	0.9	1.8	**4.8**	**5.0**	**2.2**	-0.2	-0.2
310^0	0.7	-0.2	1.0	**5.7**	**6.0**	**3.0**	0.1	1.7
320^0	**4.8**	1.4	0.2	**5.5**	**6.0**	**3.5**	0.4	**5.7**
330^0	**10.4**	**4.6**	0.2	**4.0**	**4.8**	**3.6**	0.7	**4.0**
340^0	**5.0**	**3.1**	0.4	1.9	**2.8**	**3.1**	0.7	2.0
350^0	1.5	1.3	0.5	0.6	1.8	2.0	0.6	0.5

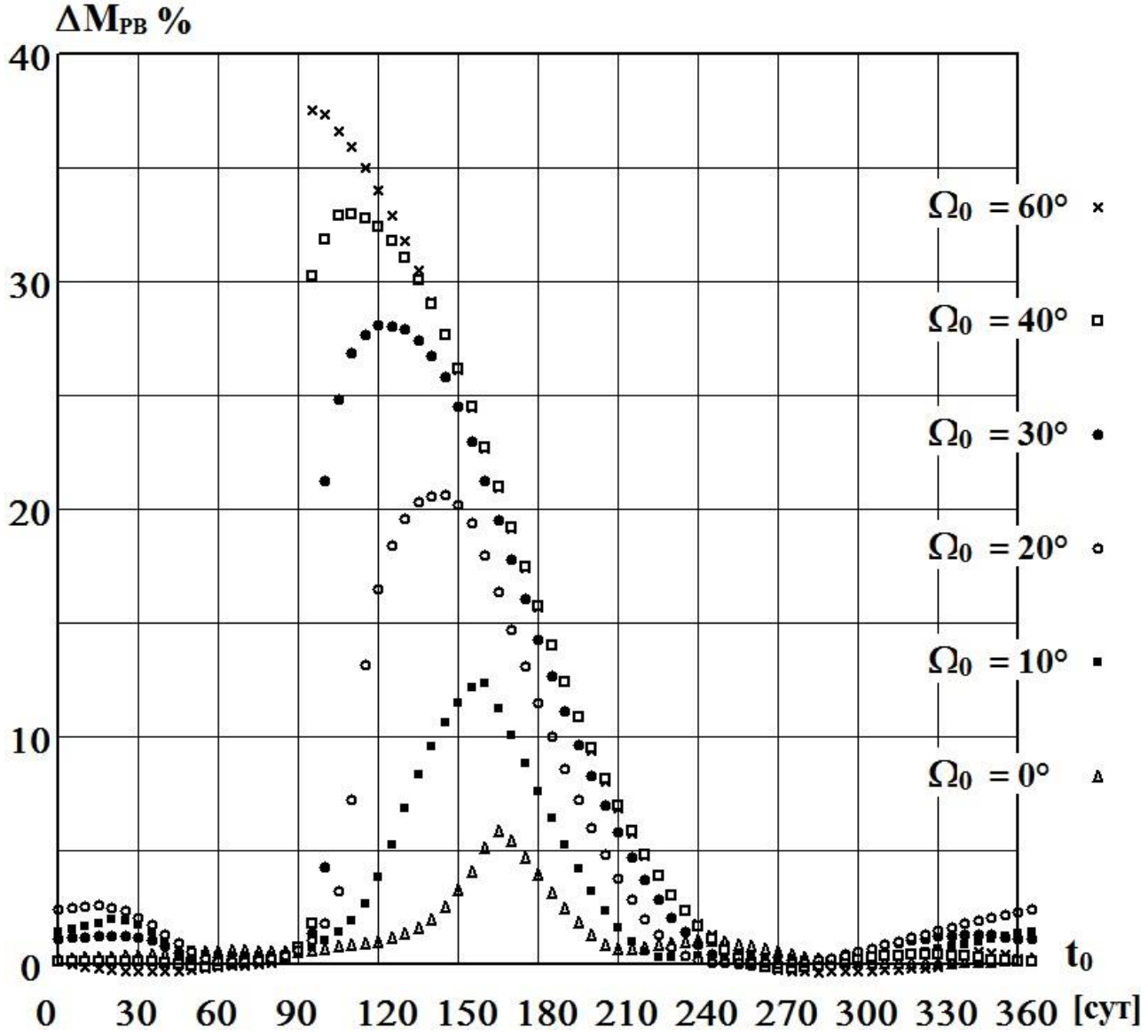

Рис. 5(а). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 0^0, 10^0, 20^0, 30^0, 40^0, 60^0$ («средняя» траектория).

вокруг оси Z небесной системы координат, и при любом положении номинальной траектории в пространстве, которое зависит от параметра Ω_0, какие-то витки обязательно пересекут цилиндр тени.

Второе, что также хорошо видно, – значительно больше плохих вариантов ($\Delta M_{РВ} > 2\%$), которые выделены жирным шрифтом. Таковых 95 (против 25 в табл. 3). Вариантов с $\Delta M_{РВ} \leq 0$ – 47, с $0 < \Delta M_{РВ} \leq 2\%$ – 146. Доля плохих, хороших и очень хороших из общего количества (288) представленных в таблице вариантов составляет соответственно 33%, 50.7% и 16.3%. Худшие результаты объясняются не только тем, что на более длинной траектории может быть больше витков с тенью, но и тем, что может быть две группы (последовательных) витков с тенью. Например, одна группа – в начале, вторая – в середине или в конце траектории. В таком случае часто меньше «маневренность», т.е. меньше возможностей изменить траекторию так, чтобы

минимизировать влияние тени. В случае с короткой траекторией могла существовать либо одна группа, либо ни одной. Все это выливается в то, что в плохих случаях дополнительные затраты могут превышать 30%, достигая максимума ≈ 37.5% при t_0 = 95, $\Omega_0 = 60^0$ (рис. 5а).

На рис. 5 (а-е) решения неполной краевой задачи представлены с шагом 5 суток по t_0 и 10^0 по Ω_0. Для короткой траектории зависимости ΔM_{PB} (t_0) для разных Ω_0 выглядели однообразно – в большинстве случаев два горба с разными по величине максимумами вблизи t_0 =40–60 и t_0 = 220–240. Иногда по краям горба или вместо него небольшие впадинки. Для средней траектории картина более сложная.

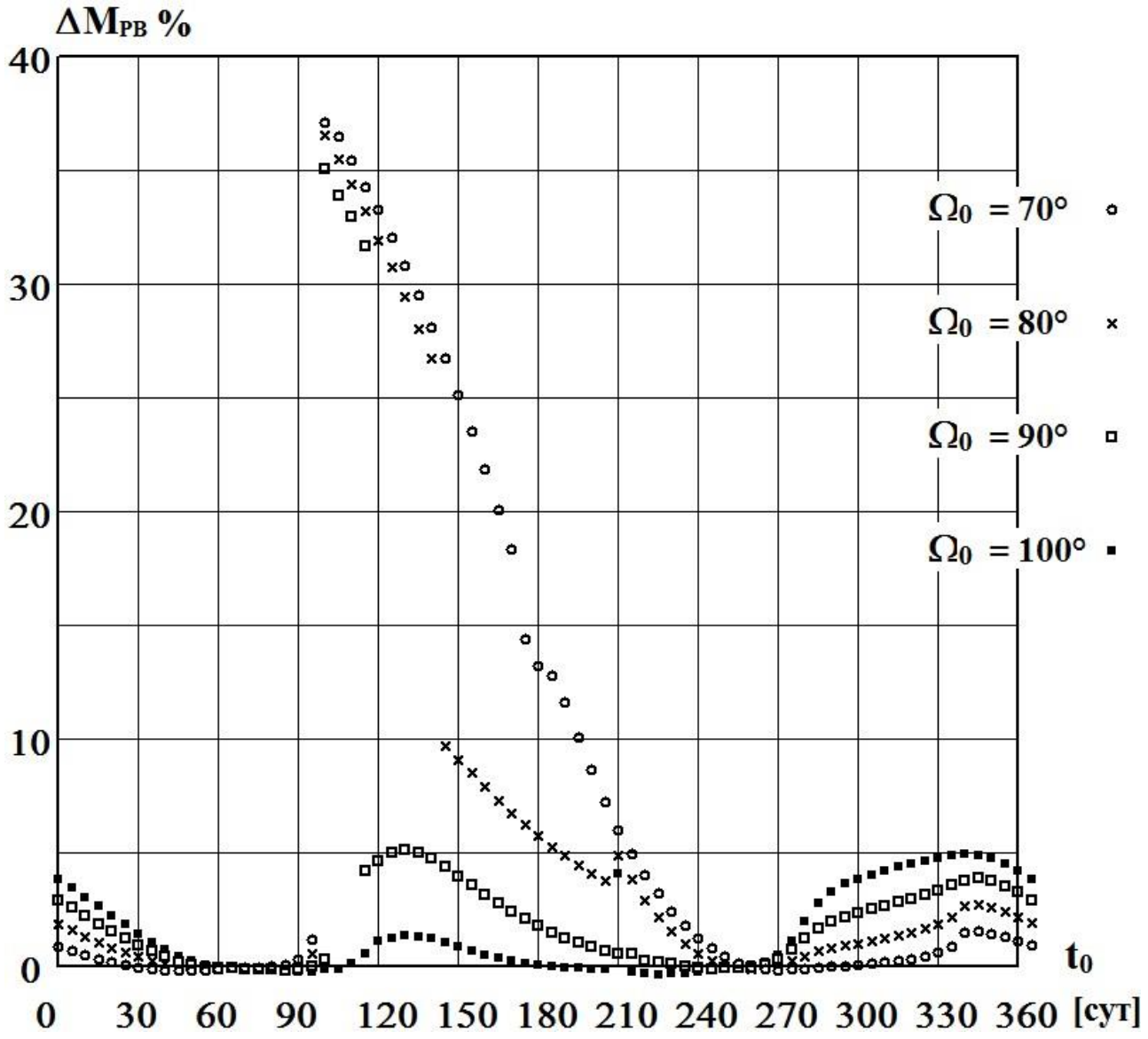

Рис. 5(б). Изменение массы рабочего вещества ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 70^0, 80^0, 90^0, 100^{0*}$ («средняя» траектория).

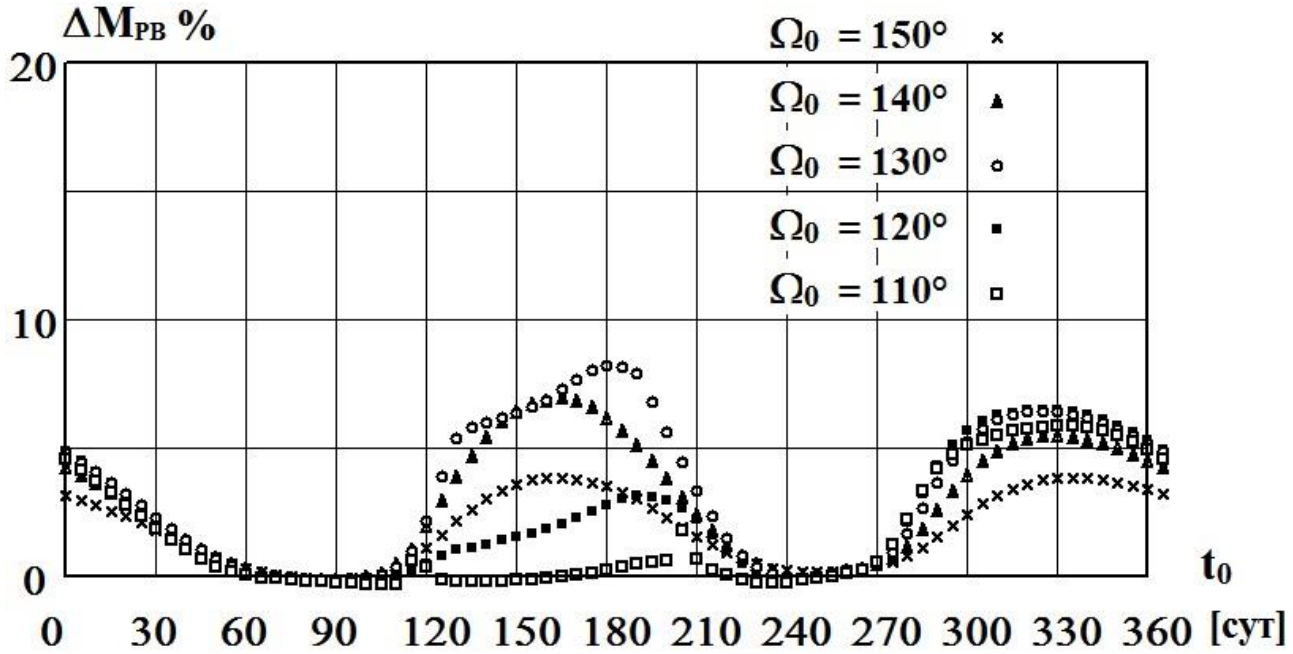

Рис. 5(в). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 110^0, 120^0, 130^0, 140^0, 150^0$ («средняя» траектория).

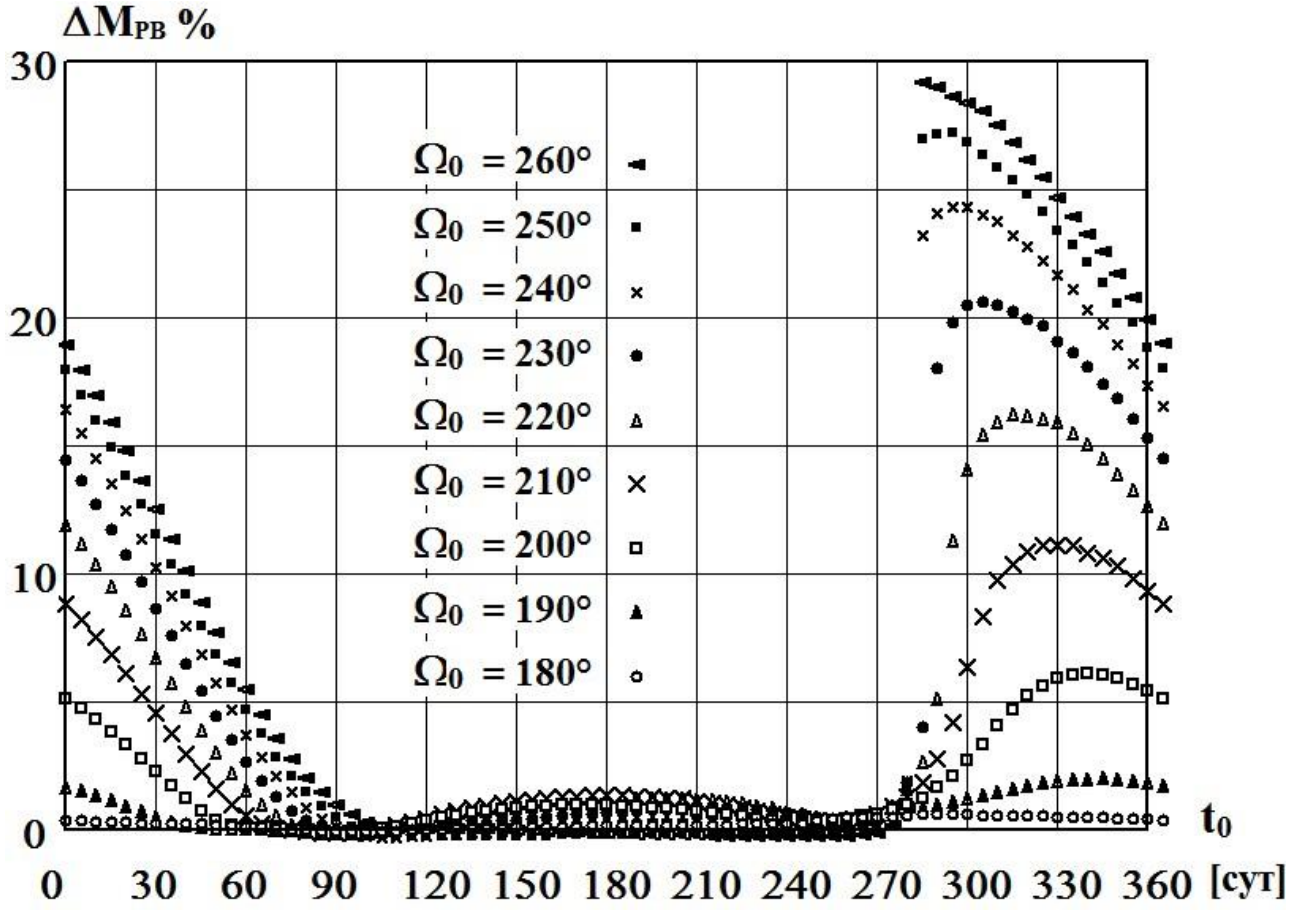

Рис. 5(г). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 180^0, 190^0, 200^0, 210^0, 220^0, 230^0, 240^0, 250^0, 260^0$ («средняя» траектория).

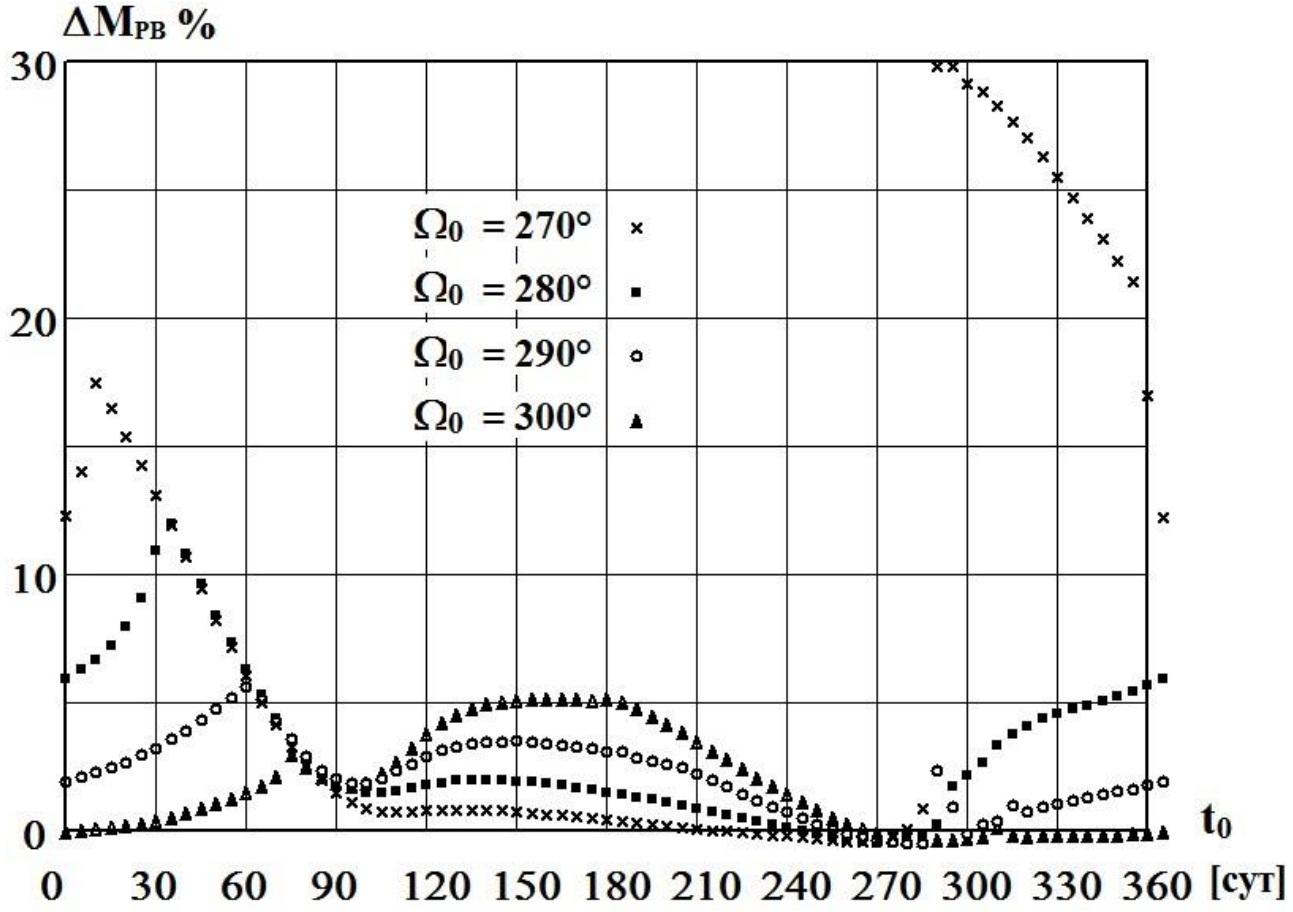

Рис. 5(д). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 270^0, 280^0, 290^0, 300^0$ («средняя» траектория).

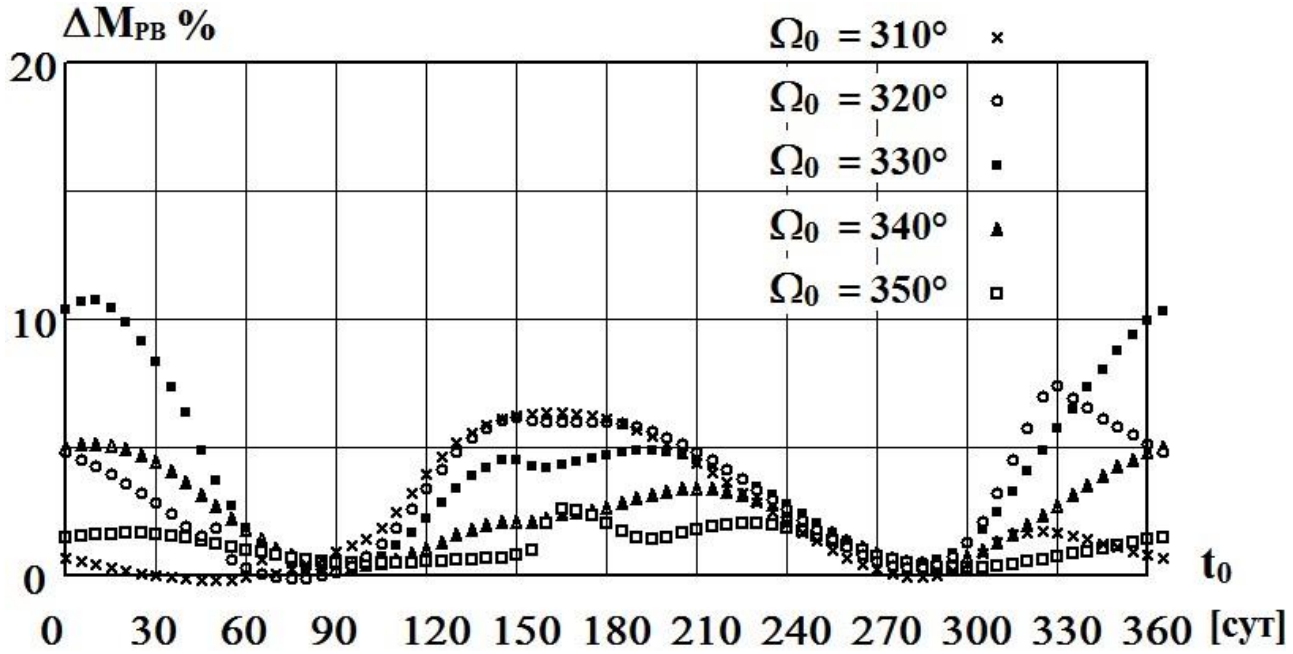

Рис. 5(е). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 310^0, 320^0, 330^0, 340^0, 350^0$ («средняя» траектория).

На рис. 5(а) видно, как с увеличением параметра Ω_0 от нуля до 60^0 горб постепенно увеличивается, причем левый склон становится все более крутым и для $\Omega_0 = 30^0 - 60^0$ превращается в обрыв. При этом решения представлены одной разомкнутой ветвью.

Решение для $\Omega_0 = 90^0$ на рис. 5(б) представлено двумя ветвями. Одна ветвь существует почти на всем интервале, за исключением короткого отрезка 105–110 суток, где решение представлено второй ветвью. На рисунке вторая ветвь показана 4 белыми квадратиками для t_0 = 100, 105, 110, 115. Слева и справа имеем обрывы для t_0 = 100 и 115. Аналогичная ситуация для $\Omega_0 = 80^0$.

Для $\Omega_0 = 270^0$ на рис. 5(д) решение также представлено двумя ветвями. Одна ветвь – разомкнутая, с обрывом при t_0 = 285 – существует на всем интервале. Вторая ветвь отмечена крестиками для t_0 = 0, 1 и 360, 365, где она дает меньшие ΔM_{PB}, чем первая ветвь. И эти ветви пересекаются при $t_0 \approx 10$ и 355. Другие решения на рис. 5(д) также состоят из разных ветвей.

Несмотря на то что треть всех вариантов в табл. 4 плохие, вариантов с $\Delta M_{PB} < 0$ тоже немало. Как следствие – минимальные по параметру Ω_0 значения ΔM_{PB} для всех значений t_0 рис. 6 отрицательны. Для сравнения также приведен график для $\Omega_0 = 180^0$.

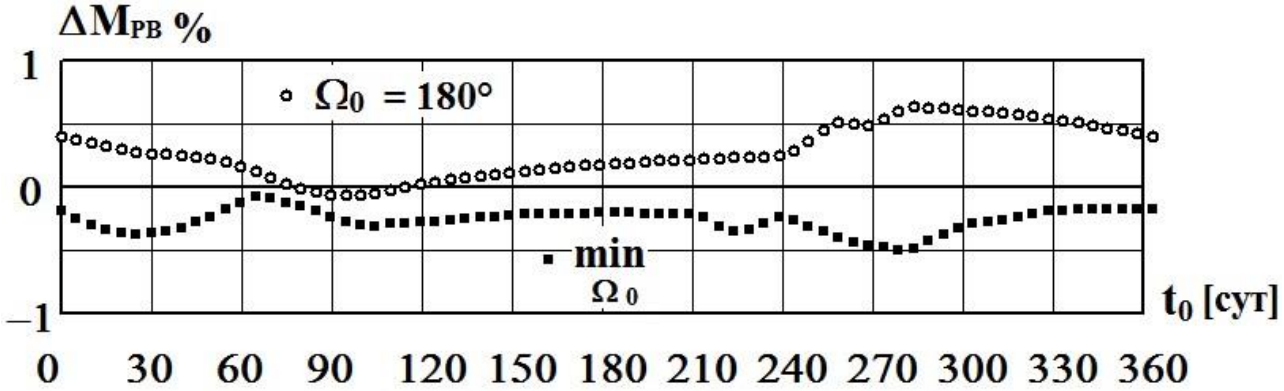

Рис. 6. Минимальные значения ΔM_{PB} по параметру Ω_0 и значения ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^0$ («средняя» траектория).

Длинная номинальная траектория (9 месяцев)

Результаты расчетов представлены в табл. 5 и на рис. 7–8. Отметим, что для t_0 = 228 и $\Omega_0 = 290^0$ (табл. 5) решение получить не удалось.

Количество плохих, хороших и очень хороших вариантов в таблице соответственно 172, 105 и 11, или 59.7%, 36.5% и 3.8%, причем максимальное значение ΔM_{PB} = 31.7% достигается для t_0 = 10 и $\Omega_0 = 60^0$ (рис. 7б). Как видно, вариантов с $\Delta M_{PB} < 0$ раза в четыре меньше, чем для средней номинальной траектории. И это проявилось на рис. 8 в том, что минимальные по параметру Ω_0 значения ΔM_{PB} отрицательны не для всех значений t_0. А именно, при $t_0 \in$ [5..10], [50..85], [195..230] $\Delta M_{PB} > 0$, причем при t_0 = 200 ΔM_{PB} = 0.5%.

Таблица 5

Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ («длинная» траектория)

t_0 [сут]	0	46	91	137	183	228	274	320
Ω_0	$\Delta M_{РВ}$ % от $M_{РВ}$ = 727.2 кг (2% – 14.5 кг)							
0^0	1.4	**5.7**	**13.7**	**6.1**	1.5	2.0	0.7	-0.1
10^0	**3.0**	**8.0**	**18.1**	**8.4**	1.3	1.2	1.0	**2.3**
20^0	**2.7**	**19.9**	**21.1**	**10.9**	**2.4**	0.7	1.5	1.5
30^0	1.8	**25.9**	**21.8**	**12.4**	**4.1**	0.4	1.2	0.4
40^0	0.7	**28.0**	**21.7**	**12.6**	**5.0**	0.5	1.2	0.0
50^0	0.1	**28.2**	**21.1**	**11.7**	**4.8**	0.7	1.5	0.2
60^0	-0.1	**27.3**	**20.3**	**10.2**	**4.1**	0.9	1.8	0.6
70^0	0.0	**26.1**	**10.4**	**6.5**	**3.1**	0.9	**2.3**	1.3
80^0	0.2	**24.6**	**5.4**	**4.0**	1.9	1.1	**2.9**	2.0
90^0	0.5	**22.8**	1.9	1.2	1.3	**2.2**	**3.6**	**2.6**
100^0	0.7	**20.9**	0.3	0.2	**11.3**	**4.0**	**4.8**	**3.2**
110^0	1.1	**18.9**	-0.0	0.7	**11.6**	**5.6**	**5.9**	**3.5**
120^0	1.4	0.3	1.0	**16.1**	**11.5**	**6.7**	**6.3**	**3.8**
130^0	1.7	2.0	**4.2**	**14.2**	**10.6**	**7.2**	**6.5**	**3.9**
140^0	1.9	**3.7**	**8.0**	**11.2**	**8.7**	**6.4**	**6.1**	**3.8**
150^0	1.7	**3.0**	**5.3**	**6.9**	**5.6**	**4.4**	**4.9**	**3.2**
160^0	1.3	1.8	**2.6**	**3.2**	**2.7**	**2.4**	**2.7**	**2.1**
170^0	0.5	0.8	0.7	0.9	1.0	0.9	0.7	0.6
180^0	0.1	0.2	0.0	0.1	0.5	0.6	0.5	0.6
190^0	0.7	-0.0	0.4	0.6	0.9	2.0	**3.0**	**2.6**
200^0	**2.1**	0.4	1.0	1.2	1.6	**5.5**	**6.9**	**5.5**
210^0	**3.7**	0.8	1.2	1.6	**2.4**	**10.7**	**10.4**	**8.1**
220^0	**5.2**	1.1	0.9	1.4	**2.9**	**15.2**	**13.1**	**10.3**
230^0	**6.6**	1.5	0.4	0.9	**2.7**	**18.1**	**15.2**	**12.1**
240^0	**8.0**	**2.1**	0.0	0.3	1.6	**20.7**	**16.7**	**13.4**
250^0	**9.3**	**3.0**	-0.1	-0.2	0.6	**21.2**	**17.0**	**14.6**
260^0	**10.5**	**4.2**	0.3	-0.3	-0.1	**22.0**	**18.6**	**15.4**
270^0	**8.3**	**5.6**	1.2	0.1	-0.2	**22.8**	**19.0**	**16.0**
280^0	**6.4**	**7.1**	**2.7**	0.9	0.4	**22.6**	**19.1**	**16.3**
290^0	**4.4**	**8.5**	**4.5**	**2.5**	1.1	**-*-**	0.6	1.6
300^0	2.0	**7.6**	**6.4**	**3.5**	1.7	0.1	-0.5	0.0
310^0	0.5	**6.4**	**7.8**	**4.4**	**2.3**	1.0	0.2	-0.2
320^0	0.4	**4.8**	**8.3**	**5.0**	**2.8**	**2.7**	**2.5**	1.1
330^0	**2.3**	**2.9**	**7.5**	**5.3**	**3.0**	**4.6**	**7.5**	**5.0**
340^0	**19.1**	**17.3**	**6.3**	**4.9**	**2.9**	**4.3**	**5.9**	**11.6**
350^0	**13.2**	**15.8**	**8.2**	**4.9**	**2.3**	**3.1**	**2.8**	**4.1**

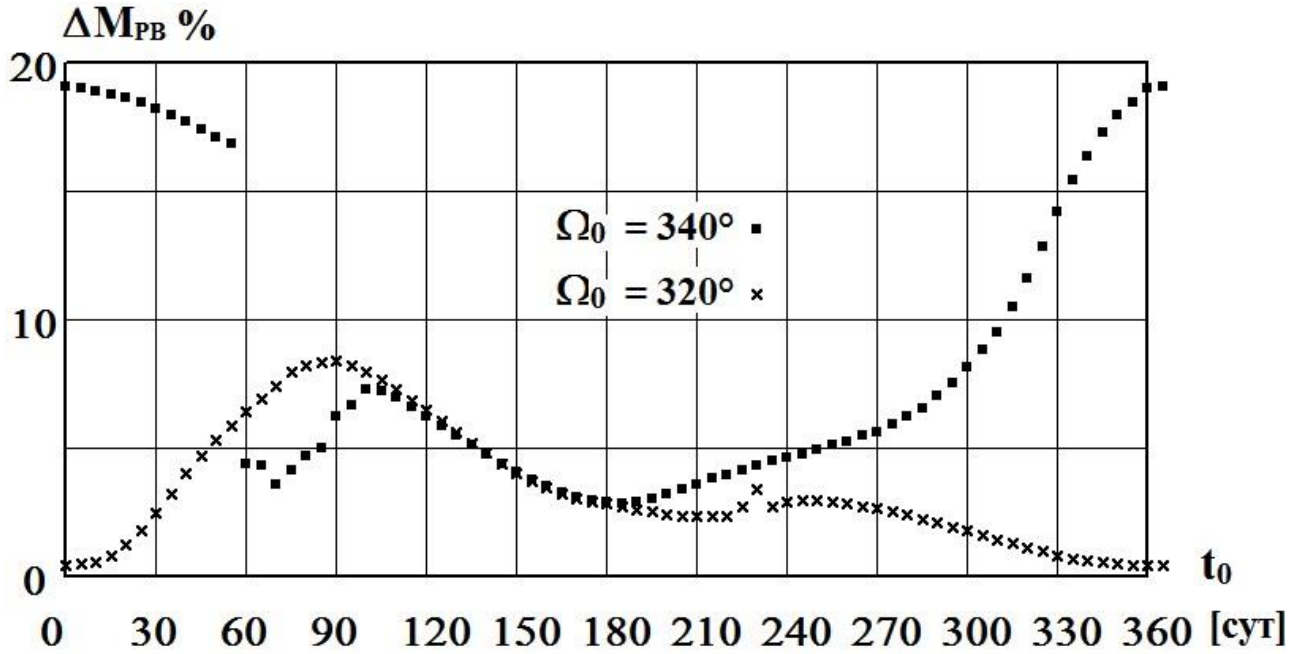

Рис. 7(а). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 320^0, 340^0$ («длинная» траектория).

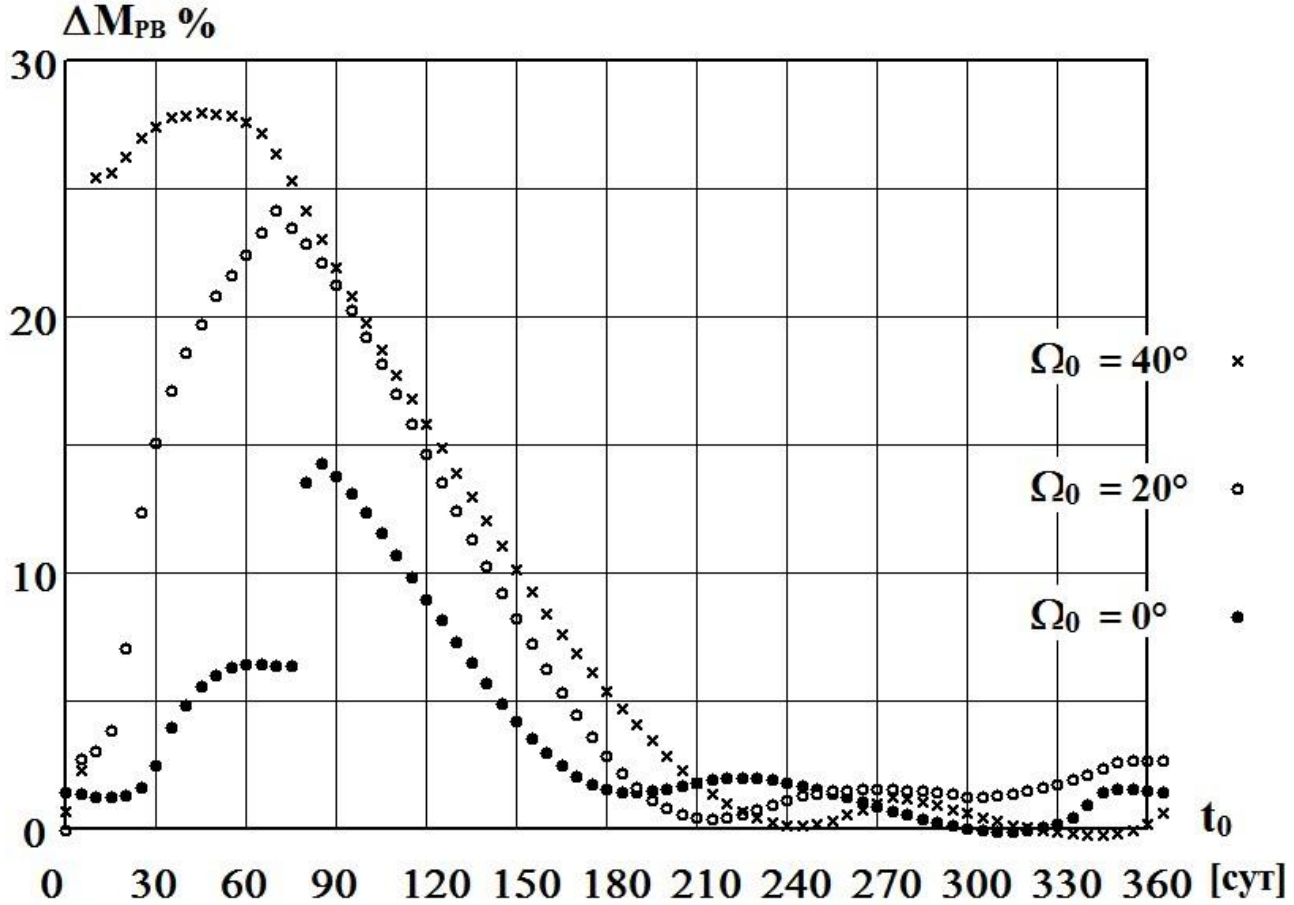

Рис. 7(б). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 0^0, 20^0, 40^0$ («длинная» траектория).

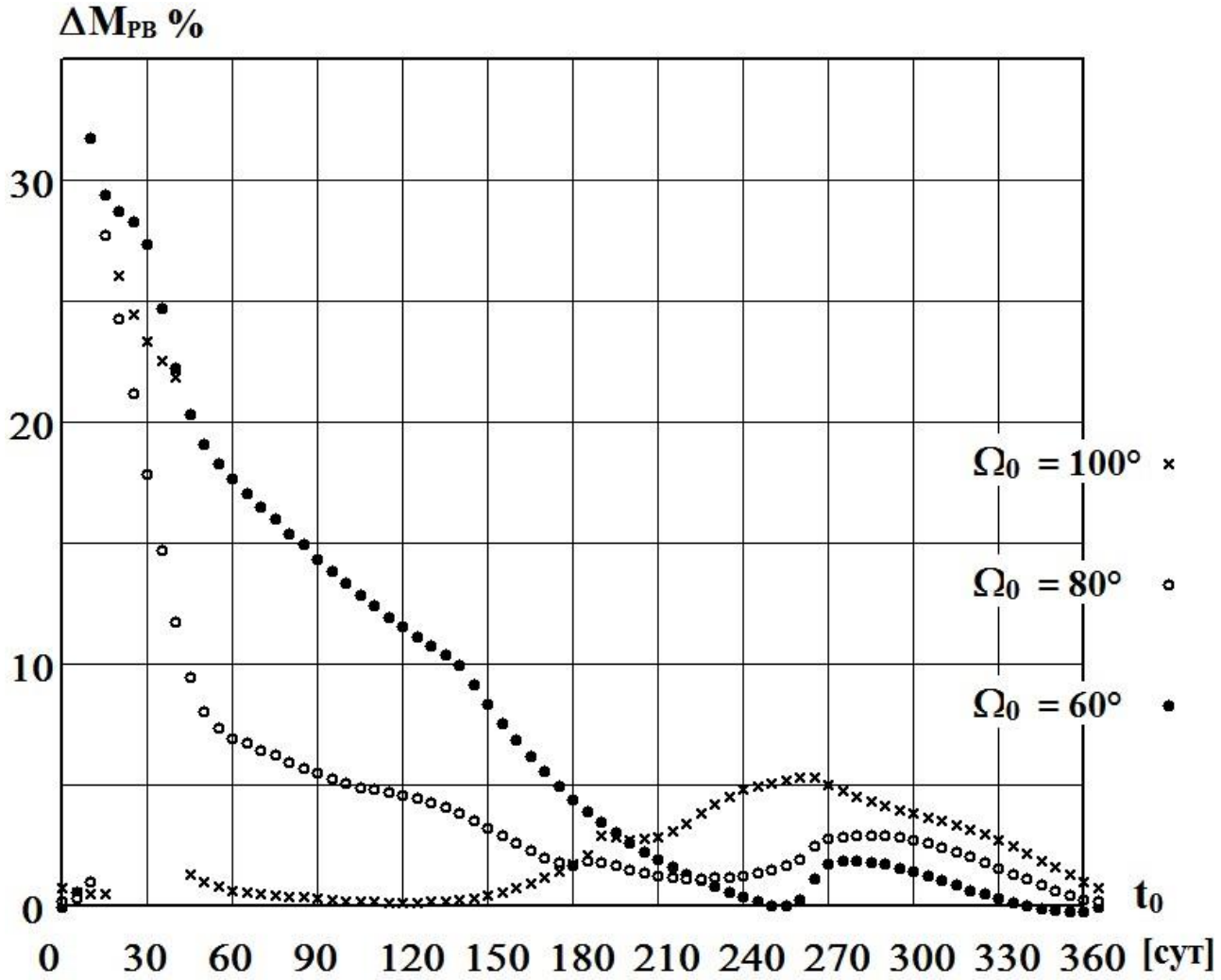

Рис. 7(в). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 60^0, 80^0, 100^0$ («длинная» траектория).

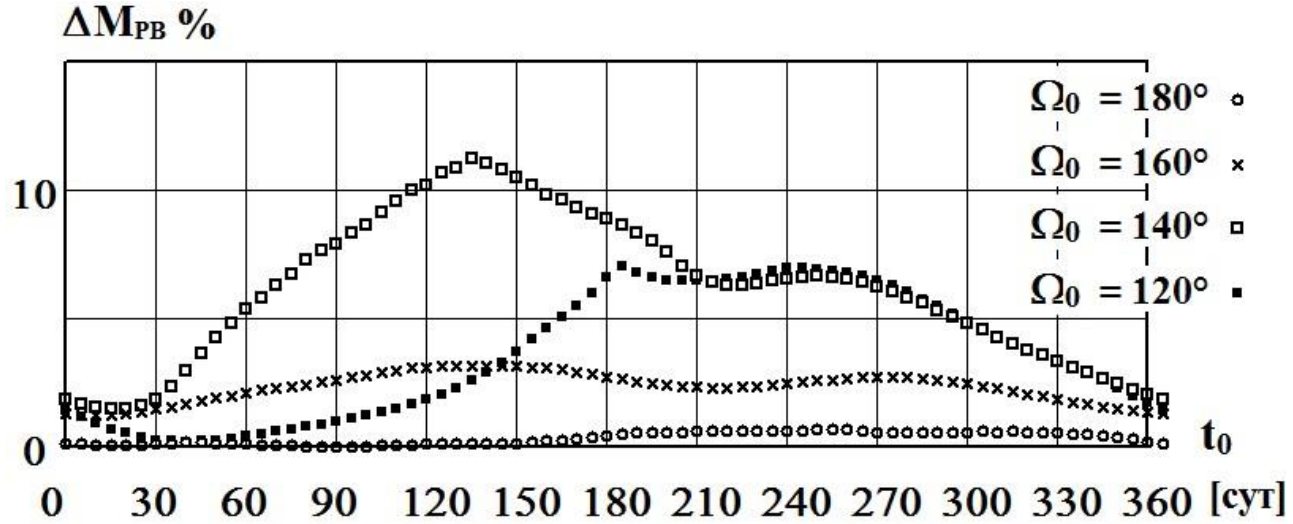

Рис. 7(г). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 120^0, 140^0, 160^0, 180^0$ («длинная» траектория).

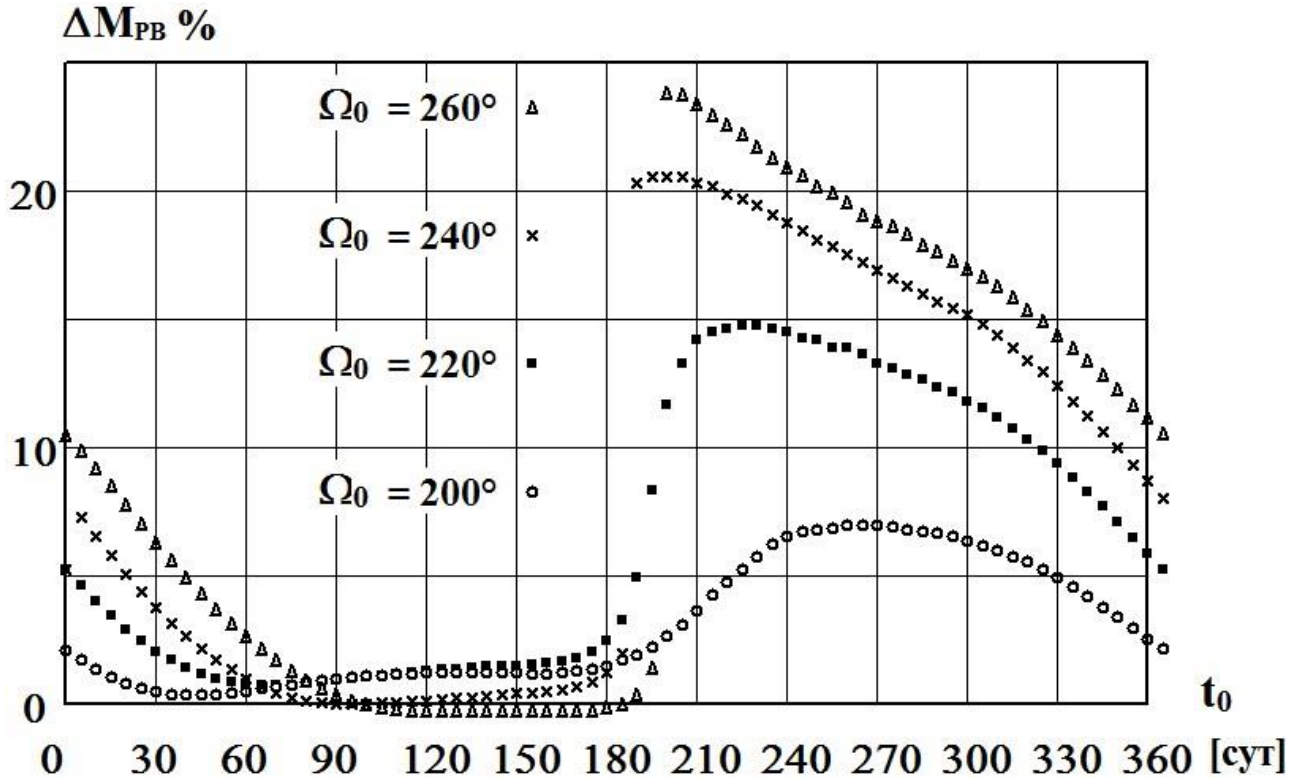

Рис. 7(д). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 200^0$, 220^0, 240^0, 260^0 («длинная» траектория).

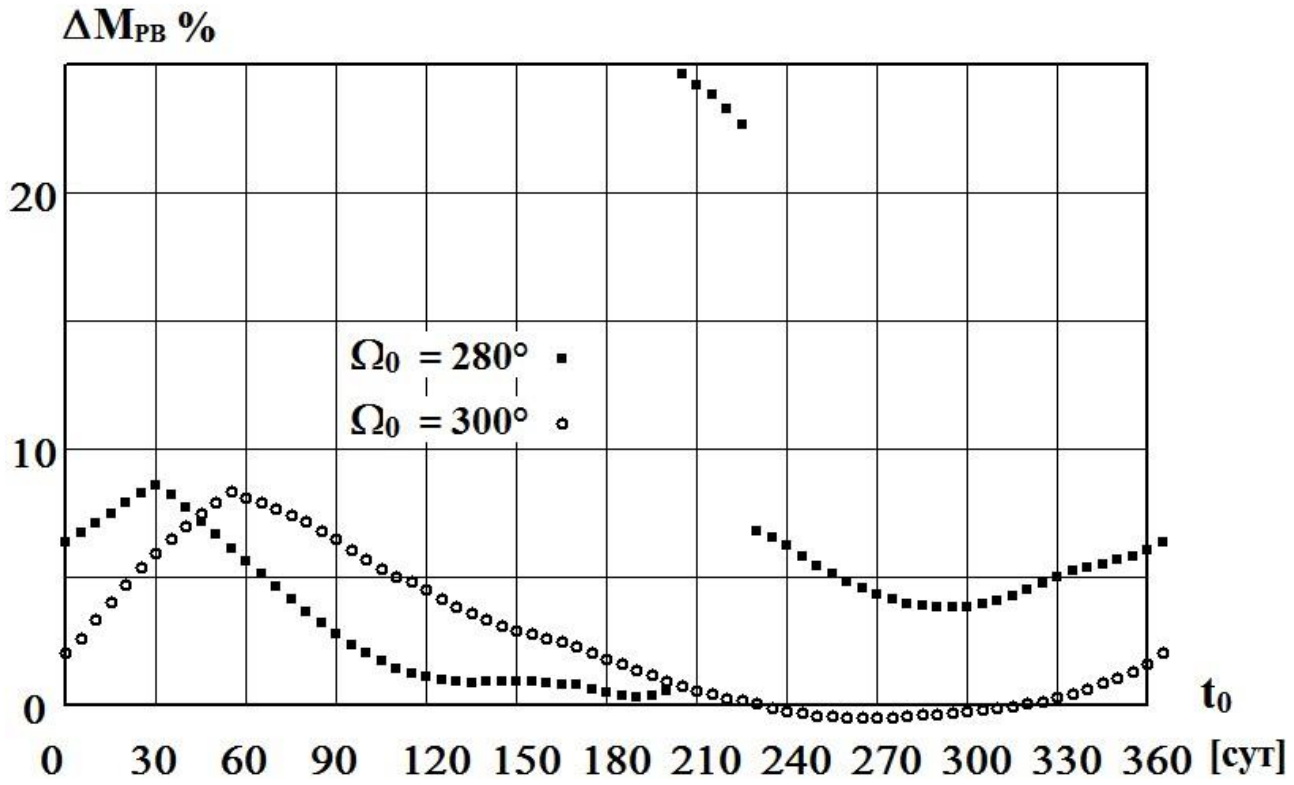

Рис. 7(е). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 280^0$, 300^0 («длинная» траектория).

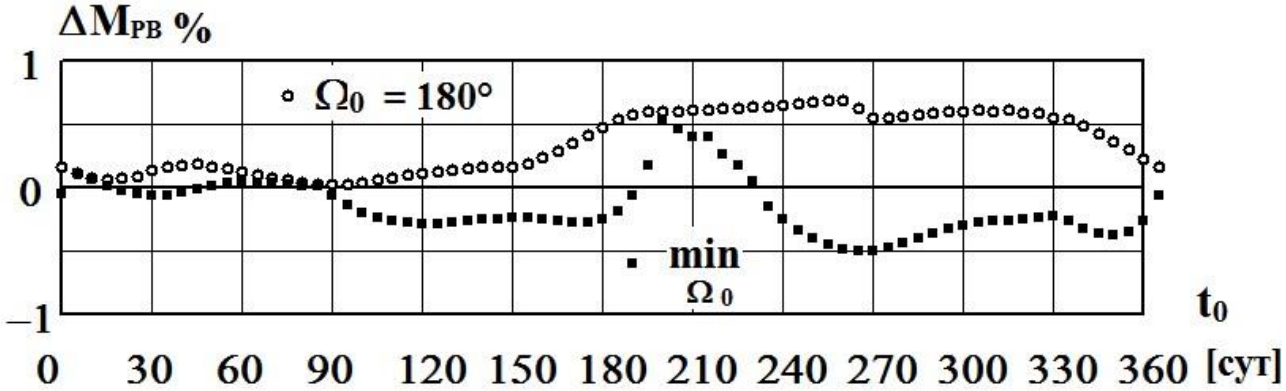

Рис. 8. Минимальные значения ΔM_{PB} по параметру Ω_0 и значения ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^0$ («длинная» траектория).

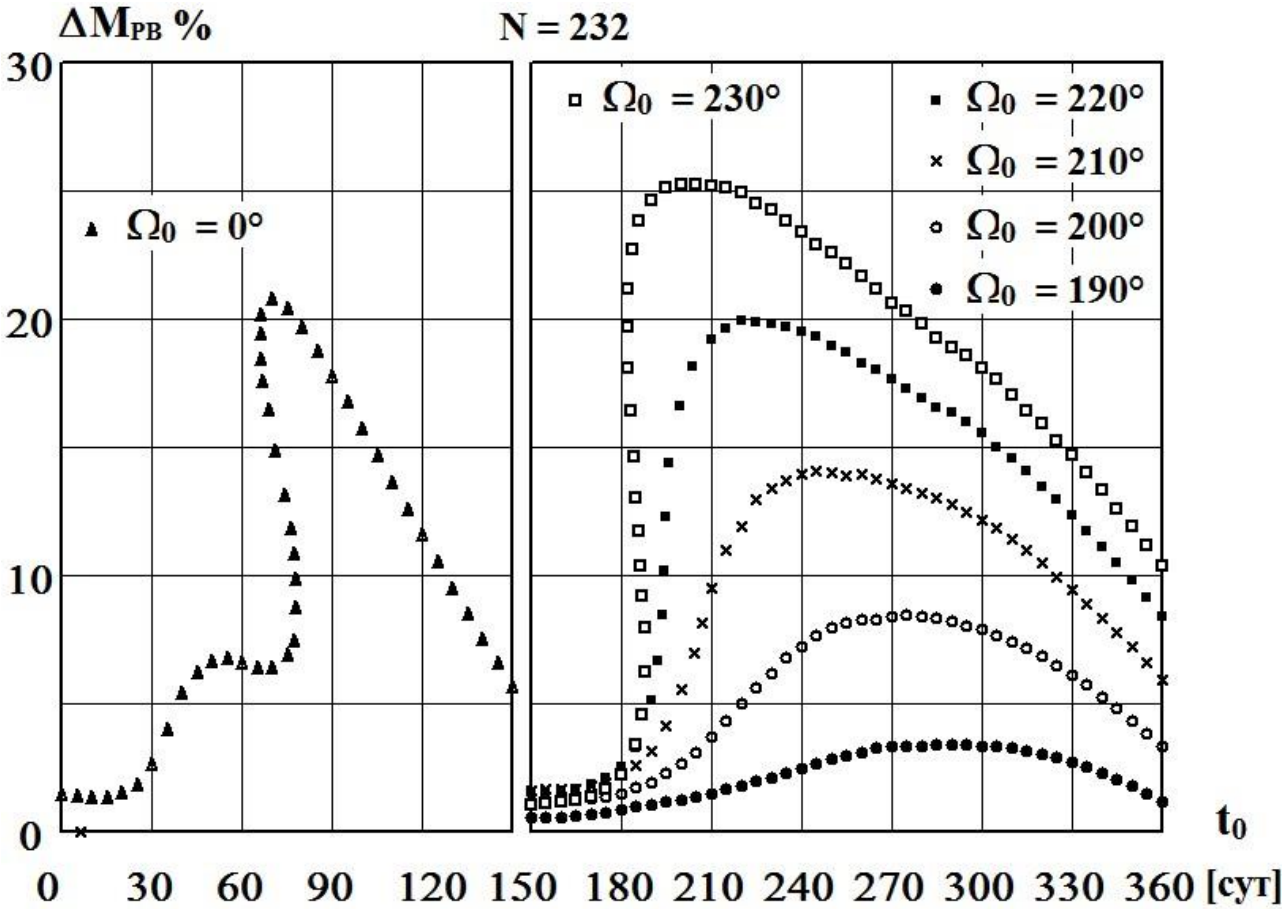

Рис. 9. Примеры отрицательного уклона в зависимостях $\Delta M_{PB}(t_0)$.

Что касается графиков на рис. 7, можно отметить следующие моменты.

В некоторых случаях решение представлено тремя ветвями, например для $\Omega_0 = 280^0$ (рис. 7е). Одна ветвь t_0 = 30..200, вторая t_0 = 205..225, и третья t_0 = 230..365 и 0..25. Первая и третья пересекаются вблизи t_0 = 30, по краям второй слева и справа обрывы.

Для $\Omega_0 = 20^0$ (рис. 7б) вблизи t_0 = 70 на графике видно, что имеется похожее на горный пик пересечение под острым углом то ли двух разных

ветвей, то ли двух концов одной ветви. Аналогичный вид имеют графики для Ω_0 = ,0^0 вблизи t_0 = 85, для Ω_0 = 120^0 вблизи t_0 = 185, для Ω_0= 140^0 вблизи t_0 = 135, для Ω_0= 280^0 вблизи t_0 = 30, для Ω_0 = 300^0 вблизи t_0 = 55, а также для средней траектории для Ω_0 = 320^0 вблизи t_0 = 330 (рис. 5е). Иногда из данных расчетов следует, что ветви две, как, например, для Ω_0 = 20^0: одна ветвь t_0 = 30..345, вторая t_0 = 350..365 и 0..25; для t_0 = 345 витков N = 243, для t_0 = 350 витков 234 – на 9 меньше. Но на графике переход с одной ветви на другую при t_0 = 345 $\rightarrow$ 350 практически незаметен. А иногда и из данных расчетов трудно понять, есть ли где переход на другую ветвь.

В окрестности обрыва на графиках иногда помечалось только одно решение – лучшее, иногда – оба, чтобы оттенить, что склон не пологий, а имеется именно вертикальный обрыв. На деле часто верхнюю ветвь можно немного продолжить, так что образуется перекрытие верхней частью решения нижней части. Чтобы понять, что происходит с крутым склоном горба после образования обрыва, были проведены подробные расчеты при условии, что количество витков постоянно (N = 232). На правой части рис. 9 видно, что крутой склон не пропадает, но приобретает отрицательный уклон (крутизну > 90^0). Еще один пример приведен на левой части рис. 9 (сравни с соответствующими графиками на рис. 7).

Очень длинная номинальная траектория (11.5 месяцев)

Отметим, что номинальные траектории 1-4 в табл. 2 – решения более общей задачи комбинированного выведения на ГСО КА [13]: сначала разгонный блок с помощью большой тяги выводит КА на промежуточную орбиту (это начальные орбиты в табл. 1), с которой далее КА уже с помощью малой тяги выходит на ГСО. В зависимости от того, какую часть задачи берет на себя большая тяга, а какая часть остается на долю малой тяги, получаются промежуточные орбиты (начальные для перелета с МТ) и, соответственно, начальные (на промежуточных орбитах) массы КА, и собственно сами траектории перелета в табл. 2. Поэтому четыре траектории из табл. 2 можно рассматривать как траектории "одного ряда решений" (комбинированного выведения), и потому допустимо на основе решений выше рассмотренных задач (для короткой, средней и длинной траекторий) делать оценочные прогнозы для четвертой задачи – для очень длинной траектории.

В таблице 6 собрана статистика по таблицам 3,4,5,7 – данные в левом верхнем углу ячеек, и по графикам на рис. 1,5,7 – данные в правом нижнем углу ячеек. Она несколько отличается, поскольку в первом случае шаг по t_0 – 1.5 месяца, а по Ω_0 – 10^0 (общее количество вариантов 288), а во втором случае шаг по t_0 5 суток, а по Ω_0 – 20^0 (общее количество вариантов 1314). Из этих данных следует, что количество вариантов с $\Delta M_{PB} \leq 0$ с увеличением количества витков и продолжительности перелета быстро уменьшается и для очень длинной номинальной траектории, вполне вероятно, таких вариантов нет, либо их единицы. Поэтому получить такой хороший результат, когда минимальные по

Ω_0 $\Delta M_{PB} \leq 0$ на всем рассматриваемом интервале времени (как для короткой и средней траекторий) или хотя бы на большей его части (как для длинной траектории) для очень длинной траектории скорее всего не удастся.

Таблица 6

Статистика по таблицам (в ячейках слева) **и графикам** (справа)**:**
доля вариантов нейтральных (тени нет, $\Delta M_{PB} = 0$), очень хороших ($\Delta M_{PB} < 0$), хороших ($0 < \Delta M_{PB} \leq 2\%$) и плохих ($\Delta M_{PB} > 2\%$)

ΔM_{PB}	1	2	3	4	5
= 0%	27.4 / 36.5	--.--	--.--	--.--	9.7 / 10.6
< 0%	24.7 / 19.6	15.6 / 14.2	3.8	?	15.6 / 13.8
≤ 0%	52.1 / 56.1	15.6 / 14.2	3.8		25.3 / 24.4
0%<…≤2%	39.2 / 38.1	51.4 / 49.5	36.5 / 36.4	?	35.8 / 35.4
> 2%	8.7 / 5.8	33.0 / 36.3	59.7 / 59.8	?	38.9 / 40.2

Учитывая, что с увеличением количества витков и продолжительности перелета трудоемкость решения краевой задачи также быстро возрастает, было решено ограничиться расчетами для $\Omega_0 = 180^0$ и для близких к 180^0 значений. Результаты приведены на рис. 10. Опираясь на результаты для длинной траектории, были сделаны попытки поиска и для некоторых других значений Ω_0. Удалось найти ветвь решений, которая дает лучшие ΔM_{PB} в интервале t_0 = 85..115 ($\Omega_0 = 253^0 – 264^0$). На рисунке она отмечена белыми квадратиками.

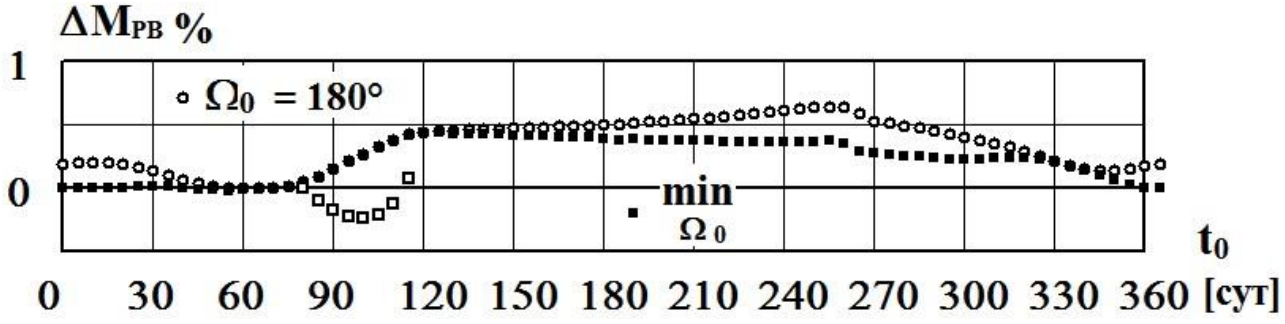

Рис. 10. Минимальные значения ΔM_{PB} по параметру Ω_0 и значения ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^0$ («очень длинная» траектория).

Номинальная траектория для «легкого» КА

Результаты расчетов представлены в табл. 7 и на рис. 11–12. Статистика по решениям краевой задачи – в табл. 6.

Таблица 7

Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ («легкий КА»)

t_0 [сут]	0	46	91	137	183	228	274	320
Ω_0	$\Delta M_{РВ}$ % от $M_{РВ}$ = 727.2 кг (2% – 14.5 кг)							
0^0	**2.8**	**6.6**	**9.2**	**12.1**	**7.0**	**2.6**	**3.5**	**1.1**
10^0	**8.2**	0.3	**9.6**	**15.9**	**10.5**	0.6	**2.4**	0.5
20^0	**9.6**	--	--	**24.5**	**13.0**	0.6	1.9	1.0
30^0	**6.3**	--	--	**29.4**	**13.2**	**2.3**	1.2	1.2
40^0	**3.9**	--	--	**31.2**	**12.4**	**3.6**	0.4	**2.9**
50^0	1.4	--	--	0.7	**11.2**	**3.2**	-0.1	**3.6**
60^0	0.4	0.0	--	0.3	**9.7**	1.7	-0.0	**5.2**
70^0	0.9	-0.0	--	0.1	**8.3**	0.6	0.2	**4.3**
80^0	**2.9**	0.1	--	-0.1	**6.6**	0.0	0.0	**3.5**
90^0	**3.8**	0.4	--	-0.2	**12.9**	--	--	**2.6**
100^0	**5.2**	0.6	--	-0.2	**15.2**	--	--	1.7
110^0	**6.5**	**2.6**	--	-0.2	**16.8**	--	--	1.3
120^0	**7.5**	1.5	0.0	-0.1	**16.5**	--	--	1.0
130^0	**8.1**	1.0	0.0	-0.1	**14.0**	-0.1	--	0.8
140^0	**7.6**	**2.3**	0.0	-0.1	**9.1**	0.7	--	0.5
150^0	**5.2**	0.9	0.0	-0.1	**5.8**	1.9	--	0.4
160^0	**2.1**	1.0	0.0	-0.0	**2.9**	1.8	--	0.4
170^0	0.9	0.9	-0.0	-0.0	0.9	0.9	--	0.4
180^0	1.5	0.4	-0.1	-0.0	0.2	0.4	--	0.4
190^0	**3.2**	-0.1	-0.1	-0.0	0.6	0.5	0.1	0.4
200^0	**5.5**	0.3	-0.1	-0.1	1.1	0.8	0.2	0.4
210^0	**7.9**	1.9	-0.2	-0.1	1.4	1.2	0.2	0.4
220^0	**10.1**	**3.5**	-0.2	-0.1	1.1	1.6	0.3	0.3
230^0	**11.8**	**5.0**	0.0	-0.2	0.6	1.5	0.4	0.2
240^0	**13.1**	**6.6**	0.6	-0.2	0.0	1.0	0.7	0.1
250^0	**14.2**	**8.0**	1.7	-0.2	-0.3	0.4	1.0	-0.0
260^0	**14.8**	**9.2**	**2.9**	-0.2	-0.0	-0.2	1.2	-0.2
270^0	**15.4**	**10.1**	**4.0**	-0.0	1.4	-0.3	1.1	-0.3
280^0	**15.6**	**10.6**	**4.5**	0.3	**4.2**	0.2	0.6	-0.3
290^0	**15.5**	**10.8**	**4.9**	1.1	**7.0**	1.4	-0.0	-0.3
300^0	-0.2	**10.6**	**5.2**	**2.2**	**9.1**	**2.6**	-0.3	-0.2
310^0	0.2	**9.5**	**5.3**	**3.7**	**10.6**	**3.8**	0.4	-0.3
320^0	**5.6**	**5.9**	**4.8**	**5.4**	**9.0**	**4.9**	0.8	-0.1
330^0	**5.6**	**13.1**	**2.5**	**7.0**	**5.8**	**5.7**	1.3	0.3
340^0	**4.6**	**13.2**	**2.3**	**8.3**	**3.5**	**5.9**	2.0	0.3
350^0	1.9	**13.1**	**7.8**	**9.8**	**4.1**	**4.9**	**2.5**	0.8

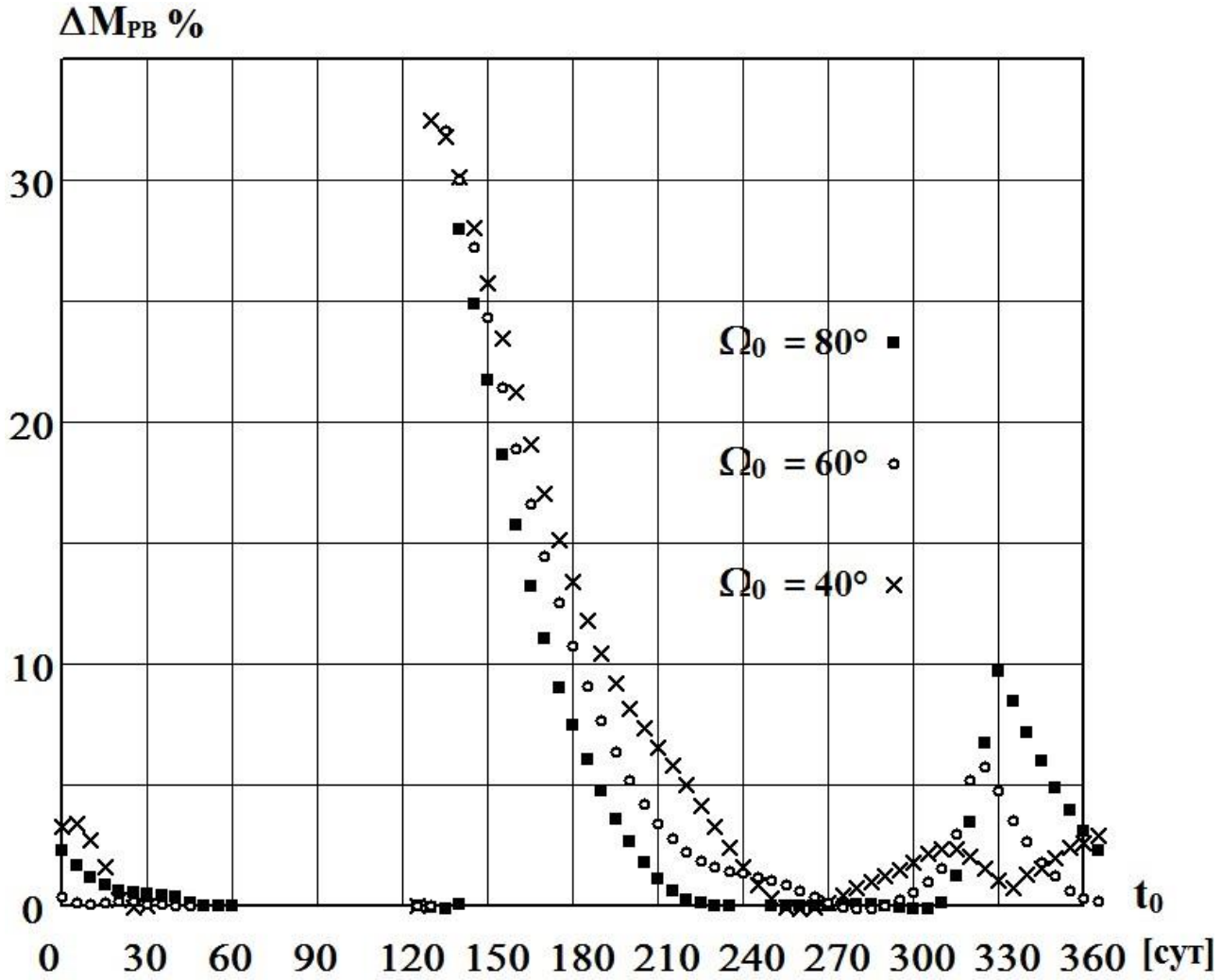

Рис. 11(а). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 40^0, 60^0, 80^0$ (траектория «легкого» КА).

Для легкого КА ускорение малой тяги в 2–3 раза больше, чем для других траекторий. Поэтому и продолжительность перелета примерно во столько же раз меньше в сравнении с аналогичным перелетом с меньшим ускорением. Т.к. продолжительность перелета всего 4 месяца, есть немало вариантов (≈10%), при которых на траектории вообще нет участков с тенью. А по количеству вариантов с $\Delta M_{РВ} < 0$ и $\Delta M_{РВ} > 2\%$ он сравним со средней траекторией. Максимум $\Delta M_{РВ} \approx 32.5\%$ при $t_0 = 130$, $\Omega_0 = 40^0$. То есть по основным характеристикам, за исключением Δi, он занимает промежуточное положение между короткой и средней траекториями. И, как и для них, минимальные по параметру Ω_0 значения $\Delta M_{РВ}$ отрицательны на всем интервале дат старта t_0 (рис. 12).

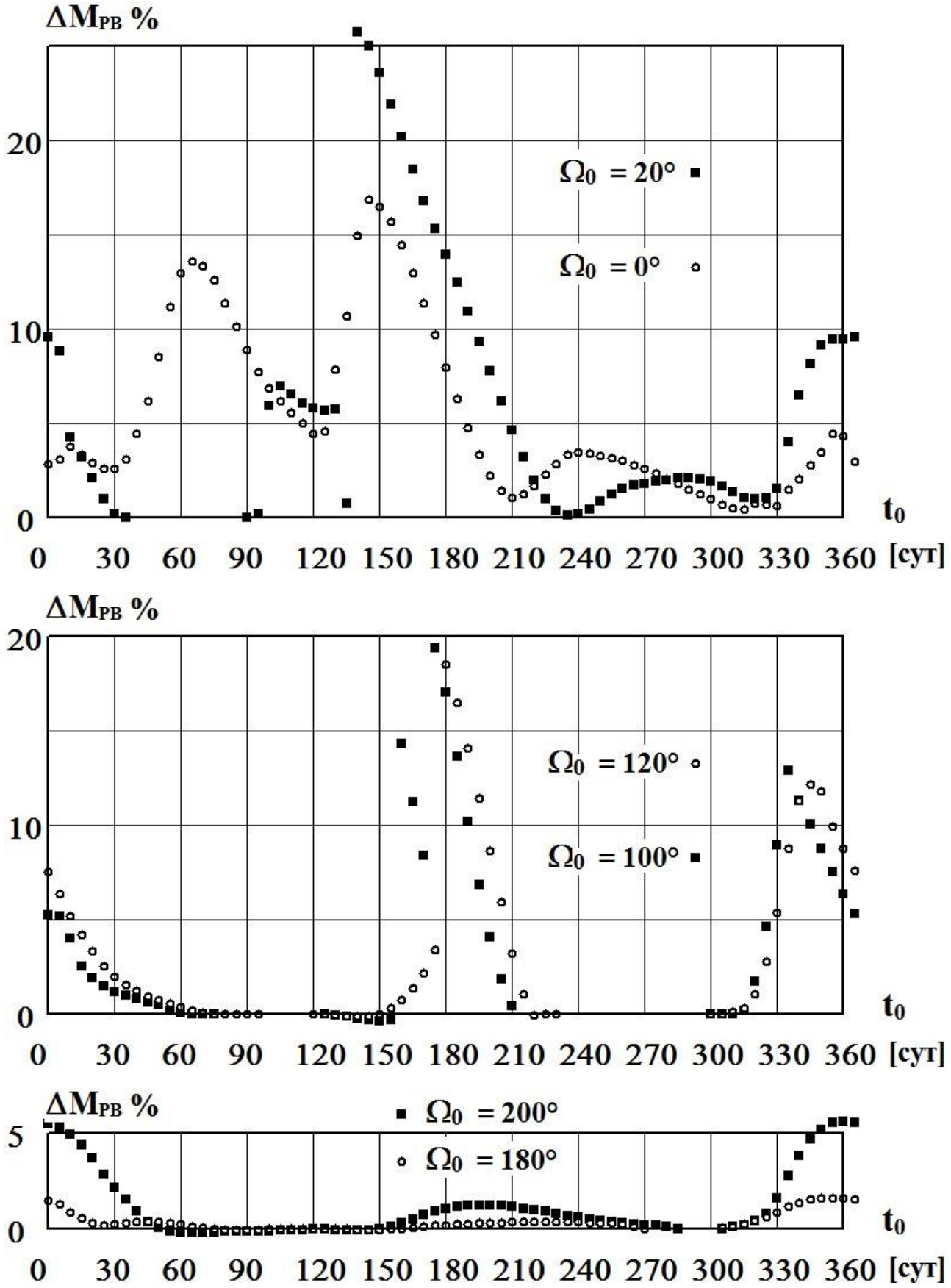

Рис. 11(б). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 0^0, 20^0, 100^0, 120^0, 180^0, 200^0$ (траектория «легкого» КА).

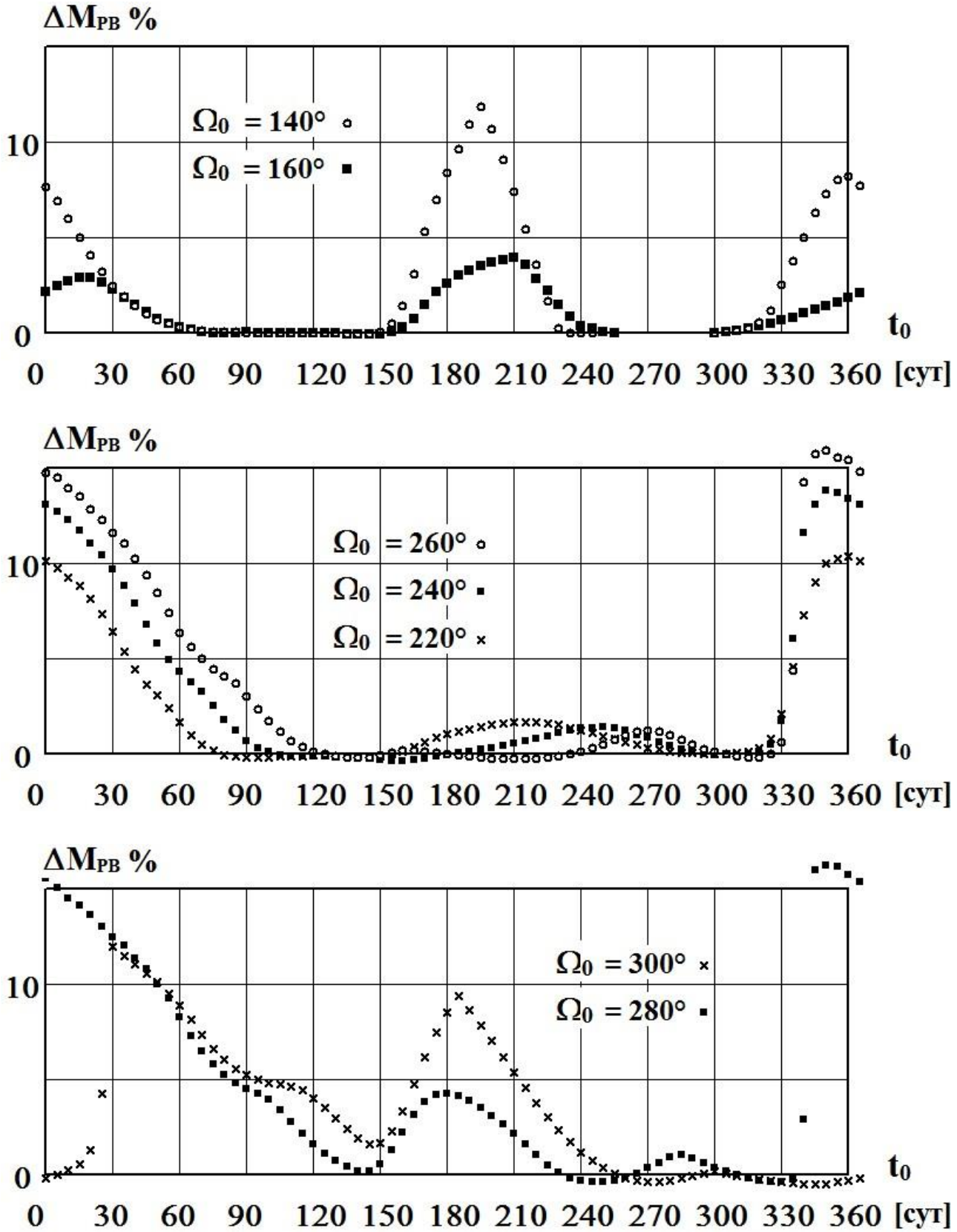

Рис. 11(в). Изменение массы рабочего вещества $\Delta M_{РВ}$ для $\Omega_0 = 140^0, 160^0, 220^0, 240^0, 260^0, 280^0, 300^0$ (траектория «легкого» КА).

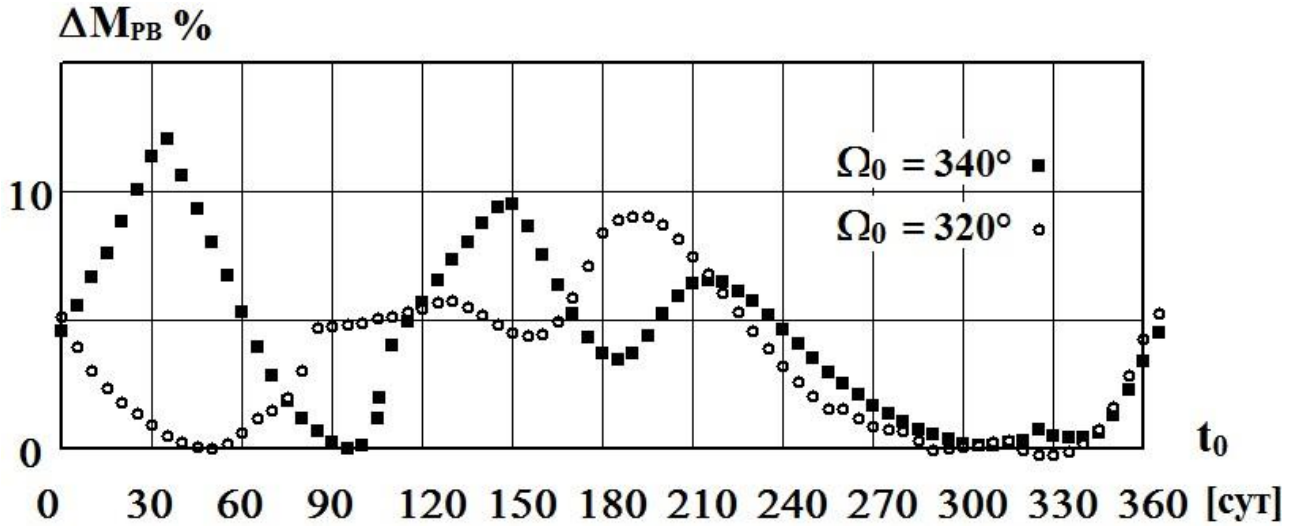

Рис. 11(г). Изменение массы рабочего вещества ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 320^0$, 340^0 (траектория «легкого» КА).

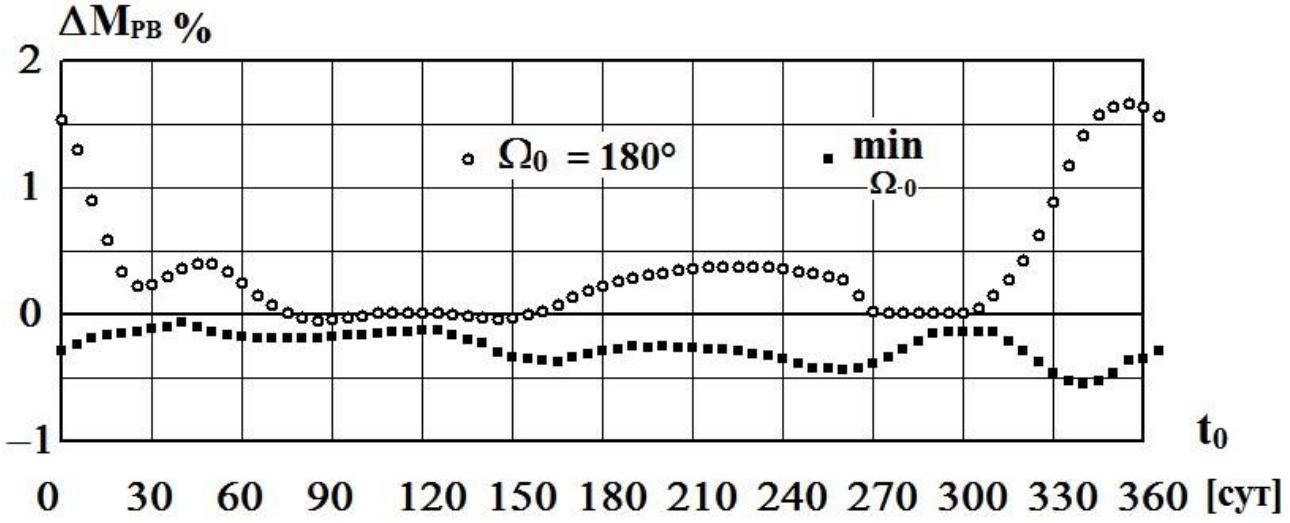

Рис. 12. Минимальные значения ΔM_{PB} по параметру Ω_0 и значения ΔM_{PB} для $\Omega_0 = 180^0$ (траектория «легкого» КА).

Основные результаты

Рассмотрено несколько оптимальных многовитковых перелетов продолжительностью от 2.3 до 11.5 месяцев в центральном ньютоновом поле Земли с высокоэллиптических орбит на геостационарную орбиту космического аппарата с постоянно работающей малой тягой, полученные решением двухточечной краевой задачи. Для получения аналогичных перелетов с нулевой тягой в области тени от Земли предлагается использовать краевую задачу, названную "неполной", поскольку в ней не учитываются условия оптимального пересечения границ тени. Показано, что если долгота восходящего узла начальной орбиты $\Omega_0 = 180^0$, то таким образом можно получать траектории, близкие по затратам рабочего вещества (превышение не более 0.5%) к

траекториям "номинальным" (без учета тени). А для траекторий продолжительностью полгода или меньше за счет выбора Ω_0 затраты получаются меньше номинальных.

Литература

1. Sackett L. L., Malchow H. L. and Edelbaum T. N. (1975) Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis, NASA CR 134927, Washington, DC.
2. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987, 208 с.
3. Lundberg B. N. (2010) An Adjoint Jump Shooting Method for Parametric Low Thrust Orbit Transfer Problems with Eclipsing, Proceedings of the Fourth International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (WPP-308), ESAC, Madrid, Spain.
4. Petukhov V. G. Quasioptimal control with feedback for multiorbit low-thrust transfer between noncoplanar elliptic and circular orbits // Cosmic Research. 2011, Vol. 49, No. 2, pp. 121–130; Петухов В. Г. Квазиоптимальное управление с обратной связью для многовиткового перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Космические исследования. 2011, т. 49. № 2, с. 128-137.
5. Tarzi Z., Speyer J. and Wirz R. (2013) Fuel Optimum Low-Thrust Elliptic Transfer Using Numerical Averaging, Acta Astronautica, 86, 95–118.
6. Mazzini L. (2014) Finite Thrust Orbital Transfers, Acta Astronautica, Vol. 100, 107–128.
7. Graham K. F. and Rao A. V. (2016) Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 53, 289–303.
8. Ахметшин Р.З. Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 266. — 31 с. — URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-266
9. Ахметшин Р.З. «Неполная» краевая задача для нахождения многовитковых перелетов с нулевой малой тягой в области тени // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2018. — № 268. — 32 с. — URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-268

10. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космические исследования. 2004, т.42, №3, с.248-259; Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2002. — № 37. — 32 с. — URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-37
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.
12. Petukhov V.G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004, Vol. 42, No. 3, pp. 250–268; Петухов В.Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами. // Космические исследования. 2004, т. 42. № 3. с. 260-279.
13. Petukhov V.G., Konstantinov M.S. Easy Engineering Technique of Optimal Electric Propulsion Trajectory Estimation. IAC-06-C4.4.06, 2006.h

Оглавление

«Неполная» краевая задача 3
Короткая номинальная траектория (2.3 месяца) 6
Средняя номинальная траектория (6 месяцев) 12
Длинная номинальная траектория (9 месяцев) 18
Очень длинная номинальная траектория (11.5 месяцев) 24
Номинальная траектория для «легкого» КА 25
Основные результаты 30
Литература 31