ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 10 за 2019 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Повещенко Ю.А., Круковский А. Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н.

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением / Ю.А.Повещенко [и др.] // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2019. № 10. 36 с. doi:10.20948/prepr-2019-10
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2019-10

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Ю.А. Повещенко, А.Ю. Круковский,
В.О. Подрыга, Е.Н. Головченко

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением

Москва — 2019

Повещенко Ю.А., Круковский А.Ю., Подрыга В.О., Головченко Е.Н.

Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений упругости с азимутальным вращением

В работе для полных векторов смещений и скоростей с учетом азимутальных вращений на нерегулярных сетках, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения, применительно к разностным схемам для задач теории упругости построены аппроксимации операций векторного анализа в цилиндрической геометрии. С учетом энергетического баланса среды при наличии азимутальных вращений построены семейства интегрально согласованных аппроксимаций операций векторного анализа, достаточные для дискретного моделирования этих процессов с учетом кривизны пространства, вызванного цилиндрической геометрией системы. На (r,z)–нерегулярных сетках с дифференциальным вращением по азимутальной координате θ построены и исследованы разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости в смещениях. Рассмотренные аппроксимации сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности дифференциальных операторов, а также применимы для решения нестационарных задач гидродинамики с учетом упругих процессов.

Ключевые слова: разностные схемы, метод опорных операторов, теория упругости, цилиндрическая геометрия, азимутальное вращение.

Poveshchenko Yu.A., Krukovskiy A.Yu., Podryga V.O., Golovchenko E.N.

Difference schemes of support operator method for equations of elasticity with azimuthal rotation

In the work, for full displacement vectors and velocities, taking into account the azimuthal rotations, on irregular grids with minimal reasonable restrictions for their topological and geometric structure, the approximations of vector analysis operations in cylindrical geometry were constructed with respect to the difference schemes for elasticity theory problems. Taking into account the energy balance of the medium in the presence of azimuthal rotations, families of integrally consistent approximations of vector analysis operations were made, sufficient for discrete modeling of these processes, with respect to the curvature of space caused by the cylindrical geometry of the system. On (r,z)–regular grids with differential rotation along the azimuthal coordinate θ, the difference schemes of the support operator method for the equations of the elasticity theory in displacements were constructed and investigated. The considered approximations retain the properties of divergence, self-adjointness and sign-definiteness of differential operators, and are also applicable for solving nonstationary problems of hydrodynamics with allowance for elastic processes.

Keywords: difference schemes, support operator method, theory of elasticity, cylindrical geometry, azimuthal rotation.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты 16-29-15081-офи_м, 18-07-00841-а, 18-51-18004-Болг_а.

1. Введение

Настоящая работа посвящена построению и исследованию разностных схем метода опорных операторов на нерегулярных сетках [1-6]. Разностные аппроксимации построены для нестационарной системы уравнений теории упругости, включающей описание энергобаланса упругой и внутренней энергии среды. Для построения интегрально согласованных аппроксимаций к уравнениям балансов импульса и энергии упругой среды использован метод опорных операторов. Рассматривается случай аксиальных симметричных деформаций, в том числе для полных векторов смещений и скоростей с учетом азимутальных вращений. Описание соответствующих процессов производится в цилиндрической (r,z)-геометрии.

Чтобы осветить существо возникающих здесь специфических проблем, проведем некоторые рассуждения на качественном уровне.

Известно, что континуальные смещения в сплошной среде локально делятся на три группы движений [7]:

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}+\delta\mathbf{r})=\mathbf{u}(\mathbf{r})+(\mathrm{t}_{\mathbf{u}},\delta\mathbf{r})+\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}\times\delta\mathbf{r}$$

параллельный перенос $\mathbf{u}(\mathbf{r})$, деформацию $(\mathrm{t}_{\mathbf{u}},\delta\mathbf{r})$, определяемую симметризованным тензором смещений $\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, и твердотельное вращение с угловой скоростью $\frac{1}{2}\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$. Причем физические характеристики среды – тензор напряжений $X_{\mathbf{u}}=2\mu\mathrm{t}_{\mathbf{u}}+\nu\,\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta$ и энергия (деформации) $E=\frac{1}{2}\int\limits_{O}\left(2\mu\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^{2}\right)+\nu\,\mathrm{tr}^{2}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\right)dV$ – не зависят ни от первой, ни от третьей группы движений, а определяются только деформацией. Здесь $\mu>0$ и $\nu\geq 0$ – коэффициенты Ламе (об остальных обозначениях см. п.2).

В работе получены дискретные аналоги самосопряженных и знакоопределенных операций и дифференциальных операторов $\mathrm{div}\,\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta\right)$ [8] для моделирования силовых полей упругих процессов, а также $\int\limits_{O}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^{2}\right)dV$ и $\int\limits_{O}\mathrm{tr}^{2}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})dV$, достаточные для моделирования упруго-зависимых энергетических балансов среды с учетом кривизны пространства цилиндрической геометрии системы. Данные конструкции применимы для решения нестационарных задач гидродинамики [9] с учетом упругих процессов [10].

Следуя [11], скалярное произведение в пространстве тензорных сеточных функций, компонент тензора деформаций, выбирается интегрально

согласованно с энергией деформированного тела. В силу этого рассмотренные в [11] 3D–конструкции, используемые на нерегулярных (r,z)-сетках с дифференциальным вращением по азимутальной координате θ, сохраняют свойства дивергентности, самосопряженности и знакоопределенности дифференциальных операторов при предельном переходе $\theta \to 0$, но уже в 2D цилиндрической (r,z)-задаче.

2. Постановка задачи

В пространственной области O с границей ∂O рассмотрим уравнения теории упругости в смещениях:

$$\mathrm{div} X_{\mathbf{u}} = \mathbf{f}(\mathbf{r}), \quad X_{\mathbf{u}} = 2\mu\, \mathrm{t}_{\mathbf{u}} + \nu\, \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta, \quad \mathrm{t}_{\mathbf{u}} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} + \nabla\mathbf{u}\right)$$

(с некоторыми граничными условиями) наряду с соответствующим интегральным соотношением:

$$\int_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u} X^T\right) dV + \int_O \mathbf{u}\, \mathrm{div} X dV = \int_{\partial O} (X\mathbf{u}, \mathbf{ds}),$$

$$\mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u} X^T\right) = \mathrm{tr}\left(\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} X\right) = \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}} X)|_{X = X^T}.$$

Здесь $\mathbf{u}$ – вектор смещений, X – произвольный тензор, $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений, $\mathbf{f}(\mathbf{r})$ – объемная плотность внешних сил в пространственной точке $\mathbf{r}$, $\mu > 0$ и $\nu \geq 0$ – коэффициенты Ламе, δ – метрический тензор. Символом tr( ) обозначается след тензора, индексом T – транспонирование.

Вклад в баланс внутренней энергии моделируемой среды, связанный с деформационными процессами (либо их частью, например, только деформацией сдвига), дается как $E = E\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}^2\right), \mathrm{tr}^2(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\right)$. Кроме того, изменение этой энергетической компоненты E связано с диссипативной функцией $d = \mathrm{tr}(X_{\mathbf{u}} \mathrm{t}_{\mathbf{v}})$, где $X_{\mathbf{u}}$ – тензор напряжений (либо его сдвиговая часть), определяемый возникшими в среде смещениями $\mathbf{u}$, а $\mathrm{t}_{\mathbf{v}}$ – симметризованный тензор скоростей деформаций, определяемый полем скоростей $\mathbf{v}$ движущейся среды.

Таким образом, для моделирования описанных выше упругих процессов в сплошной среде (равно как и более сложных, например, с учетом ее пластичности) достаточно построить дивергентные, самосопряженные и знакоопределенные разностные аналоги тензорных операций векторного

анализа $\operatorname{div} \mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, $\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$ для моделирования силовых полей упругих процессов.

Для моделирования энергий деформации E и диссипативных функций d, их изменяющих, необходима на ячейках Ω сеточной среды аппроксимация интегралов $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}$ и $\left(\int_{\Omega} \operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}$. Этой цели и посвящено дальнейшее изложение работы.

3. Метрические сетки метода опорных операторов

Следуя [11], для сеток такого типа, состоящих из ячеек (Ω), образованных узлами (ω), гранями (σ) и ребрами (λ), характерно наличие замкнутой сопряженной («сдвинутой») сетки, состоящей, например, из доменов $d(\omega)$ вокруг узлов ω (см. рис. 1).

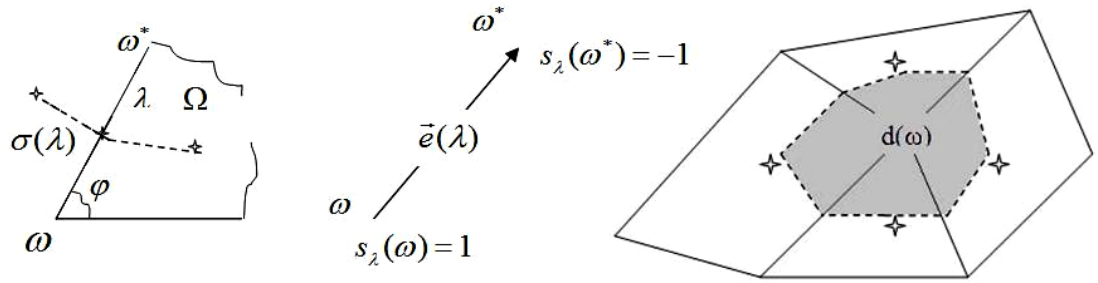


Рис. 1. Построение 2D-базисов в (r, z)-плоскостях.

Грани узлового домена определяются метрическим оператором сетки $\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_{\varphi}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)$. Базисы $\varphi(\lambda)$ здесь попарно входят в ячейки $\Omega(\lambda)$, примыкающие к ребру λ. Метрическая калибровка разностной сетки состоит в выборе объемов базисов (с естественным условием нормировки $\sum_{\varphi(\Omega)} V_{\varphi} = V_{\Omega}$). Она определяет конструкцию замкнутой сопряженной сетки для различных классов сеток. Это треугольно-четырехугольные 2D сетки, тетраэдральные, параллелепипедные, призматические и т.д. 3D сетки, а также их мортарные сшивки, адаптация (с введением новых узлов в ячейках Ω) с сохранением самосопряженности и знакоопределенности соответствующих «дивергентно-градиентных» операций векторного анализа континуальных краевых задач.

Дальнейшее изложение носит общий характер, конкретный выбор локальных базисных объемов V_{φ} иллюстрируется на примере треугольно-

четырехугольной 2D сетки.

В области O введем семейство нерегулярных разностных сеток. Ограничимся случаем, когда сетка состоит из треугольных и четырехугольных ячеек (Ω), базисов (φ), узлов (ω), ребер (λ) и связанных с ними $(\boldsymbol{\sigma}(\lambda))$ – границами балансовых узловых доменов $d(\omega)$ (см. рис. 1).

Базисы φ создаются системой исходных (ковариантных) ортов $\mathbf{e}(\lambda)$, образованных ребрами. Под центрами ячеек Ω и ребер λ будем понимать средние арифметические радиус-векторов узлов ω их образующих. Кривая, соединяющая эти центры (двух смежных через ребро ячеек или ячейку с граничным ребром $\partial\lambda$), представляет собой поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda) = \sum\limits_{\varphi(\lambda)} V_\varphi \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$, ориентированную так же, как и орт $\mathbf{e}(\lambda)$. Здесь $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ – орты взаимных (контравариантных) базисов по отношению к исходным базисам, образованным ортами $\mathbf{e}(\lambda)$.

Базисный объем дается формулой $V_\varphi = \frac{1}{6}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для треугольной ячейки Ω, содержащей базис φ, и $V_\varphi = \frac{1}{4}\left|\mathbf{e}(\lambda_1)\times\mathbf{e}(\lambda_2)\right|$ для четырехугольной ячейки, если $\lambda_1(\varphi)$ и $\lambda_2(\varphi)$ – ребра, образующие базис φ. Наконец, $\sum\limits_{\varphi(\lambda)}$ – суммирование по всем базисам φ, в образовании которых приняло участие ребро λ. Замкнутые вокруг узла ω поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda(\omega))$ образуют узловые домены $d(\omega)$.

К узлам отнесем искомую сеточную функцию $\mathbf{u}$. На ребрах выделим положительное направление (см. рис. 1) и отнесем к ним сеточную функцию

$$\Delta_\lambda \mathbf{u} = -\sum_{\omega(\lambda)} s_\lambda(\omega)\mathbf{u}_\omega = \mathbf{u}_{\omega'} - \mathbf{u}_\omega.$$

Сеточные тензорные поля X задаются своими представлениями в базисах X_φ.

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля DIN: $(\varphi)\to(\omega)$ определим, аппроксимируя теорему Гаусса на $d(\omega)$:

$$\mathrm{DIN}\, X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda), \quad \boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)} V_\varphi(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\, X_\varphi),$$

где $\sum\limits_{\lambda(\omega)}$ – суммирование по всем ребрам λ, имеющим общий узел ω.

Обозначая через $(\ )_\Delta$ аппроксимацию соответствующих дифференциальных выражений, имеем:

$$\left(\int_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right)dV\right)_\Delta = -\left(\int_O \mathbf{u}\,\mathrm{div}X\,dV \;-\; \int_{\partial O}\left(X\mathbf{u},\mathbf{ds}\right)\right)_\Delta =$$

$$= -\sum_\omega(\mathbf{u}_\omega,\mathrm{DIN}\,X) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi X_\varphi\right) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}(\nabla\mathbf{u}_\varphi X_\varphi^T) \equiv$$

$$\equiv <\nabla\mathbf{u},\ X> = <X,\nabla\mathbf{u}> = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}X_\varphi)\Big|_{X_\varphi = X_\varphi^T} = <\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}},X>.$$

Здесь $<\nabla\mathbf{u},\mathrm{X}>$ определяется как скалярное произведение сеточных тензорных полей, аппроксимирующее $\left(\int_O \mathrm{tr}\left(\nabla\mathbf{u}X^T\right)dV\right)_\Delta$.

Тензорные поля $\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}$, $\nabla\mathbf{u}$ и $\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}$, а также тензорное поле напряжений $X_{\Delta\mathbf{u}}$ даются своими представлениями в базисах:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \Delta_\lambda\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \quad \nabla\mathbf{u}_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi)} \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\bullet\Delta_\lambda\mathbf{u}, \tag{1}$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi + \nabla\mathbf{u}_\varphi\right), \qquad X_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = 2\mu\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} + \nu\ \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi})\delta. \tag{2}$$

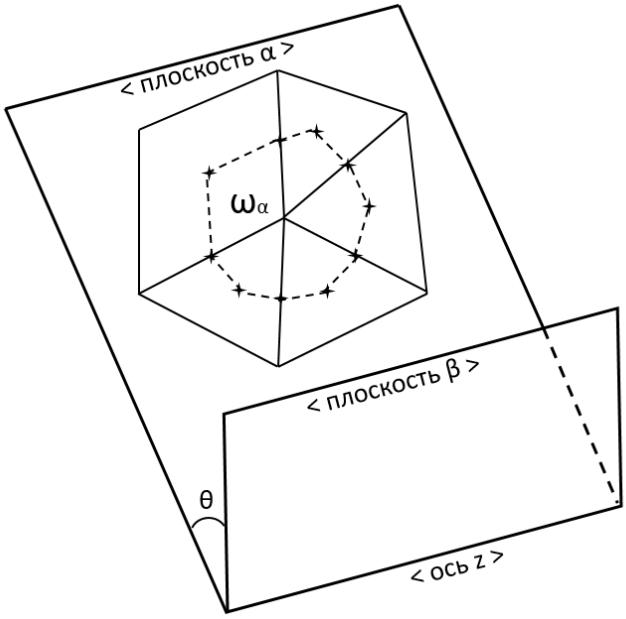
Под $\sum_{\lambda(\varphi)}$ понимается суммирование по ребрам λ, образующим базис φ.

Отметим, что отсюда следуют самосопряженность и положительная определенность операции $\mathrm{DIN}\,\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}} = \left(\mathrm{DIN}\,\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)^* > 0$, поскольку $-\sum_\omega(\mathbf{v}_\omega,\mathrm{DIN}\,\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)$, а также самосопряженность и положительная определенность $\mathrm{DIN}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right) = \left(\mathrm{DIN}\ \left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right)\right)^* > 0$, поскольку $-\sum_\omega\left(\mathbf{v}_\omega,\mathrm{DIN}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}}\right)\delta\right)\right) = \sum_\varphi V_\varphi \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)$.

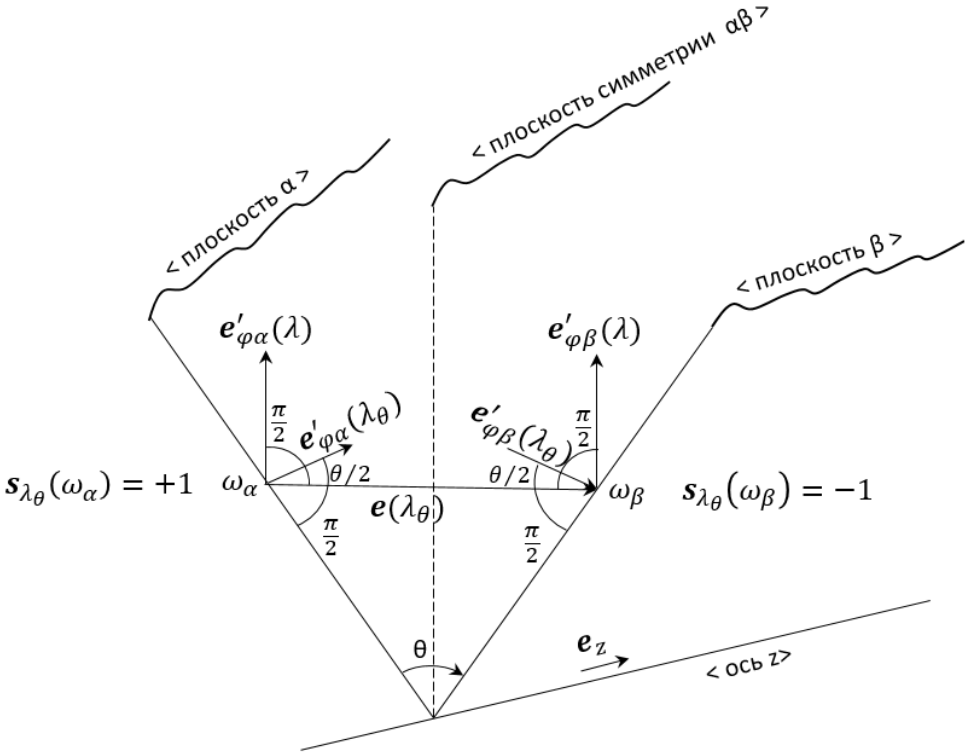
4. Метрические сетки метода опорных операторов в цилиндрической геометрии

Задачи с осевой симметрией будем рассматривать как трехмерные, где сеточные функции зависят только от переменных (r,z) и не зависят от азимутальной координаты θ. В недеформированном состоянии упругое тело занимает трехмерную область O с границей ∂O. При этом область O есть результат вращения вокруг оси симметрии z двумерной (r,z)-области. В двумерной области на плоскости (r,z) строится нерегулярная сетка (см. рис. 1, 2а). Эта сетка состоит из двумерных ячеек (Ω), узлов (ω), а также двумерных базисов (Φ) и ребер (λ) их образующих. Сетку в трехмерной области O построим путем последовательных поворотов двумерной сетки вокруг оси симметрии z на «малый» угол θ. Заметаемые при таком повороте плоскими ячейками «тонкие» в азимутальном направлении тела также будем называть ячейками, но уже трехмерными и обозначать (Ω). Трехмерные базисы (φ) при этом образуются из двумерных (Φ) (состоящих из ребер (λ)) добавлением «азимутального» ребра λ_θ трехмерной ячейки Ω. На рис. 2 орты $\mathbf{e}(\lambda_\theta)$ соединяют узлы ω_α и ω_β соседних (r,z)-плоскостей α и β в направлении азимутального вращения. Таким образом, трехмерная сетка заполняет всю трехмерную область. Ее ячейки (Ω) имеют размер θ (в радианах) по азимутальной переменной. Узлы (ω) не находятся на оси z. Из сказанного выше следует, что для определенной в узлах (ω) сеточной функции $\mathbf{u}=\{u_r,u_z,u_\theta=0\}$ можно написать $\mathbf{u}=u_r\mathbf{e}_r+u_z\mathbf{e}_z+0\cdot\mathbf{e}_\theta$. Здесь $\mathbf{e}_r,\mathbf{e}_z$ и $\mathbf{e}_\theta$ - единичные радиальный, осевой и азимутальный орты для плоскости (r,z). Очевидно, для α и β плоскостей (см. рис. 2) выполнено $u_{r\omega\alpha}=u_{r\omega\beta}=u_{r\omega}$, $u_{z\omega\alpha}=u_{z\omega\beta}=u_{z\omega}$, $\mathbf{e}_{z\alpha}=\mathbf{e}_{z\beta}=\mathbf{e}_z$.

Введем также орт $\mathbf{e}_1(\lambda_\theta)=\mathbf{e}_{r\beta}-\mathbf{e}_{r\alpha}=\dfrac{1}{r}\mathbf{e}(\lambda_\theta)$, $r=r_{\omega(\varphi)}$ – расстояние от оси z до центрального узла ω базиса φ. Очевидно также, что при $\theta\to 0$ орты $\mathbf{e}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_1(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)$ стремятся быть перпендикулярными плоскости (r,z) и быть однонаправленными с ортом $\mathbf{e}_\theta$, направление которого совпадает с азимутальным вращением θ этой плоскости. Аналогично орты взаимных базисов $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ стремятся принадлежать (r,z)-плоскости при $\theta\to 0$. Т.е. $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)=\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$. Наконец, модули $|\mathbf{e}_1(\lambda_\theta)|\to\theta\to 0$ и $|\mathbf{e}(\lambda_\theta)|\to r\theta\to 0$ при $\theta\to 0$.



а)



б)

Рис. 2. Построение 3D-базисов.

Поскольку для приращения сеточной функции $\mathbf{u}$ вдоль ребра λ_θ справедливо $\Delta_{\lambda_\theta}\mathbf{u} = \mathrm{u}_r\left(\mathbf{e}_{r\beta} - \mathbf{e}_{r\alpha}\right) = \mathrm{u}_r\mathbf{e}_1\left(\lambda_\theta\right) = \frac{1}{r}\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right)$, то формулы раздела 3, определяющие разностный аналог симметризованного тензора $\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$, в базисах сетки φ запишутся в виде:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} \Delta_\lambda\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right)\bullet\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\ , \tag{3}$$

$$\nabla\mathbf{u}_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\bullet\Delta_\lambda\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\bullet\mathbf{e}\left(\lambda_\theta\right), \tag{4}$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi + \nabla\mathbf{u}_\varphi\right), \tag{5}$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right) = \sum_{\lambda(\varphi)}\left(\Delta_\lambda\mathbf{u},\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\ . \tag{6}$$

Внутреннюю дивергенцию тензорного поля DIN: $(\varphi)\to(\omega)$ определим аналогично разделу 3:

$$\mathrm{DIN}\ X = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda) + \sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta),$$

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda) = \sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), X_\varphi\right),$$

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta) = \sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\ \sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), X_\varphi\right).$$

В обозначении $\{4|8\}$ цифра 4 соответствует количеству суммируемых базисов $\varphi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r,z)-плоскости, а цифра 8 соответствует внутреннему ребру λ.

Базисные объемы V_φ здесь выбираются как

$$V_\varphi = \frac{1}{2}\frac{S_{\Phi(\varphi)}}{S_{\Omega\supset\Phi(\varphi)}}\cdot V_{\Omega\supset\varphi} \to \frac{\theta}{2}S_{\Phi(\varphi)}\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi} = \frac{\theta}{2}V_{\Phi(\varphi)}\ \text{ при}\,\theta\to 0,$$

$$V_\Phi = S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\,.$$

Здесь $V_{\Omega\supset\varphi}$ – объем трехмерной ячейки Ω, содержащей базис φ; $S_{\Omega\supset\Phi(\varphi)}$ – соответствующая этой ячейке площадь в плоскости (r,z). Очевидно, $S_\Omega = \sum\limits_{\Phi(\Omega)} S_\Phi$.

Площади S_Φ в плоских базисах Φ в плоскости (r,z) определяются аналогично значениям площадей V_φ для треугольных и четырехугольных ячеек $\Omega\supset\Phi$, содержащих эти базисы (см. раздел 3). Под величиной $\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$ понимается расстояние от оси z до центра тяжести ячейки Ω.

5. Предельный переход $\theta\to 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа в отсутствии азимутальных компонент смещений

Моделирование соответствующего цилиндрической геометрии кривизны пространства выполним посредством предельного перехода при азимутальном вращении $\theta\to 0$ в построенных в разделах 3, 4 интегрально согласованных сеточных конструкциях метода опорных операторов.

Нам в дальнейшем понадобятся двумерные (в (r,z)-плоскости) разностные аналоги полученных в разделе 4 трехмерных тензорных операций для симметризованного тензора смещений $\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$ и дивергенции DIN: $(\varphi)\to(\omega)$, а также двумерный разностный аналог тождества $\operatorname{div}\mathbf{u} = \operatorname{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})$.

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi = \sum_{\lambda(\Phi)} \Delta_\lambda\mathbf{u}\bullet\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \tag{7}$$

$$(\nabla\mathbf{u})_\Phi = \sum_{\lambda(\Phi)} \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\bullet\Delta_\lambda\mathbf{u}, \tag{8}$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi + \nabla\mathbf{u}_\Phi\right), \tag{9}$$

$$\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \operatorname{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}) = \sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_\lambda\mathbf{u},\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)),$$

$$\mathrm{DIV}_2 : (\omega)\to(\Phi).$$

Далее для $\mathrm{DIN}_2:(\Phi)\to(\omega)$ имеем:

$$\mathrm{DIN}_2 X=\sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda),\quad \boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),X_\Phi\right),$$
$$V_\Phi=S_\Phi\cdot \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}.$$

В обозначении $\{2|4\}$ цифра 2 соответствует количеству суммируемых базисов $\Phi(\lambda)$ для граничного ребра λ в (r,z)-плоскости, а цифра 4 соответствует внутреннему ребру λ.

5.1. Аппроксимация силовых полей упругих процессов посредством операций $\operatorname{div}\mathrm{t}_{\mathbf{u}}$

Полагая $\mathrm{X}_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$, входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$ балансного домена $d(\omega)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r,z)-плоскости:

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\theta\to 0}=A_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\theta\to 0}+B_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\theta\to 0}.$$

Величина

$$A_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\theta\to 0}=\frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\left\{\sum_{\tilde\lambda(\varphi)}^{2}\left[\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\tilde\lambda)+\mathbf{e}'_\varphi(\tilde\lambda)\cdot\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\right]\right\}\right)\Bigg|_{\theta\to 0}=$$
$$=\theta\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} S_\Phi\cdot \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\frac{1}{2}\left\{\sum_{\tilde\lambda(\Phi)}^{2}\left[\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\Phi(\tilde\lambda)+\mathbf{e}'_\Phi(\tilde\lambda)\cdot\Delta_{\tilde\lambda}\mathbf{u}\right]\right\}\right)\right\}=$$
$$=\theta\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)\right\}=\theta\,\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)\big|_{X_\Phi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}}$$

при $\theta\to 0$. Здесь индекс суммирования $\tilde\lambda$, также как и λ, обозначает ребро в плоскости (r,z).

Далее величина

$$B_{X\lambda}\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\,\theta\to 0}=\frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda),\left\{\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left[\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)\right]\right\}\right)\Bigg|_{\theta\to 0}=$$

$$=\theta\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\left\{\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left(\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta\right)\right\}\right)=\theta\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_\Phi\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\mathbf{e}_\theta\right)\mathbf{e}_\theta=\theta\cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0},$$

при $\theta\to 0$, поскольку $\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\perp\mathbf{e}_\theta$. Здесь и далее $\lim\limits_{\theta\to 0}o(\theta)=0$.

Нами также использованы очевидные тождества:

$\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)=\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)=\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta$, а также $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)=\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$.

Окончательно:

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi},\,\theta\to 0}=\theta\cdot\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)\big|_{X_\Phi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}}.$$

при $\theta\to 0$. Теперь аналогично, полагая $X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в DIN X «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)$, действующую на боковую поверхность трехмерного балансного домена $d(\omega)$, лежащую в <плоскости симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r,z):

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\big|_{X_\varphi=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}}=\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\frac{1}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\left[\Delta_\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\cdot\Delta_\lambda\mathbf{u}\right]+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left[\mathbf{e}(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}(\lambda_\theta)\right]\right\}\right)=$$

$$=\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\left[\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\Delta_\lambda\mathbf{u}\right)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right)\Delta_\lambda\mathbf{u}\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\left[\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}(\lambda_\theta)\right)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\right)^2\mathbf{e}(\lambda_\theta)\right]\right\}.$$

Оценим второе слагаемое при $\theta \to 0$:

$$\sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi)} \left[\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \right) \Delta_\lambda \mathbf{u} \right] \right\} \Bigg|_{\theta\to 0} =$$

$$= \sum_{\Omega(\lambda_\theta),\, \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\varphi\beta\}\in\Omega} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \sum_{\lambda(\varphi\alpha)} \left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right) \Delta_\lambda \mathbf{u} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\lambda(\varphi\beta)} \left(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda) \right) \Delta_\lambda \mathbf{u} \right\} \Bigg|_{\theta\to 0} =$$

$$= \{ \sum_{\Omega(\lambda_\theta),\, \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\varphi\beta\}\in\Omega} \frac{V_\varphi}{2} \cdot$$

$$\cdot \{ \sum_{\lambda(\varphi\alpha)} \left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right) \left[\sum_{\omega(\lambda_\theta)=\{\omega\alpha,\omega\beta\}}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega) \Delta_{\lambda(\omega)} \mathbf{u} \right] \} \}_{\theta\to 0} =$$

$$= \theta \cdot o(\theta) \big|_{\theta\to 0}$$

Здесь мы воспользовались тем фактом, что в силу симметрии относительно <плоскости $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) выполнено:

$$-\left(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda) \right) = \left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right), \tag{10}$$

а также тем, что угол между векторами $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta)$ и $\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \le \left\{ \left\langle \textit{угол}\, \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right\rangle \right\} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2}.$$

В силу этого:

$$\lim_{\theta\to 0} \left| \left(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta), \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda) \right) \right| \le \frac{1}{2r} \left| \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) \right|. \tag{11}$$

Также, очевидно:

$$\lim_{\theta\to 0} \sum_{\omega(\lambda_\theta)=\{\omega\alpha,\omega\beta\}}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega) \Delta_{\lambda(\omega)} \mathbf{u} = 0.$$

Наконец, $V_\varphi \to \frac{\theta}{2} V_\Phi$ при $\theta \to 0$.

Таким образом, в силу выполненной оценки при $\theta \to 0$ имеем:

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\big|_{X_\varphi = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}, \theta\to 0} =$$

$$= \sum_{\Omega(\lambda_\theta)} \sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2} \frac{V_\varphi}{2} \left\{ \frac{\mathrm{u}_r}{r} \left[\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) + \left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\right)^2 \mathbf{e}(\lambda_\theta) \right] \right\}\Bigg|_{\theta\to 0} + \theta \cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0}.$$

Здесь $\lim\limits_{\theta\to 0} o(\theta) = 0$. Мы воспользовались равенствами $\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \Delta_\lambda \mathbf{u}\right) = 0$, т.к. $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \perp \Delta_\lambda \mathbf{u}$ и очевидным свойством взаимного базиса $\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \mathbf{e}_\varphi(\lambda_\theta)\right) = 1$.

Вклад от обеих боковых поверхностей, входящих в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}\big|_{X_\varphi = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}, \theta\to 0}$ “упругих” сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)$, при $\theta \to 0$ оценивается как

$$\left[\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega) \boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta) \right]\Bigg|_{X_\varphi = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}, \theta\to 0} =$$

$$= \frac{\theta}{4} \left[\sum_{\Phi(\omega)} S_\Phi \, \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi} \right] \left(-\frac{\mathrm{u}_r}{r} \mathbf{e}_r \right) \left[2 \frac{1}{r\theta\cos(\theta/2)} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \right.$$

$$\left. + 4 \frac{1}{\left(r\theta\cos(\theta/2)\right)^2} (r\theta) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right) \right]\Bigg|_{\theta\to 0} = -\theta \frac{\mathrm{u}_r}{r^2} V_{2\omega} \mathbf{e}_r$$

Здесь $V_{2\omega} = \sum\limits_{\Phi(\omega)} V_\Phi$, $V_\Phi = S_\Phi \cdot \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$.

В итоге, с учетом вычисленных ранее «упругих» сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_\varphi = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}, \theta\to 0}$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис. 1), при $\theta \to 0$ окончательно получаем:

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right\}\Big|_{\theta\to 0} = \theta \left[\mathrm{DIN}_2\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right\} - \frac{\mathrm{u}_r}{r^2} \mathbf{e}_r V_{2\omega} \right] \tag{12}$$

5.2. Аппроксимация нормальных силовых полей упругих процессов посредством операций $\operatorname{div}\left(\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\delta\right)$

Полагая $\mathrm{X}_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{X}}(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum\limits_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)$ балансного домена $\mathrm{d}(\omega)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r,z)-плоскости:

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_{\varphi}\left(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right)=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)V_{\varphi}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),$$

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta,\theta\to 0}=\theta\left\{\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}\left[\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right\}$$

Суммарный вклад всех таких сил в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ при $\theta\to 0$ составит:

$$\sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\Bigg|_{X_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta,\theta\to 0}=\theta\left\{\sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega)\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}\left[\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right\}=$$

$$=\theta\cdot\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}$$

Теперь аналогично, полагая $\mathrm{X}_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{X}}(\lambda_{\theta})$, действующую на боковую поверхность трехмерного балансного домена $\mathrm{d}(\omega)$, лежащую в <плоскости симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r,z).

$$\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_{\theta})\big|_{X_{\varphi}=\operatorname{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}=\sum_{\Omega(\lambda_{\theta})}\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2} V_{\varphi}\left(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}),\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\left(\Delta_{\lambda}\mathbf{u},\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right\}\delta\right)=$$

$$=\sum_{\Omega(\lambda_{\theta})}\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2} V_{\varphi}\left\{\sum_{\lambda(\varphi)}\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right\}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}).$$

Отметим, что в силу симметрии относительно <плоскостей $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) величина $\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)=\left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\right)$ = <*const* по θ-вращению> (как и объемы V_φ и $\frac{\mathrm{u}_r}{r}$) является постоянной при вращениях базисов φ на «малые» углы θ. Очевидно, что $\lim\limits_{\theta\to 0}\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)=\left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)$.

Суммарный вклад всех таких сил в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}$ при $\theta\to 0$ составит:

$$\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_X(\lambda_\theta)\Big|_{X_\varphi=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta,\theta\to 0}=$$

$$=\frac{\theta}{2}\left[\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\left\{\sum_{\lambda(\Phi)}\Psi_{\Phi,\theta}(\lambda)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right\}\right](-\mathbf{e}_r)\left[2\frac{1}{r\theta\cos(\theta/2)}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right]\Bigg|_{\theta\to 0}=$$

$$=-\theta\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\sum_{\lambda(\Phi)}\left(\Delta_\lambda\mathbf{u},\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\right\}=$$

$$=-\theta\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}$$

В итоге, с учетом вычисленных ранее «упругих» сил $\boldsymbol{\tau}_X(\lambda)\big|_{X_\varphi=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta}$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис. 1), окончательно получим:

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0}=\theta\left\{\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}\right\}.$$

5.3. Аппроксимация энергии деформации упругих процессов

Как отмечалось в разделе 2, для моделирования энергии деформации и диссипативных функций, ее изменяющих, на ячейках сетки Ω необходима аппроксимация интегралов:

$$\left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} \text{ и } \left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{v}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}},$$

где $\mathbf{u}$ – смещения, $\mathbf{v}$ – поле скоростей движущейся среды.

С учетом полученного в разделах 4 и 5 будем иметь:

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\Big|_{\theta\to 0} = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta ,$$

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\Big|_{\theta\to 0} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r} = \mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r} .$$

Здесь $\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \sum\limits_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right).$

Поэтому для первого интеграла при $\theta \to 0$ получим:

$$\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \sum_{\varphi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)V_\varphi\Bigg|_{\theta\to 0} =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \mathrm{tr}\left[\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta\right)\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta\right)\right] S_\Phi =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r\mathrm{v}_r}{r^2}\right] S_\Phi$$

Для второго интеграла при $\theta \to 0$:

$$\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \sum_{\varphi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\varphi}\right)V_\varphi\Bigg|_{\theta\to 0} =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi$$

Окончательно имеем:

$$\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r\mathrm{v}_r}{r^2}\right] S_\Phi ,$$

$$\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{u}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_\mathbf{v}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right] S_\Phi .$$

5.4. Итоговая сводка формул с нулевой азимутальной компонентой смещений u_θ

В заключение приведем итоговую сводку базовых формул метода опорных операторов, полученную для аппроксимации силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})$ и $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\delta\right)$, а также соответствующих энергий деформаций и диссипативных функций, их изменяющих, в виде интегралов на ячейках сетки $\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}})dV$ и $\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{v}})dV$ в цилиндрической геометрии.

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right\}\Big|_{\theta\to 0}=\theta\cdot\left[\mathrm{DIN}_2\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right\}-\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}\mathbf{e}_r V_{2\omega}\right],$$

$$V_{2\omega}=\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi,\ V_\Phi=S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi},$$

$$\mathrm{DIN}_2 X=\sum_{\lambda(\omega)}s_\lambda(\omega)\boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda),\ \boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),X_\Phi\right),$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi+\nabla\mathbf{u}_\Phi\right),$$

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_\Phi=\sum_{\lambda(\Phi)}\Delta_\lambda\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\ \nabla\mathbf{u}_\Phi=\sum_{\lambda(\Phi)}\mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\cdot\Delta_\lambda\mathbf{u},$$

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0}=\theta\left\{\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}-\right.$$

$$\left.-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}\right\},$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}}\mathrm{t}_{\mathbf{v}})dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0}=\theta\mathrm{r}_\Omega\sum_{\Phi(\Omega)}\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r\mathrm{v}_r}{r^2}\right]S_\Phi,$$

$$\left(\int\limits_{\Omega}\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{u}})\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{v}})dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0}=\theta\mathrm{r}_\Omega\sum_{\Phi(\Omega)}\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u}+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v}+\frac{\mathrm{v}_r}{r}\right]S_\Phi,$$

$$\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \sum_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right).$$

6. Предельный переход $\theta \to 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа при наличии азимутальной компоненты смещений u_θ

Под полным вектором смещений $\mathbf{U}$ будем понимать его представление $\mathbf{U} = \mathrm{u}_r\mathbf{e}_r + \mathrm{u}_z\mathbf{e}_z + \mathrm{u}_\theta\mathbf{e}_\theta = \mathbf{u} + \mathbf{u}_\theta$, где $\mathbf{u} = \mathrm{u}_r\mathbf{e}_r + \mathrm{u}_z\mathbf{e}_z$ – его часть, лежащая в (r, z) – плоскости, и $\mathbf{u}_\theta = \mathrm{u}_\theta\mathbf{e}_\theta$ – ортогональная этой плоскости азимутальная компонента вектора смещений.

Для приращения азимутальных сеточных смещений $\mathbf{u}_\theta$ вдоль ребра λ_θ справедливо $\Delta_{\lambda_\theta}\mathbf{u}_\theta = u_\theta \Delta_{\lambda_\theta}\mathbf{e}_\theta = u_\theta(\mathbf{e}_{\theta\beta} - \mathbf{e}_{\theta\alpha}) = -2\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}$. Здесь $\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}$ – единичный радиальный орт в (r, z) – плоскости симметрии $<\alpha\beta>$ (см. рис. 2). Отсюда формулы аналогичные (1), (2) из раздела 3, но определяющие разностный аналог симметризованного тензора $\mathrm{t}_{\mathbf{u}\theta}$ для азимутальной компоненты смещений $\mathbf{u}_\theta$ в базисах сетки φ запишутся в виде:

$$\left(\frac{D\mathbf{u}_\theta}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} (\Delta_\lambda u_\theta)\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) - 2\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>} \cdot \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta), \tag{13}$$

$$\left(\nabla\mathbf{u}_\theta\right)_\varphi = \sum_{\lambda(\varphi),\lambda_\theta(\varphi)} (\Delta_\lambda u_\theta)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \cdot \mathbf{e}_\theta - 2\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \cdot \mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}, \tag{14}$$

$$t_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}_\theta}{D\mathbf{r}}\right)_\varphi + \left(\nabla\mathbf{u}_\theta\right)_\varphi\right), \tag{15}$$

$$tr(t_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}) = \sum_{\lambda(\varphi)} (\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda)) - 2\sin\frac{\theta}{2} u_\theta(\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)) \,. \tag{16}$$

Угол между векторами $\mathbf{e}_\theta$ и $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \le \left\{ \left\langle \textit{угол}\, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \right\rangle \right\} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \,,$$

в силу этого

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{1}{\theta} \left| \left(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda) \right) \right| \le \frac{1}{2} \left| \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) \right| . \tag{17}$$

Аналогично угол между векторами $\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}$ и $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)$ удовлетворяет неравенству:

$$\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} \le \left\{ \left\langle \textit{угол}\, \mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \right\rangle \right\} \le \frac{\pi}{2} + \frac{\theta}{2} \,,$$

и в силу этого

$$\lim_{\theta\to 0} \left| \left(\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}, \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \right) \right| \le \frac{1}{2r} \,.$$

Отсюда

$$\lim_{\theta\to 0} tr(t_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}) = 0 \,, \tag{18}$$

т.е. для полного симметризованного тензора смещений

$$t_{\Delta\mathbf{U}\theta\varphi} = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{U}}{D\mathbf{r}} \right)_\varphi + \left(\nabla\mathbf{U} \right)_\varphi \right) = t_{\Delta\mathbf{u}\varphi} + t_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi} \tag{19}$$

выполнено

$$\lim_{\theta\to 0} tr(t_{\Delta\mathbf{U}\varphi}) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} \right) + \frac{\mathrm{u}_r}{r} \,, \tag{20}$$

где согласно (7) – (9): $\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} \right) = \sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda))$.

6.1. Аппроксимация силовых полей упругих процессов посредством операции $\mathrm{div}\,\mathrm{t}_{\mathbf{u}\theta}$

Полагая $\mathrm{X}_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum\limits_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r, z) – плоскости:

$$\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0}=A_{X\theta\lambda}\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0}+B_{X\theta\lambda}\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0}. \tag{21}$$

Величина

$$\begin{aligned}
A_{X\theta\lambda}\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0}&=\frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}V_{\varphi}\left(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),\left\{\sum_{\tilde{\lambda}(\varphi)}^{2}(\Delta_{\tilde{\lambda}}u_{\theta})\left[\mathbf{e}_{\theta}\cdot\mathbf{e}'_{\varphi}(\tilde{\lambda})+\mathbf{e}'_{\varphi}(\tilde{\lambda})\cdot\mathbf{e}_{\theta}\right]\right\}\right)\Bigg|_{\theta\to 0}=\\
&=\theta\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}S_{\Phi}\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\left(\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda),\frac{1}{2}\left\{\sum_{\tilde{\lambda}(\Phi)}^{2}(\Delta_{\tilde{\lambda}}u_{\theta})\left[\mathbf{e}_{\theta}\cdot\mathbf{e}'_{\Phi}(\tilde{\lambda})+\mathbf{e}'_{\Phi}(\tilde{\lambda})\cdot\mathbf{e}_{\theta}\right]\right\}\right)=\\
&=\theta\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_{\Phi}\left(\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda),\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\Phi}\right)=\theta\,\boldsymbol{\tau}_{2X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\Phi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\Phi}}=\\
&=\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\tau}_{2W\theta}(\lambda)\big|_{W_{\theta\Phi}=(GRAD_2u_{\theta})_{\Phi}}\cdot\mathbf{e}_{\theta}=\frac{\theta}{2}\tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda)\big|_{\mathbf{W}_{\theta\Phi}=(GRAD_2u_{\theta})_{\Phi}}\mathbf{e}_{\theta}
\end{aligned} \tag{22}$$

при $\theta\to 0$. Здесь

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\Phi}&=\frac{1}{2}\sum_{\tilde{\lambda}(\Phi)}^{2}(\Delta_{\tilde{\lambda}}u_{\theta})\left[\mathbf{e}_{\theta}\cdot\mathbf{e}'_{\Phi}(\tilde{\lambda})+\mathbf{e}'_{\Phi}(\tilde{\lambda})\cdot\mathbf{e}_{\theta}\right]=\\
&=\frac{1}{2}\left[\mathbf{e}_{\theta}\cdot(GRAD_2u_{\theta})_{\Phi}+(GRAD_2u_{\theta})_{\Phi}\cdot\mathbf{e}_{\theta}\right]
\end{aligned}$$

Также для векторной дивергенции $\mathrm{DIN}_2:(\Phi)\to(\omega)$ тензорного поля W_{θ}, заданного своими представлениями в базисах Φ, имеем:

$$\mathrm{DIN}_2W_{\theta}=\sum_{\lambda(\omega)}s_{\lambda}(\omega)\boldsymbol{\tau}_{2W\theta}(\lambda),\quad \boldsymbol{\tau}_{2W\theta}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_{\Phi}\left(\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda),W_{\theta\Phi}\right),$$

где $V_\Phi = S_\Phi \cdot \mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$. Здесь $\boldsymbol{\tau}_{2W\theta}(\lambda)$ имеет смысл векторного силового потока тензорного поля W_θ на границах балансного домена $d(\omega\}$ (см. рис. 1).

Аналогично записывается скалярная дивергенция $\mathrm{DIN}_2 : (\Phi) \to (\omega)$ векторного поля $\mathbf{W}_\theta$, заданного своими представлениями в базисах Φ:

$$\mathrm{DIN}_2 \mathbf{W}_\theta = \sum_{\lambda(\omega)} s_\lambda(\omega)\tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda), \quad \tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda) = \sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \mathbf{W}_{\theta\Phi}\right). \tag{23}$$

Здесь $\tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda)$ уже скалярный поток векторного поля $\mathbf{W}_\theta$ на границах того же балансного домена $d(\omega\}$ (см. рис. 1).

Для операции градиента в (r, z) – плоскости $GRAD_2 : (\omega) \to (\Phi)$ введено представление:

$$(GRAD_2 u_\theta)_\Phi = \sum_{\tilde{\lambda}(\Phi)}^{2} (\Delta_{\tilde{\lambda}} u_\theta)\mathbf{e}'_\Phi(\tilde{\lambda}) \tag{24}$$

Далее выполним преобразования при $\theta \to 0$:

$$\begin{aligned}
&B_{X\theta\lambda}\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0} = \\
&= \frac{1}{2}\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}} V_\varphi\left(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda), \left\{-2\sin\frac{\theta}{2} u_\theta\left[\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) + \mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\right]\right\}\right)\Bigg|_{\theta\to 0} = \\
&= -\theta\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}} V_\Phi\left(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \frac{1}{2}\left\{\frac{\mathrm{u}_\theta}{r}\left[\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_r\right]\right\}\right) = \\
&= -\frac{\theta}{2}\boldsymbol{\tau}_{2W\theta}(\lambda)\big|_{W_{\theta\Phi}=(\frac{\mathrm{u}_\theta}{r})\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta} = -\frac{\theta}{2}\tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda)\big|_{\mathbf{W}_{\theta\Phi}=(\frac{\mathrm{u}_\theta}{r})\mathbf{e}_r}\,\mathbf{e}_\theta
\end{aligned} \tag{25}$$

Здесь использовано $V_\varphi \to \frac{\theta}{2}V_\Phi$ и $\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta) \to \frac{1}{r\theta}\mathbf{e}_\theta$ при $\theta \to 0$. Также $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}'_\varphi(\lambda) = \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)$, $\lim\limits_{\theta\to 0}\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>} = \mathbf{e}_r$, $(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda), \mathbf{e}_\theta) = 0$.

Окончательно из (21), (22) и (25) при $\theta \to 0$ имеем:

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0} = \\
&= \frac{\theta}{2}\left[\tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda)\big|_{\mathbf{W}_{\theta\Phi}=(GRAD_2 u_\theta)_\Phi} - \tau_{2\mathbf{W}\theta}(\lambda)\big|_{\mathbf{W}_{\theta\Phi}=\left(\frac{\mathrm{u}_\theta}{r}\right)\mathbf{e}_r}\right]\mathbf{e}_\theta.
\end{aligned} \tag{26}$$

Теперь, аналогично, полагая $\mathrm{X}_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) боковую поверхность трехмерного балансного домена $d(\omega)$, лежащую в <плоскости симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r, z):

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda_\theta)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}} = \sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2} V_\varphi\Bigg(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\,\frac{1}{2}\Bigg\{\sum_{\lambda(\varphi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\Big[\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\cdot\mathbf{e}_\theta\Big]-\\
&-2\sin\frac{\theta}{2}\,u_\theta\Big[\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\cdot\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\cdot\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\Big]\Bigg\}\Bigg)=\\
&=\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\Bigg\{\sum_{\lambda(\varphi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\Big[(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\,\mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)+(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\,\mathbf{e}'_\varphi(\lambda))\mathbf{e}_\theta\Big]-\\
&-2\sin\frac{\theta}{2}\,u_\theta\Big[(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)+\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)^2\cdot\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\Big]\Bigg\}\,.
\end{aligned}\tag{27}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (27)

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\{\sum_{\lambda(\varphi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\Big[(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}_\theta)\mathbf{e}'_\varphi(\lambda)\Big]\}=\\
&=\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\,\varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\,\varphi\beta\}\in\Omega}\frac{V_\varphi}{2}\{[\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{\theta\alpha})\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)+\\
&+\sum_{\lambda(\varphi\beta)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{\theta\beta})\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda)]\}=\\
&=\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\,\varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha\}\in\Omega}V_\varphi\{\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{\theta\alpha})\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\}.
\end{aligned}\tag{28}$$

Здесь в силу симметрии относительно <плоскости $\alpha\beta$> (см. рис. 2б) выполнено:

$$(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{\theta\alpha})=(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{\theta\beta})=\frac{1}{r\,\sin\theta}\,,\tag{29}$$

$$\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)=\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda)=(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}+(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda),\mathbf{e}_z)\mathbf{e}_z\,.\tag{30}$$

Причем скалярные произведения в правой части (30) вообще не зависят от азимутальной координаты θ.

$$\lim_{\theta\to 0}(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})=(\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda),\mathbf{e}_r)\,,\ \lim_{\theta\to 0}\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}=\mathbf{e}_r\,.$$

Оценим второе слагаемое в (27) при $\theta\to 0$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\{\sum_{\lambda(\varphi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\Big[(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_\varphi(\lambda))\mathbf{e}_\theta\Big]\}\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=\sum_{\substack{\Omega(\lambda_\theta),\\ \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha,\,\varphi\beta\}\in\Omega}}\frac{V_\varphi}{2}\{[\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda))\mathbf{e}_{\theta\alpha}+\\
&+\sum_{\lambda(\varphi\beta)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda))\mathbf{e}_{\theta\beta}]\}\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=\sum_{\substack{\Omega(\lambda_\theta),\\ \varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha\}\in\Omega}}\frac{V_\varphi}{2}\{\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}(\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda))[\sum_{\substack{\omega(\lambda_\theta)=\\ \{\omega\alpha,\omega\beta\}}}^{2}s_{\lambda_\theta}(\omega)\mathbf{e}_{\theta(\omega)}]\}\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=\theta\cdot o(\theta)\Big|_{\theta\to 0}.
\end{aligned}\tag{31}$$

Здесь $\lim\limits_{\theta\to 0}o(\theta)=0$ и мы воспользовались (10) и (11), $V_\varphi\to\frac{\theta}{2}V_\Phi$ при $\theta\to 0$, а также тем фактом, что

$$\sum_{\omega(\lambda_\theta)=\{\omega\alpha,\omega\beta\}}^{2}s_{\lambda_\theta}(\omega)\mathbf{e}_{\theta(\omega)}=-(\mathbf{e}_{\theta\beta}-\mathbf{e}_{\theta\alpha})=2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\,,$$

$$\lim_{\theta\to 0}\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}=\mathbf{e}_r\,.$$

Далее слагаемые в (27):

$$\begin{aligned}
&\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\{-2\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\Big[(\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)\Big]\}\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=-\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\,\varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha\}\in\Omega}V_\varphi\sin\frac{\theta}{2}u_\theta(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})[\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta)-\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta)]\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=-\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\,\varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha\}\in\Omega}V_\varphi\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\frac{1}{r\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2}[2\sin\frac{\theta}{2}\frac{1}{r\sin\theta}\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}]\Big|_{\theta\to 0}=\\
&=\theta\cdot o(\theta)\Big|_{\theta\to 0}.
\end{aligned}\tag{32}$$

Здесь $\lim\limits_{\theta\to 0} o(\theta)=0$, $V_\varphi \to \frac{\theta}{2}V_\Phi$ при $\theta\to 0$, а также использовано (29) и условие симметрии относительно <плоскости $\alpha\beta$> (см. рис. 2б)

$$-(\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})=(\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_\theta),\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>})$$

Наконец, последнее слагаемое в (27) с учетом (29) и того же условия симметрии дает:

$$\begin{aligned}&\sum_{\Omega(\lambda_\theta)}\sum_{\varphi(\lambda_\theta)\in\Omega}^{2}\frac{V_\varphi}{2}\{-2\sin\frac{\theta}{2}u_\theta\left[\mathbf{e}'_\varphi(\lambda_\theta)^2\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\right]\}=\\&=-2\sum_{\Omega(\lambda_\theta),\,\varphi(\lambda_\theta)=\{\varphi\alpha\}\in\Omega}V_\varphi\{\sin\frac{\theta}{2}u_\theta[\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}]\}.\end{aligned}\tag{33}$$

В итоге, с учетом вычисленных ранее в (26) «упругих» сил $\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi},\,\theta\to 0}$, действующих на поверхности $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)$ (см. рис. 1), а также представленных в (27) «упругих» сил, действующих на боковые поверхности трехмерного балансного домена $d(\omega)$, которые лежат в <плоскостях симметрии $\alpha\beta$> (см. рис. 2б), получим (с учетом (23), (24), (28), (31)-(33)) при $\theta\to 0$:

$$\begin{aligned}&\mathrm{DIN}\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\}\big|_{\theta\to 0}=\frac{\theta}{2}\{\mathrm{DIN}_2\{(GRAD_2\,u_\theta-\frac{u_\theta}{r}\,\mathbf{e}_r)_\Phi\}+\\&+\frac{1}{r}([\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi(GRAD_2\,u_\theta)_\Phi],\mathbf{e}_r)-\frac{u_\theta}{r^2}V_{2\omega}\}\mathbf{e}_\theta\end{aligned}\tag{34}$$

Напомним также, что $V_{2\omega}=\sum\limits_{\Phi(\omega)}V_\Phi$, $V_\Phi=S_\Phi\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}$.

Здесь результат, полученный в (28) (с учетом представления (30)) дает вклад при $\theta\to 0$ в дивергенцию в виде:

$$\begin{aligned}&\{\sum_{\Phi(\omega)}\frac{\theta}{2}V_\Phi\sum_{\lambda(\Phi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\,\frac{1}{r\sin\theta}\,(\mathbf{e}'_\Phi(\lambda),\mathbf{e}_r)\;2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_\theta\}\big|_{\theta\to 0}=\\&=\frac{\theta}{2}\,\frac{1}{r}\,([\sum_{\Phi(\omega)}V_\Phi(GRAD_2\,u_\theta)_\Phi],\mathbf{e}_r)\;\mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

Также результат, полученный в (33) дает вклад при $\theta\to 0$ в дивергенцию в следующем виде:

$$-2\sum_{\Phi(\omega)}\frac{\theta}{2}V_{\Phi}\{\sin\frac{\theta}{2}\,u_{\theta}[\frac{1}{r^2\sin^2\theta}2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_{\theta}]\}\Big|_{\theta\to 0}=$$

$$=-\frac{\theta}{2}\,\frac{u_{\theta}}{r^2}\,V_{2\omega}\,\mathbf{e}_{\theta}.$$

Таким образом для полного вектора смещений $\mathbf{U}=\mathbf{u}+\mathbf{u}_{\theta}$ дивергенция его симметризованного тензора смещений $\mathrm{DIN}\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}+\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\}\big|_{\theta\to 0}$ определяется согласно (12) и (34).

6.2. Аппроксимация нормальных силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}\big(\mathrm{tr}\big(\mathrm{t}_{\mathbf{u}\theta}\big)\delta\big)$, связанных с азимутальным вращением u_{θ}

Полагая $\mathrm{X}_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\big(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\big)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)$, действующую на предельную (при $\theta\to 0$) поверхность $\boldsymbol{\sigma}(\lambda)=\sum\limits_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)$ (см. рис. 1), перпендикулярную (r, z) – плоскости:

$$\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta}=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}V_{\varphi}\Big(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda),\mathrm{tr}\big(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\big)\delta\Big)=$$

$$=\sum_{\varphi(\lambda)}^{\{4|8\}}\mathrm{tr}\big(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\big)V_{\varphi}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda).$$

Далее в силу (16), (20) и $V_{\varphi}\to\frac{\theta}{2}V_{\Phi}$ при $\theta\to 0$ имеем:

$$\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta,\,\theta\to 0}=\frac{\theta}{2}\left\{\sum_{\varphi(\lambda),\theta\to 0}^{\{4|8\}}\mathrm{tr}\,(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi})\big|_{\theta\to 0}V_{\Phi}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right\}= \tag{35}$$

$$=\theta\cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0}.$$

Здесь и далее $\lim\limits_{\theta\to 0}o(\theta)=0$. Суммарный вклад всех таких сил (35) в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$ при $\theta\to 0$ составит:

$$\sum_{\lambda(\omega)} s_{\lambda}(\omega)\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda)\Bigg|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta,\theta\to 0} = \theta\cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0}. \tag{36}$$

Теперь, аналогично, полагая $\mathrm{X}_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta$, вычислим при $\theta\to 0$ входящую в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$ «упругую» силу $\boldsymbol{\tau}_{\mathrm{X}\theta}(\lambda_{\theta})$, действующую на боковую поверхность трехмерного балансного домена $\mathrm{d}(\omega)$, лежащую в плоскости симметрии $<\alpha\beta>$ (см. рис. 2б) и в пределе (при $\theta\to 0$) совпадающую с плоскостью (r,z).

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda_{\theta})\big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta} = \sum_{\Omega(\lambda_{\theta})}\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2} V_{\varphi}(\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}),\{\sum_{\lambda(\varphi)}(\Delta_{\lambda}u_{\theta})\left(\mathbf{e}_{\theta},\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)\right)-\\
&-2\sin\frac{\theta}{2}\,u_{\theta}(\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>},\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}))\}\delta) =\\
&=\sum_{\Omega(\lambda_{\theta})} V_{\varphi\alpha}\{\sum_{\lambda(\varphi\alpha)}(\Delta_{\lambda}u_{\theta})\left(\mathbf{e}_{\theta},\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda)\right)\frac{2}{r\sin\theta}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\mathbf{e}(\lambda_{\theta})}{|\mathbf{e}(\lambda_{\theta})|}-\\
&-2\sin\frac{\theta}{2}\,u_{\theta}(\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>},\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_{\theta}))\,\frac{2}{r\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}\}
\end{aligned} \tag{37}$$

Здесь

$$(\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>},\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_{\theta})) = \frac{1}{r\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2}\ .$$

Величины $(\Delta_{\lambda}u_{\theta})$, $\left(\mathbf{e}_{\theta},\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda)\right)$, как и объемы $V_{\varphi}=V_{\varphi\alpha}=V_{\varphi\beta}$, являются постоянными по $\theta-$вращению (т.е. при вращениях базисов φ на “малые” углы θ). Также мы воспользовались представлениями (см. (29))

$$\sum_{\varphi(\lambda_{\theta})\in\Omega}^{2}\mathbf{e}'_{\varphi}(\lambda_{\theta}) = \frac{2}{r\sin\theta}\cos\frac{\theta}{2}\,\frac{\mathbf{e}(\lambda_{\theta})}{|\mathbf{e}(\lambda_{\theta})|},$$

$$\mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda_{\theta})-\mathbf{e}'_{\varphi\beta}(\lambda_{\theta}) = \frac{2}{r\sin\theta}\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>}.$$

Суммарный вклад всех таких сил (37) в $\mathrm{DIN}\,\mathrm{X}_{\theta}$, с учетом (17), при $\theta\to 0$ составит:

$$\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\boldsymbol{\tau}_{X\theta}(\lambda_\theta)\Big|_{X_{\theta\varphi}=\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta,\theta\to 0} =$$

$$= \frac{\theta}{2}[\sum_{\Phi(\omega)} V_\Phi\{\sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_\lambda u_\theta)(\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}'_{\varphi\alpha}(\lambda))\big|_{\theta\to 0} \cdot \frac{2}{r}(-\mathbf{e}_r) - \tag{38}$$

$$-\frac{u_\theta}{r^2}\mathbf{e}_r(2\sin^2(\frac{\theta}{2})\mathbf{e}_\theta)\}] = \theta\cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0}.$$

Было использовано

$$\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\frac{\mathbf{e}(\lambda_\theta)}{|\mathbf{e}(\lambda_\theta)|} = -2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_r,$$

$$\sum_{\lambda_\theta(\omega)}^{2} s_{\lambda_\theta}(\omega)\,\mathbf{e}_{r<\alpha\beta>} = 2\sin\frac{\theta}{2}\,\mathbf{e}_\theta$$

В итоге, с учетом (36) и (38) при $\theta\to 0$ окончательно получим:

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0} = \theta\cdot o(\theta)\big|_{\theta\to 0}.$$

6.3. Аппроксимация энергии деформации упругих процессов с учетом азимутального вращения u_θ

Для моделирования энергии деформации и диссипативных функций, ее изменяющих, на ячейках сетки Ω необходима аппроксимация интегралов:

$$\left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}} \text{ и } \left(\int_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}},$$

где $\mathbf{U} = \mathbf{u} + \mathbf{u}_\theta$ – полный вектор смещений, $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_\theta$ – полное поле скоростей движущейся среды ($\mathbf{v} = \mathrm{v}_r\mathbf{e}_r + \mathrm{v}_z\mathbf{e}_z$, $\mathbf{v}_\theta = \mathrm{v}_\theta\,\mathbf{e}_\theta$).

С учетом (3)-(6), (7)-(9), а также (13)-(15) и (18), (19) будем иметь:

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\big|_{\theta\to 0} = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\,\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\big|_{\theta\to 0} = \frac{1}{2}\sum_{\lambda(\Phi)}(\Delta_\lambda u_\theta)\left[\mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}'_\Phi(\lambda) + \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\cdot\mathbf{e}_\theta\right] -$$

$$-\frac{u_\theta}{2r}\left[\mathbf{e}_r\cdot\mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_r\right],$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi})\Big|_{\theta\to 0} = tr(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}) + \frac{\mathrm{u}_r}{r} \ ,$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi})\Big|_{\theta\to 0} = 0 \, .$$

Для полного симметризованного тензора смещений выполнено

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi}\Big|_{\theta\to 0} = \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\Big|_{\theta\to 0} + \mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\Big|_{\theta\to 0},$$

$$\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi})\Big|_{\theta\to 0} = \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}) + \frac{u_\theta}{r}$$

Здесь $\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \sum\limits_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_\lambda \mathbf{u}, \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\right)$.

Аналогичные формулы имеют место для скоростной компоненты. Поэтому для первого интеграла при $\theta \to 0$ получим:

$$\left(\int\limits_\Omega \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right) dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \sum_{\varphi(\Omega)} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{V}\varphi}\right) V_\varphi\Bigg|_{\theta\to 0} =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} tr[\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{2}\sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_\lambda u_\theta)\left[\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) + \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\cdot \mathbf{e}_\theta\right] -$$

$$-\frac{u_\theta}{2r}\left[\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r\right]\} \cdot$$

$$\cdot\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{2}\sum_{\lambda(\Phi)} (\Delta_\lambda \mathrm{v}_\theta)\left[\mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}'_\Phi(\lambda) + \mathbf{e}'_\Phi(\lambda)\cdot \mathbf{e}_\theta\right] -$$

$$-\frac{\mathrm{v}_\theta}{2r}\left[\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta + \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_r\right]\}]S_\Phi =$$

$$= \theta \mathrm{r}_\Omega \sum_{\Phi(\Omega)} \{[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r \mathrm{v}_r}{r^2}] +$$

$$\frac{1}{2}([GRAD_2\, \mathrm{u}_\theta - \frac{\mathrm{u}_\theta}{r}\mathbf{e}_r], [GRAD_2\, \mathrm{v}_\theta - \frac{\mathrm{v}_\theta}{r}\mathbf{e}_r])\}S_\Phi.$$

Для второго интеграла с учетом (20) при $\theta \to 0$ имеем:

$$\left(\int_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV\right)_{\Delta}\Bigg|_{\theta\to 0}=\sum_{\varphi(\Omega)}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{V}\varphi}\right)V_{\varphi}\Bigg|_{\theta\to 0}=$$

$$=\theta\,\mathrm{r}_{\Omega}\sum_{\Phi(\Omega)}\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u}+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v}+\frac{\mathrm{v}_r}{r}\right]S_{\Phi}\,.$$

6.4. Итоговая сводка формул для полных векторов смещений и скоростей с учетом азимутальных вращений

В заключение приведем итоговую сводку базовых формул метода опорных операторов, полученную для аппроксимации силовых полей упругих процессов посредством операций $\mathrm{div}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)$ и $\mathrm{div}\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)\delta\right)$, а также соответствующих энергий деформаций и диссипативных функций, их изменяющих, в виде интегралов на ячейках сетки $\int_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV$ и $\int_{\Omega}\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV$ в цилиндрической геометрии.

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi}\right\}\Big|_{\theta\to 0}=\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right\}\Big|_{\theta\to 0}+\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right\}\Big|_{\theta\to 0}=$$

$$=\theta\cdot\{[\mathrm{DIN}_2\left\{\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right\}-\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\mathbf{e}_r]+\frac{1}{2}[\mathrm{DIN}_2\{(GRAD_2\,u_\theta-\frac{u_\theta}{r}\mathbf{e}_r)_{\Phi}\}+$$

$$\frac{1}{r}([\sum_{\Phi(\omega)}V_{\Phi}(GRAD_2\,u_\theta)_{\Phi}],\mathbf{e}_r)-\frac{u_\theta}{r^2}V_{2\omega}]\mathbf{e}_\theta\}\,,$$

$$V_{2\omega}=\sum_{\Phi(\omega)}V_{\Phi}\,,\;\; V_{\Phi}=S_{\Phi}\cdot\mathrm{r}_{\Omega\supset\Phi}\,,$$

$$\mathrm{DIN}_2X=\sum_{\lambda(\omega)}s_{\lambda}\left(\omega\right)\boldsymbol{\tau}_{2X}\left(\lambda\right)\,,\;\; \boldsymbol{\tau}_{2X}(\lambda)=\sum_{\Phi(\lambda)}^{\{2|4\}}V_{\Phi}\left(\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda),X_{\Phi}\right),$$

$$\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}=\frac{1}{2}\left(\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_{\Phi}+\nabla\mathbf{u}_{\Phi}\right),$$

$$\left(\frac{D\mathbf{u}}{D\mathbf{r}}\right)_{\Phi}=\sum_{\lambda(\Phi)}\Delta_{\lambda}\mathbf{u}\cdot\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\,,\qquad \nabla\mathbf{u}_{\Phi}=\sum_{\lambda(\Phi)}\mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\cdot\Delta_{\lambda}\mathbf{u}\,,$$

$$\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{U}\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0}=\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0}+\mathrm{DIN}\left\{\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\theta\varphi}\right)\delta\right\}\Big|_{\theta\to 0}=$$

$$=\theta\left\{\mathrm{DIN}_2\left\{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\delta\right\}-\mathbf{e}_r\left\{\frac{1}{r}\sum_{\Phi(\omega)}V_{\Phi}\,\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right)+\frac{\mathrm{u}_r}{r^2}V_{2\omega}\right\}\right\},$$

$$\left(\int_{\Omega} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \theta \mathrm{r}_{\Omega} \sum_{\Phi(\Omega)} \{\left[\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{v}\Phi}\right) + \frac{\mathrm{u}_r \mathrm{v}_r}{r^2}\right] +$$

$$+\frac{1}{2}([GRAD_2\, \mathrm{u}_{\theta} - \frac{\mathrm{u}_{\theta}}{r}\mathbf{e}_r],[GRAD_2\, \mathrm{v}_{\theta} - \frac{\mathrm{v}_{\theta}}{r}\mathbf{e}_r])\}S_{\Phi}\ ,$$

$$\left(\int_{\Omega} \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}\right)\mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\mathbf{V}}\right)dV\right)_{\underline{\Delta}}\Bigg|_{\theta\to 0} = \theta \mathrm{r}_{\Omega} \sum_{\Phi(\Omega)} \left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} + \frac{\mathrm{u}_r}{r}\right]\left[\mathrm{DIV}_2\mathbf{v} + \frac{\mathrm{v}_r}{r}\right]S_{\Phi}\ ,$$

$$\mathrm{DIV}_2\mathbf{u} = \mathrm{tr}\left(\mathrm{t}_{\Delta\mathbf{u}\Phi}\right) = \sum_{\lambda(\Phi)} \left(\Delta_{\lambda}\mathbf{u}, \mathbf{e}'_{\Phi}(\lambda)\right)$$

при $\theta \to 0$.

7. Результаты расчетов

В области физики высоких плотностей энергии взаимодействие лазерного излучения с материалом твердой мишени может протекать в различных режимах в зависимости от интенсивности воздействия и общей поглощенной энергии. Если интенсивность лазерного импульса достаточно велика, чтобы ионизировать испаренное вещество, над поверхностью мишени возникает слой плазмы – “корона” или “подушка”, в которой поглощается основная доля лазерной мощности. Перенос энергии в плотное вещество мишени происходит за счет процессов электронной и лучистой теплопроводности, а также из-за импульса отдачи аблированной плазмы. По веществу распространяется ударная волна, амплитуда которой уменьшается по мере продвижения вглубь мишени. На некотором расстоянии от поверхности температура и давление за фронтом ударной волны оказываются недостаточными, чтобы осуществить фазовый переход, и вещество остается в твердом состоянии. В этом случае для корректного описания динамики мишени необходим учет упругих сил и сдвиговых напряжений.

Для исследования конечно-разностной аппроксимации упругих сил (см. разделы 5.4, 6.4) в уравнениях гидродинамики идеальной жидкости было проведено моделирование распространения звуковых волн в цилиндрической алюминиевой пластине, возникающих при ударе с последующими колебаниями пластины вследствие сдвиговых деформаций. Физические приближения модели подробно описаны в [10].

Параметры алюминия: нормальная плотность $\rho_s = 2.7\frac{г}{см^3}$, модуль сдвига $\mu = 2.7\frac{0.07}{2(1+0.34)}ТПа$, модуль всестороннего сжатия $K = 2.7\frac{0.07}{3(1-2\cdot 0.34)}ТПа$. Соответствующие значения скоростей продольного и поперечного звука составляют $c_p = \sqrt{\frac{(K+\frac{4}{3}\mu)}{\rho_s}} = 0.63\frac{см}{мкс}$ и $c_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho_s}} = 0.31\frac{см}{мкс}$.

Задача о распространении волны в цилиндрической пластине рассматривалась в следующей постановке:

$$0 \le r \le 5,\ \ 0 \le z \le 2.6,$$

$$u(r,z,t=0) = 0,\ v(r,z,t=0) = v_0 \exp(-4z - r^2),$$

где координаты выражены в сантиметрах, а амплитуда волны $v_0 = 20\frac{м}{с}$ много меньше скорости звука в алюминии. В начальный момент времени вещество предполагалось недеформированным, и на границе ставилось условие отсутствия внешних сил.

На рис. 3 дано начальное распределение скорости (с учетом пространственной симметрии задачи).

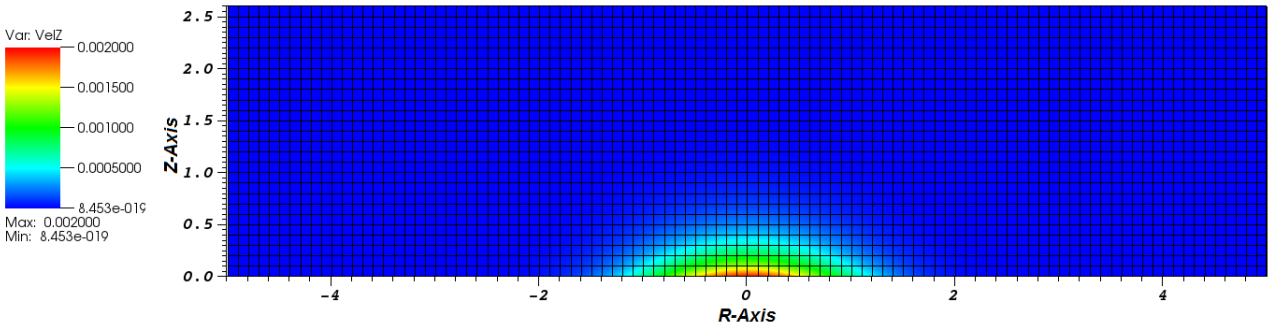


Рис. 3. Распределение скорости ($см/мкс$) вдоль оси Z в момент t=0.

На рис. 4 изображены пространственные распределения плотности и вектора скоростей на момент времени 5 $мкс$, возникающие при моделировании распространения звуковых волн в цилиндрической алюминиевой пластине при ударе с последующими колебаниями пластины вследствие сдвиговых деформаций. Приведенные расчеты качественно согласуются с результатами для распространения волны в плоской пластине, представленными в [10].

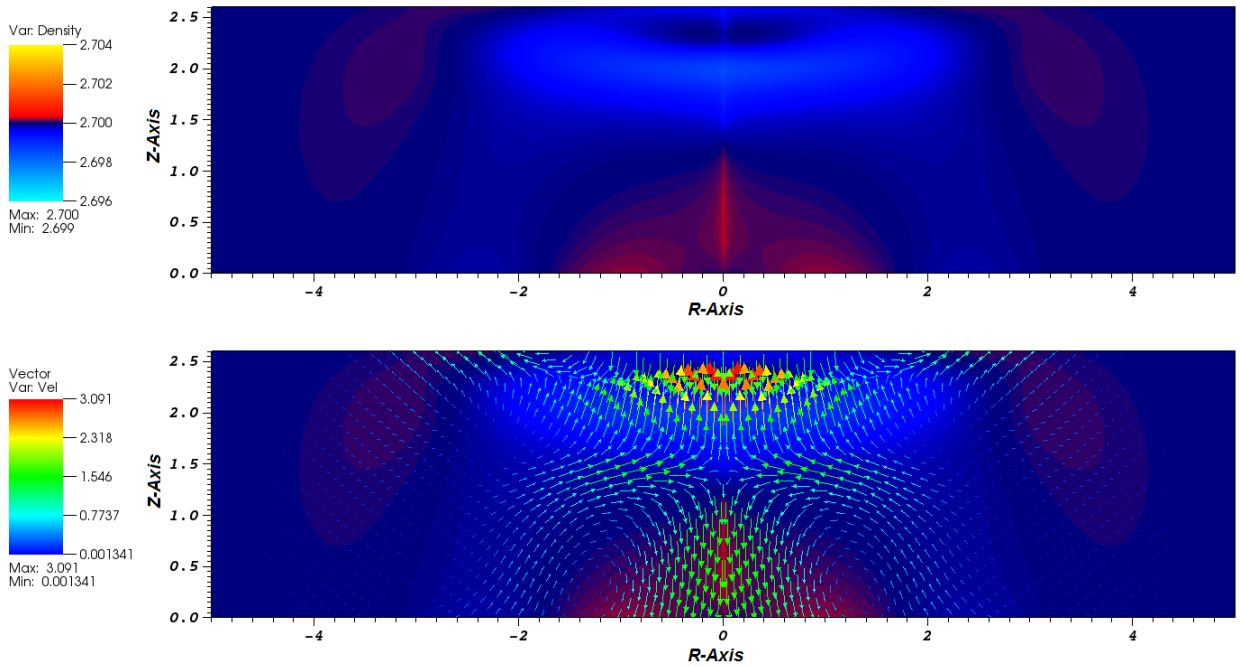


Рис. 4. Пространственные распределения плотности ($г/см^3$, сверху) и вектора скорости ($м/с$, снизу) на момент времени t=5 $мкс$.

Заключение

В работе для полных векторов смещений и скоростей с учетом азимутальных вращений на нерегулярных метрических сетках теории метода опорных операторов, на топологическую и геометрическую структуру которых наложены минимальные разумные ограничения, получены инвариантные к твердотельным поворотам дискретные аналоги самосопряженных и знакоопределенных операций $\mathrm{div}(\mathrm{t}_{\mathbf{U}})$ и $\mathrm{div}(\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{U}})\delta)$ для моделирования силовых полей упругих процессов, а также аппроксимации интегралов вида $\int\limits_O \mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{U}}^2)dV$ и $\int\limits_O \mathrm{tr}^2(\mathrm{t}_{\mathbf{U}})dV$, достаточные для моделирования упругозависимых энергетических балансов среды с учетом кривизны пространства цилиндрической геометрии системы. Дискретная задача с осевой симметрией рассматривалась как трехмерная с тензорными объектами, подобными афинорам (без кривизны), где определенным образом выбранные сеточные функции зависели только от переменных (r,z) и не зависели от азимутального вращения θ. При таком «погружении» 2D-цилиндрической (r,z)-задачи в трехмерную скалярное произведение в пространстве сеточных функций компонент тензора деформаций выбиралось интегрально согласованно с энергией деформированного тела. Этот подход обеспечил дивергентность,

самосопряженность и знакоопределенность аппроксимаций операций $\mathrm{div}(\mathrm{t}_{\mathbf{U}})$ и $\mathrm{div}(\mathrm{tr}(\mathrm{t}_{\mathbf{U}})\delta)$ как в 3D-конструкциях, так и при предельном переходе $\theta \to 0$ и позволил опираться на эти свойства в их двумерных (r, z)–аналогах. Отметим, что раскрытие неопределенностей при использовании предельного перехода $\theta \to 0$ в дифференциальном вращении (с учетом азимутальной симметрии тензорно-диадных объектов) привело к возникновению «кривизны» пространства в операциях дискретного анализа 2D-задачи, связанной с членами вида $\frac{\mathrm{u}_{r,\theta}}{r^2}$ и $\frac{\mathrm{u}_{r,\theta}}{r}$ в соответствующих представлениях сеточных операций. С другой стороны, упругие силовые и энергетические характеристики таких схем инвариантны не только к параллельному переносу, но и к твердотельным вращениям разностной среды.

Библиографический список

1. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Операторные разностные схемы // Дифференц. уравнения. 1981. Т. 17, №. 7. С. 1317-1327.
2. Самарский А.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. О представлении разностных схем математической физики в операторной форме // ДАН СССР. 1981. Т. 258, № 5. С. 1092-1096.
3. Коршия Т.К., Тишкин В.Ф., Самарский А.А., Фаворский А.П., Шашков М.Ю. Вариационно-операторные разностные схемы для уравнений математической физики. Тбилиси: Изд. ТГУ, 1983.
4. Головизнин В.М., Самарский А.А., Фаворский А.П. Вариационный подход к построению конечно-разностных моделей в гидродинамике // ДАН СССР. 1977. Т. 235, № 6. С. 1285-1288.
5. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ. 1989. Т. 29, № 3. С. 371-381.
6. Денисов А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А. О сходимости разностных схем метода опорных операторов для осесимметричного уравнения Пуассона на обобщенных решениях // ЖВМ и МФ. 1990. Т. 30, № 10. С. 1477-1486.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. Москва: Наука, 1987.
8. Самарский А.А., Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Тишкин В.Ф., Фаворский А.П. Разностные схемы на нерегулярных сетках. Минск: ЗАО «Критерий», 1996.

9. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Новиков В.Г., Романов И.В., Цыгвинцев И.П. Численное моделирование токопрохождения в вакуумном диоде с лазерным поджигом // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2013. № 78. 20 с.
URL: http://keldysh.ru/papers/2013/prep2013_78.pdf
10. Гасилов В.А., Круковский А.Ю., Повещенко Ю.А., Цыгвинцев И.П. Однородные разностные схемы для решения сопряжённых задач гидродинамики и упругости // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018. № 13. 17 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2018/prep2018_13.pdf
11. Колдоба А.В., Повещенко Ю.А., Гасилова И.В., Дорофеева Е.Ю. Разностные схемы метода опорных операторов для уравнений теории упругости // Матем. моделирование. 2012. Т. 24, № 12. С. 86-96.

Оглавление

1. Введение 3
2. Постановка задачи 4
3. Метрические сетки метода опорных операторов 5
4. Метрические сетки метода опорных операторов в цилиндрической геометрии 8
5. Предельный переход $\theta \to 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа в отсутствии азимутальных компонент смещений 11
6. Предельный переход $\theta \to 0$ в разностных аппроксимациях тензорных операций векторного анализа при наличии азимутальной компоненты смещений u_θ 20
7. Результаты расчетов 32

Заключение 34
Библиографический список 35