ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 94 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Гуо Пэн, Ивашкин В.В.

Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Гуо Пэн, Ивашкин В.В. Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 94. 32 с. doi:10.20948/prepr-2018-94
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-94

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

П. Гуо, В.В. Ивашкин

Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида

Москва — 2018

Гуо П., Ивашкин В.В.

Методы вычисления потенциала однородного трехосного эллипсоида и их применение к анализу динамики спутника астероида

В рамках исследования динамики спутника астероида рассмотрена задача вычисления внешнего гравитационного потенциала и силы притяжения астероида, аппроксимируемого однородным трехосным эллипсоидом. Построено три алгоритма вычисления гравитационного потенциала эллипсоида. Это, во-первых, алгоритм приближенного определения потенциала, использующий его обычное разложение в ряд по сферическим функциям с учетом гармоник до 4-го порядка включительно. Два другие определяют потенциал с помощью формулы Дирихле, содержащей эллиптические интегралы. Один вычисляет эти интегралы численно по квадратурным формулам. Другой, аналитический, использует разработанные в работе разложения интегралов в быстро сходящиеся ряды. Рассмотрено применение этих алгоритмов для определения потенциала и силы притяжения астероида Апофис.

Ключевые слова: трехосный эллипсоид, гравитационный потенциал, эллиптический интеграл, астероид Апофис

Peng Guo, Vyacheslav Vasilievich Ivashkin

Methods for calculating the gravitational potential of a homogeneous triaxial ellipsoid and their application to the analysis of asteroid's satellite dynamics

For the study of the asteroid's satellite dynamics, the problem of calculating the exterior gravitational potential and the attraction of an asteroid approximated by a homogeneous triaxial ellipsoid is considered. Three algorithms for determining the gravitational potential of an ellipsoid are constructed. It is, firstly, an algorithm for approximate determination of the potential using its usual expansion in a series of spherical functions with harmonics up to 4th order inclusive. The other two ones determine the potential using the Dirichlet formula containing elliptic integrals. One calculates these integrals numerically by quadrature formulas. Another, analytical one uses the expansions of integrals developed in the work into rapidly convergent series. The application of these algorithms to determine the potential and the attraction of the asteroid Apophis is considered.

Keywords: triaxial ellipsoid, gravitational potential, elliptic integral, asteroid Apophis

1. Введение

По результатам наземных оптических наблюдений и осуществленных проектов полётов к малым небесным телам Солнечной системы, например, к комете 67P/Churyumov-Gerasimenko (проект “Rosetta”), к астероидам 433 Eros (проект “NEAR”) и 25143 Itokawa (проект “Hayabusa”), эти тела значительно уступают по массе и размерам планетам, имеют сильно неправильную форму и не имеют атмосферы, хотя при этом и у них могут быть спутники. Для исследования орбитального движения спутника вблизи малых тел важным является выявление характеристик их гравитационного поля. Из-за сильной несферичности форма малых тел часто геометрически и динамически аппроксимируется эллипсоидом. Например, астероид 433 Eros хорошо аппроксимируется трехосным эллипсоидом с полуосями 17.9 км, 9.2 км и 7.9 км [1, 2]. Гравитационный потенциал малого тела может определяться путем разложения его в ряд по сферическим функциям [3-14]. Однако, из-за сильной несферичности, этот классический способ оказывается недостаточно точным, в частности, при определении потенциала в точке, близкой к поверхности тела. Поэтому в теории притяжения предлагается более точный способ – разложением гравитационного потенциала тела по эллипсоидальным функциям [1-6, 11, 12]. В качестве примера в работе [1, 2] сделан сравнительный анализ гравитационного поля кометы 46P/Wirtanen и астероида 433 Eros путем разложения потенциала в ряд по сферическим и эллипсоидальным функциям. Анализ показал, что второй метод эффективнее.

В настоящей работе рассматривается задача определения гравитационного потенциала и силы притяжения астероида, аппроксимируемого однородным эллипсоидом. Это классическая задача, которая хорошо изучена в теории притяжения [3-5, 7]. Силу притяжения и потенциал однородного эллипсоида можно точно определять через формулу Дирихле, содержащую эллиптические интегралы. Для частных случаев двухосного эллипсоида эти интегралы имеют аналитическое решение, т.е. формула Дирихле можно выражаться через простые, элементарные функции [3-5, 7]. Однако в случае трехосного эллипсоида задача сложнее, так как эллиптические интегралы выражаются через специальные функции. Для их вычисления разработаны специальные таблицы и алгоритмы [15], можно их использовать и вычислять численные значения необходимых интегралов. Можно определять эти интегралы численными методами по квадратурным формулам. В данной работе разработаны алгоритмы определения эллиптических интегралов в формуле Дирихле для общего случая трехосного эллипсоида двумя способами: аналитическим решением с помощью разложения в ряды и, кроме того, численным методом – через квадратуры.

В качестве примера определены потенциал и сила притяжения астероидом 99942 Апофис в модельных случаях двухосного и трехосного эллипсоидов, полученных по формулам Дирихле с помощью разработанных численного и

аналитического методов. Выполнено сравнение этих результатов с приближенным разложением по сферическим гармоникам до 4-го порядка включительно.

2. Притяжение астероида как однородного эллипсоида

Рассмотрим потенциальное поле тяготения астероида как однородного эллипсоида с плотностью $\delta=const$ в астероидоцентрической связанной системе координат oxyz, оси x, y, z которой направлены по малой, средней и большой осям. Уравнение основного эллипсоида запишется в виде:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \tag{1}$$

где a, b, c – малая, средняя и большая полуоси эллипсоида, пусть $a\le b\le c$. Масса эллипсоида:

$$m=\frac{4}{3}\delta\pi abc=\frac{4}{3}\delta\pi R_a^3, \tag{2}$$

где R_a – средний радиус эллипсоида.

Обозначим отношения большой и средней полуосей к малой через α и α_1:

$$\alpha=c/a,\ \alpha_1=b/a. \tag{3}$$

Из (2) и (3) получим главные полуоси в зависимости от α, α_1 и R_a

$$a=\frac{R_a}{\sqrt[3]{\alpha\alpha_1}},\ b=\sqrt[3]{\frac{\alpha_1^{\,2}}{\alpha}}R_a,\ c=\sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{\alpha_1}}R_a. \tag{4}$$

Обозначим гравитационный параметр эллипсоида через μ:

$$\mu=fm, \tag{5}$$

где f – универсальная гравитационная постоянная.

Гравитационный потенциал эллипсоида во внешней точке $P(x,\ y,\ z)$ обозначается через $\mathrm{V}(x,y,z)$, а силовая функция – через $U(x,y,z)$:

$$U(x,y,z)=-\mathrm{V}(x,y,z). \tag{6}$$

Сила притяжения астероидом $\mathbf{F}(F_x,F_y,F_z)$ материальной точки, находящейся в P, определяется по формуле

$$\mathbf{F}=\nabla U(x,y,z)=\left[\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right]^T, \tag{7}$$

причем силовая функция удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta U(x,y,z)=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0, \tag{8}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Для определения силы притяжения эллипсоида надо получить выражение потенциала или силовой функции как функции от координат (x, y, z). Рассмотрим два способа получения этой функции: (а) разложением потенциала или силовой функции в ряд по сферическим функциям; (б) выражением потенциала или силовой функции для однородного эллипсоида в зависимости от эллиптических координат по формуле Дирихле, содержащей эллиптические интегралы [3-5, 7].

2.1. Разложение силовой функции эллипсоида в ряд по сферическим функциям

В общем случае силовую функцию можно разложить в ряд по сферическим функциям [10]:

$$U(r,\lambda,\varphi)=\frac{\mu}{r}\left\{1+\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{R_0}{r}\right)^n P_{nm}(\sin\varphi)\left(C_{nm}\cos m\lambda+S_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}, \tag{9}$$

где r,λ,φ – сферические координаты, соответственно радиус и астероидо-центрические долгота и широта,

$$\begin{cases} x=r\cos\lambda\cos\varphi, \\ y=r\sin\lambda\cos\varphi, \\ z=r\sin\varphi, \end{cases} \tag{10}$$

здесь R_0 – максимальный радиус эллипсоида (R_0=c); P_{nm} – присоединенная функция Лежандра степени n и порядка m; C_{nm} и S_{nm} – безразмерные постоянные, характеризующие гравитационное поле.

Далее сила притяжения определяется через частные производные

$$\mathbf{F}=\frac{\partial U}{\partial(r,\lambda,\varphi)}\frac{\partial(r,\lambda,\varphi)}{\partial(x,y,z)}. \tag{11}$$

Составляющие силы притяжения определяются по формулам

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = -\dfrac{\mu}{r^3}x - \dfrac{\mu}{r^3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}(\dfrac{R_0}{r})^n\left\{x\xi_{nm}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right) + \right. \\ \qquad\qquad \left. + y\zeta_{nm}\left(S_{nm}\cos m\lambda - C_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}, \\ F_y = \dfrac{\partial U}{\partial y} = -\dfrac{\mu}{r^3}y - \dfrac{\mu}{r^3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}(\dfrac{R_0}{r})^n\left\{y\xi_{nm}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - x\zeta_{nm}\left(S_{nm}\cos m\lambda - C_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}, \\ F_z = \dfrac{\partial U}{\partial z} = -\dfrac{\mu}{r^3}z - \dfrac{\mu}{r^3}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{m=0}^{n}(\dfrac{R_0}{r})^n\left\{z\eta_{nm}\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right)\right\}, \end{cases} \tag{12}$$

где

$$\begin{cases} \xi_{nm} = \tan\varphi P_{n\,m+1}(\sin\varphi) + \left(n+1-m\tan^2\varphi\right)P_{nm}(\sin\varphi), \\ \eta_{nm} = -\cot\varphi P_{n\,m+1}(\sin\varphi) + \left(n+1+m\right)P_{nm}(\sin\varphi), \\ \zeta_{nm} = \dfrac{m}{\cos^2\varphi}P_{nm}(\sin\varphi). \end{cases} \tag{13}$$

В приложении приведены параметры ξ_{nm}, η_{nm}, ζ_{nm} как функции от геоцентрической широты φ до 4-ой степени включительно.

Коэффициенты C_{nm} и S_{nm} можно определять по полуосям эллипсоида a, b, c. Для однородного эллипсоида имеют место соотношения: C_{nm}=0, когда n или m являются нечетными числами, S_{nm}=0 для всех n и m [10, 24]. Согласно [10, 24], формулы для определения ненулевых коэффициентов C_{nm} до 4-го порядка включительно имеют вид:

$$\begin{gathered} C_{20} = \frac{2c^2-(a^2+b^2)}{10{R_0}^2}, C_{22} = \frac{a^2-b^2}{20{R_0}^2}, \\ C_{40} = 3\frac{3(a^4+b^4)+8c^4+2a^2b^2-8c^2(a^2+b^2)}{280{R_0}^4}, \\ C_{42} = \frac{(a^2-b^2)(2c^2-a^2-b^2)}{280{R_0}^4}, C_{44} = \frac{(a^2-b^2)^2}{2240{R_0}^4}, \end{gathered} \tag{14}$$

или, выражая C_{40}, C_{42}, C_{44} через C_{20} и C_{22}:

$$C_{40} = \frac{15}{7}(C_{20}^2+2C_{22}^2), C_{42} = \frac{5}{7}C_{20}C_{22}, C_{44} = \frac{5}{28}C_{22}^2. \tag{15}$$

Отсюда получим силовую функцию для однородного эллипсоида с учетом гармоник до 4-го порядка включительно в виде

$$U(r,\lambda,\varphi)=\frac{\mu}{r}\left\{1+(\frac{R_0}{r})^2\left[C_{20}P_{20}(\sin\varphi)+C_{22}P_{22}(\sin\varphi)\cos 2\lambda\right]+\right.$$
$$\left.+(\frac{R_0}{r})^4\left[C_{40}P_{40}(\sin\varphi)+C_{42}P_{42}(\sin\varphi)\cos 2\lambda+C_{44}P_{44}(\sin\varphi)\cos 4\lambda\right]\right\}. \quad (16)$$

В частном случае двухосного вытянутого эллипсоида, при $a=b$, только зональные гармоники остаются ненулевыми:

$$C_{20}\neq 0, C_{40}=\frac{15}{7}C_{20}^2, C_{22}=C_{42}=C_{44}=0, \text{при } a=b. \quad (17)$$

В этом случае силовая функция $U(r,\lambda,\varphi)$ не зависит от долготы λ, т.е.

$$U(r,\lambda,\varphi)=\frac{\mu}{r}\left\{1+(\frac{R_0}{r})^2C_{20}P_{20}(\sin\varphi)+(\frac{R_0}{r})^4C_{40}P_{40}(\sin\varphi)\right\}, \text{при } a=b. \quad (18)$$

2.2. Представление силовой функции однородного эллипсоида по формуле Дирихле

Согласно формуле Дирихле [3, 4] силовую функцию для случая трехосного эллипсоида можем представить в следующем виде

$$U(x,y,z)=f\delta\left\{U_0(\gamma)+U_1(\gamma)x^2+U_2(\gamma)y^2+U_3(\gamma)z^2\right\}, \quad (19)$$

где γ является положительным корнем следующего уравнения относительно s:

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1. \quad (20)$$

Уравнение (20) определяет эллипсоид, проходящий через точку $P(x, y, z)$ и называемый софокусным эллипсоидом. Параметр s характеризует размер софокусного эллипсоида в отличие от основного эллипсоида. Пишем (20) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned}
&s^3+As^2+Bs+C=0,\\
&A=a^2+b^2+c^2-(x^2+y^2+z^2),\\
&B=a^2b^2+c^2a^2+b^2c^2-[(b^2+c^2)x^2+(a^2+c^2)y^2+(a^2+b^2)z^2],\\
&C=a^2b^2c^2-(b^2c^2x^2+a^2c^2y^2+a^2b^2z^2).
\end{aligned} \quad (21)$$

Решая уравнение (20) или (21), например, через формулу Кардано, получим три корня, которые обозначаются через γ,ν,ϖ, пусть $\gamma\geq\nu\geq\varpi$. Они называются *эллипсоидальными координатами*, характеризующими размер софокусного эллипсоида, и удовлетворяют соотношениям [3, 4]:

$$-c^2 \le \varpi \le -b^2 \le \nu \le -a^2 \le \gamma < \infty, \tag{22}$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \gamma + \nu + \varpi\,. \tag{23}$$

Когда точка $P(x,\ y,\ z)$ находится вне эллипсоида астероида, получим $\gamma > 0$. При $\gamma = 0$ точка $P(x,\ y,\ z)$ лежит на поверхности эллипсоида, в этом случае радиус эллипсоида в точке P, обозначающийся через r_e, удовлетворяет соотношению:

$$r_e^2 = a^2 + b^2 + c^2 + \nu + \varpi. \tag{24}$$

Подставляя (24) в (23) получим

$$r^2 = r_e^2 + \gamma. \tag{25}$$

Когда γ стремится к бесконечности, точка P устремляется в бесконечность от центра эллипсоида:

$$\lim_{r\to\infty} \frac{r^2}{\gamma} = 1\,. \tag{26}$$

Силовая функция симметрична относительно главных осей эллипсоида и относительно центра эллипсоида. Коэффициенты U_0, U_1, U_2, U_3 в (19) имеют следующие значения [3, 4]:

$$U_0(\gamma) = \pi abc \int_\gamma^\infty \frac{ds}{R(s)}\,,\ U_1(\gamma) = -\pi abc \int_\gamma^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}\,, \tag{27}$$

$$U_2(\gamma) = -\pi abc \int_\gamma^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}\,,\ U_3(\gamma) = -\pi abc \int_\gamma^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}\,, \tag{28}$$

где

$$R(s) = \sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}\,. \tag{29}$$

Введя также обозначения $\bar{U}_i,\ i = 0,...,3$:

$$\bar{U}_i = \frac{U_i}{4\pi abc},\ i = 0,...,3, \tag{30}$$

получим

$$\bar{U}_0(\gamma) = \frac{1}{4}\int_\gamma^\infty \frac{ds}{R(s)}\,,\ \bar{U}_1(\gamma) = -\frac{1}{4}\int_\gamma^\infty \frac{ds}{(a^2+s)R(s)}\,, \tag{31}$$

$$\bar{U}_2(\gamma) = -\frac{1}{4}\int_\gamma^\infty \frac{ds}{(b^2+s)R(s)}\,,\ \bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{4}\int_\gamma^\infty \frac{ds}{(c^2+s)R(s)}\,. \tag{32}$$

Тогда силовую функцию (19) можно записать в следующем виде:

$$U(x,y,z) = 3\mu\left\{\bar{U}_0(\gamma) + \bar{U}_1(\gamma)x^2 + \bar{U}_2(\gamma)y^2 + \bar{U}_3(\gamma)z^2\right\}. \tag{33}$$

Отсюда получаем формулы для определения составляющих силы притяжения, действующей на точку *P*, через частные производные, здесь величина γ считается постоянной [3, 4]:

$$\begin{cases} F_x = \dfrac{\partial U}{\partial x} = 6\mu x \bar{U}_1(\gamma), \\ F_y = \dfrac{\partial U}{\partial y} = 6\mu y \bar{U}_2(\gamma), \\ F_z = \dfrac{\partial U}{\partial z} = 6\mu z \bar{U}_3(\gamma). \end{cases} \tag{34}$$

Для того чтобы определить силу притяжения и потенциал эллипсоида, необходимо вычислить функции $\bar{U}_i, i = 0,...,3$, которые представлены в (31, 32) в виде эллиптических интегралов в зависимости от полуосей эллипсоида и координаты γ. Эти интегралы могут определяться разными способами. Они выражаются через специальные функции [5, 7], для их вычисления разработаны специальные таблицы и алгоритмы [15], можно их использовать и вычислять численные значения необходимых интегралов. Можно определять эти интегралы $\bar{U}_i, i = 0,...,3$ численными методами по квадратурным формулам. В данной работе найдены их аналитические решения разложением эллиптических интегралов в ряды. Опишем этот способ. Для этого рассмотрим новые переменные [1]:

$$u^2 = c^2 + s, h^2 = c^2 - a^2, l^2 = c^2 - b^2, \tag{35}$$

где u, h, l – положительные параметры:

$$u \geq 0, h \geq l \geq 0. \tag{36}$$

Подставляя (35) в (20), получим уравнение софокусного эллипсоида

$$\frac{x^2}{u^2 - h^2} + \frac{y^2}{u^2 - l^2} + \frac{z^2}{u^2} = 1, \tag{37}$$

или

$$\begin{aligned} & u^6 + w_1 u^4 + w_2 u^2 + w_3 = 0, \\ & w_1 = -(h^2 + l^2 + x^2 + y^2 + z^2), \\ & w_2 = l^2 x^2 + h^2 y^2 + (h^2 + l^2) z^2 + h^2 l^2, \\ & w_3 = -h^2 l^2 z^2. \end{aligned} \tag{38}$$

При заданной точке *P*(*x*,*y*,*z*) уравнения (37), (38) имеют три положительных корня u_i, $i = 1,...,3$, которые находятся в интервалах [1]

$$u_1^2 \in [h^2, +\infty), u_2^2 \in [l^2, h^2], u_3^2 \in [0, l^2], \tag{39}$$

или

$$0 \le u_3 \le l \le u_2 \le h \le u_1 . \tag{40}$$

Эти решения уравнений (37, 38), использующие формулу Кардано, имеют вид [1]:

$$\begin{cases} u_1^2 = 2\sqrt{Q}\cos\left(\dfrac{\theta}{3}\right) - \dfrac{w_1}{3}, \\ u_2^2 = 2\sqrt{Q}\cos\left(\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{4\pi}{3}\right) - \dfrac{w_1}{3}, \\ u_3^2 = 2\sqrt{Q}\cos\left(\dfrac{\theta}{3} + \dfrac{2\pi}{3}\right) - \dfrac{w_1}{3}, \end{cases} \tag{41а}$$

$$Q = \frac{w_1^{\,2} - 3w_2}{9}, R = \frac{9w_1w_2 - 27w_3 - 2w_1^{\,3}}{54}, \cos\theta = \frac{R}{\sqrt{Q^3}}. \tag{41б}$$

Уравнение для $R(s)$ (29) перепишем в виде

$$R(s) = \sqrt{u^2(u^2 - h^2)(u^2 - l^2)}. \tag{42}$$

Из (35) получим соотношение между корнями u_1 и γ

$$u_1^2 = c^2 + \gamma, u_1 = \sqrt{c^2 + \gamma}. \tag{43}$$

Отсюда, выражая γ через u_1, получим для $\bar{U}_i, i = 0,...,3,$ в (31) и (32):

$$\bar{U}_0(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - h^2)(u^2 - l^2)}}, \ \bar{U}_1(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - h^2)^3(u^2 - l^2)}}, \tag{44}$$

$$\bar{U}_2(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{\sqrt{(u^2 - h^2)(u^2 - l^2)^3}}, \ \bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^2\sqrt{(u^2 - h^2)(u^2 - l^2)}}. \tag{45}$$

Можно заметить, что при h=l=0, или a=b=c, астероид будет шаром, из (37) получим $u_1 = r,$ и

$$\bar{U}_0(\gamma) = \frac{1}{2r}, \ \bar{U}_1(\gamma) = \bar{U}_2(\gamma) = \bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{6r^3}, \tag{46}$$

$$U(x, y, z) = \frac{\mu}{r}, \ \frac{F_x}{x} = \frac{F_y}{y} = \frac{F_z}{z} = -\frac{\mu}{r^3}. \tag{47}$$

В общем случае трехосного эллипсоида рассмотрим численный и аналитический методы определения интегралов $\bar{U}_i, i = 0,...,3$ (44, 45).

2.2.1. Численное вычисление интегралов по квадратурным формулам

Делаем замену переменных

$$v = 1 - \frac{2u_1}{u} \quad \text{или} \quad u = \frac{2u_1}{1-v}. \tag{48}$$

Так как u меняется от u_1 до бесконечности, переменная v меняется на интервале [–1, 1]. После соответствующего преобразования получим из (44)-(45):

$$\bar{U}_0(\gamma) = u_1 \int_{-1}^{1} \frac{dv}{\sqrt{\left(4u_1^2 - h^2(1-v)^2\right)\left(4u_1^2 - l^2(1-v)^2\right)}}, \tag{49}$$

$$\bar{U}_1(\gamma) = -u_1 \int_{-1}^{1} \frac{(1-v)^2 dv}{\sqrt{\left(4u_1^2 - h^2(1-v)^2\right)^3\left(4u_1^2 - l^2(1-v)^2\right)}}, \tag{50}$$

$$\bar{U}_2(\gamma) = -u_1 \int_{-1}^{1} \frac{(1-v)^2 dv}{\sqrt{\left(4u_1^2 - h^2(1-v)^2\right)\left(4u_1^2 - l^2(1-v)^2\right)^3}}, \tag{51}$$

$$\bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{4u_1} \int_{-1}^{1} \frac{(1-v)^2 dv}{\sqrt{\left(4u_1^2 - h^2(1-v)^2\right)\left(4u_1^2 - l^2(1-v)^2\right)}}. \tag{52}$$

Определенные интегралы в виде $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ в (49)-(52) можно численно вычислять по квадратурным формулам с высокой точностью. Существуют различные квадратурные формулы [16]. Интеграл $\int_{-1}^{1} f(x)dx$ приближается интерполяционным многочленом с приемлемой точностью

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} c_j f(x_j), \tag{53}$$

где x_j – узлы квадратуры на отрезке [–1, 1], n – число узлов, c_j – соответствующие веса. Веса c_j часто определяются с помощью ортогональных многочленов, в частности многочленов Чебышева и Лежандра [16]. В данном случае применяются квадратурные формулы Гаусса–Лежандра, в которых x_j является корнем многочленов Лежандра степени n, обозначаемых через $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \tag{54а}$$

$$(n+1)P_{n+1}(x) = (2n+1)xP_n(x) - nP_{n-1}(x), \tag{54б}$$

где $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, и веса c_j определяются следующим образом:

$$c_j = \frac{2}{(1-x_j^2)\ P_n'(x_j)^2}, \tag{55}$$

где $P_n'(x_j)$ – первая производная полинома Лежандра.

Отметим, что при построении квадратур с n узлами на отрезке [–1, 1], формулы (53) имеют точность до порядка $2n$–1, т.е. они определяют интеграл точно для всех многочленов, степени которых не выше $2n$–1. Корни x_j многочлена $P_n(x)$ определяются на отрезке [–1, 1] стандартной программой “*roots*” в системе MATLAB. Степень n многочлена $P_n(x)$ выбирается так, чтобы обеспечить необходимую относительную точность (10^{-12}-10^{-14}) вычисления интеграла. Это делалось следующим образом, используя аналитическое решение для случая двухосного эллипсоида. Для определенной типичной точки P и для эллипсоида, соответствующего астероиду Апофис, вычисляется аналитически потенциал с высокой точностью (формулы приводятся ниже). Затем потенциал вычисляется численно по квадратурным формулам для разных степеней n. Подбирается степень n, обеспечивающая нужную точность.

2.2.2. Аналитическое решение в случае двухосного эллипсоида

Рассмотрим частные случаи астероида как однородного двухосного эллипсоида, т.е. случай вытянутого эллипсоида (a=b<c) или случай сжатого эллипсоида (a<b=c).

Случай вытянутого эллипсоида

Рассмотрим случай астероида как однородного вытянутого эллипсоида, т.е.

$$a=b<c \text{ или } h=l>0, \tag{56}$$

$$\bar{U}_0(\gamma) = \frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^2-h^2} = \frac{1}{4h}\ln\frac{u_1+h}{u_1-h}, \tag{57}$$

$$\bar{U}_1(\gamma) = \bar{U}_2(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{(u^2-h^2)^2} = \frac{1}{8h^3}\left(\ln\frac{u_1+h}{u_1-h} - \frac{2hu_1}{u_1^2-h^2}\right), \tag{58}$$

$$\bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty} \frac{du}{u^2(u^2-h^2)} = -\frac{1}{4h^3}\left(\ln\frac{u_1+h}{u_1-h} - \frac{2h}{u_1}\right). \tag{59}$$

В работе [3, 4] получены формулы для этих составляющих потенциала, правда, в несколько другой форме. В них есть неточность, как получено в работе [17], экваториальные составляющие следует уменьшить вдвое. После этой правки расчет по скорректированным формулам [3, 4] и (56-59) даёт одинаковый результат.

Случай сжатого эллипсоида

В случае астероида как однородного сжатого эллипсоида имеем

$$a<b=c \text{ или } h>l=0, \tag{60}$$

$$\bar{U}_0(\gamma)=\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty}\frac{du}{u\sqrt{(u^2-h^2)}}=\frac{1}{2h}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{u_1^{\,2}-h^2}}{h}\right), \tag{61}$$

$$\bar{U}_1(\gamma)=-\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty}\frac{du}{u\sqrt{(u^2-h^2)^3}}=\frac{1}{2h^3}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{u_1^{\,2}-h^2}}{h}-\frac{h}{\sqrt{u_1^{\,2}-h^2}}\right), \tag{62}$$

$$\bar{U}_2(\gamma)=\bar{U}_3(\gamma)=-\frac{1}{2}\int_{u_1}^{\infty}\frac{du}{u^3\sqrt{u^2-h^2}}=-\frac{1}{4h^3}\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\sqrt{u_1^{\,2}-h^2}}{h}-\frac{h\sqrt{u_1^{\,2}-h^2}}{u_1^{\,2}}\right). \tag{63}$$

Отметим, что опять расчет этих составляющих по скорректированным формулам [3, 4] и данным (60-63) даёт одинаковый результат.

2.2.3. Аналитическое решение в случае трехосного эллипсоида с разложением в ряды

Рассмотрим случай трехосного эллипсоида, т.е.

$$a<b<c \text{ или } h>l>0. \tag{64}$$

Делаем замену переменных:

$$t=\frac{h}{u},\ k=\frac{l}{h}. \tag{65}$$

Отсюда получим:

$$0<t<1,\quad 0<k<1. \tag{66}$$

Подставляя (65) в (44)-(45), получим $\bar{U}_i, i=0,...,3$, в виде эллиптических интегралов:

$$\bar{U}_0(\gamma)=\frac{1}{2h}\int_0^{\frac{h}{u_1}}\frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}},\ \bar{U}_1(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\int_0^{\frac{h}{u_1}}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)^3(1-k^2t^2)}}, \tag{67}$$

$$\bar{U}_2(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\int_0^{\frac{h}{u_1}}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)^3}},\ \bar{U}_3(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\int_0^{\frac{h}{u_1}}\frac{t^2dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}. \tag{68}$$

Делаем ещё замену переменных:

$$t = \sin\theta, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}) \tag{69}$$

и введем обозначение:

$$\theta_0 = \arcsin\frac{h}{u_1}. \tag{70}$$

Подставляя (69) и (70) в (67)-(68), получим $\bar{U}_i, i = 0,...,3$, в следующем виде:

$$\bar{U}_0(\gamma(\theta_0)) = \frac{1}{2h}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}},\ \bar{U}_1(\gamma(\theta_0)) = -\frac{1}{2h^3}\int_0^{\theta_0}\frac{\tan^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, \tag{71}$$

$$\bar{U}_2(\gamma(\theta_0)) = -\frac{1}{2h^3}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)^3},\ \bar{U}_3(\gamma(\theta_0)) = -\frac{1}{2h^3}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}. \tag{72}$$

Теперь найдём аналитические решения для $\bar{U}_i, i = 0,..., 3$. Сначала рассмотрим интеграл $\bar{U}_0(\gamma)$, при этом введем обозначение:

$$F(\theta,k) = \int_0^{\theta}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}, k \in (0,1), \theta \in (0, \frac{\pi}{2}). \tag{73}$$

Здесь имеем *неполный эллиптический интеграл первого рода с модулем* k [15]. Интеграл $\bar{U}_0(\gamma(\theta_0))$ получает вид:

$$\bar{U}_0(\gamma(\theta_0)) = \frac{1}{2h}F(\theta_0,k). \tag{74}$$

С помощью ряда

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, |x| < 1, \tag{75}$$

получим

$$F(\theta,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\theta}\sin^{2n}\theta d\theta. \tag{76}$$

Выражая интеграл в (76) через функцию $S(n,\theta)$

$$S(n,\theta) = \int_0^{\theta}\sin^{2n}\theta d\theta, n \geq 0, \theta \in (0, \frac{\pi}{2}), \tag{77}$$

получим

$$F(\theta,k) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}S(n,\theta). \tag{78}$$

С учетом соотношений:

$$S(0,\theta)=\theta, \tag{79}$$

$$\int_0^\theta \sin^{2n}\theta d\theta = -\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta+\frac{2n-1}{2n}\int_0^\theta \sin^{2n-2}\theta d\theta,\ n\ge 1, \tag{80}$$

определяем функцию $S(n,\theta)$:

$$S(n,\theta)=-\frac{1}{2n}\sin^{2n-1}\theta\cos\theta+\frac{2n-1}{2n}S(n-1,\theta),\ n\ge 1. \tag{81}$$

Отсюда получим

$$S(n,\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\theta-\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta\right\},\ n\ge 1. \tag{82а}$$

Так как при n=0 условие $S(0,\theta)=\theta$ тоже удовлетворяет уравнению (82а), то можно записать (79) и (82а) в виде:

$$S(n,\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\theta-\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta\right\},\ n\ge 0. \tag{82б}$$

Введем нормализированную функцию

$$\bar{S}(n,\theta)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}S(n,\theta). \tag{83}$$

Тогда получим из (82б):

$$\bar{S}(n,\theta)=\theta-\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta,\ n\ge 0. \tag{84}$$

Функцию $F(\theta,k)$ в (78) можно записать в следующем виде:

$$F(\theta,k)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\bar{S}(n,\theta). \tag{85}$$

Окончательно можно выразить $\bar{U}_0(\gamma(\theta_0))$ (74) через функцию $S(n,\theta)$ или $\bar{S}(n,\theta)$:

$$\bar{U}_0(\gamma(\theta_0))=\frac{1}{2h}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}S(n,\theta_0)=\frac{1}{2h}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2 k^{2n}\bar{S}(n,\theta_0). \tag{86}$$

Уравнение (86) является аналитическим решением интеграла $\bar{U}_0(\gamma)$ в (71). Подставляя $k^2=\dfrac{l^2}{h^2}$, $\theta_0=\arcsin\dfrac{h}{u_1}$ в (86), получим

$$\bar{U}_0(\gamma)=\frac{1}{2h}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\left(\frac{l^2}{h^2}\right)^n\left\{\arcsin\left(\frac{h}{u_1}\right)-\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\left(\frac{h}{u_1}\right)^{2m-1}\frac{\sqrt{u_1^2-h^2}}{u_1}\right\}. \quad (87)$$

Далее определяем аналитические решения для интегралов $\bar{U}_1(\gamma)$, $\bar{U}_2(\gamma)$ и $\bar{U}_3(\gamma)$. Имеем:

$$\bar{U}_1(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\int_0^{\theta_0}\frac{\tan^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}=-\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin^{2n+2}\theta}{\cos^2\theta}d\theta. \quad (88)$$

В (88) интеграл

$$\int_0^{\theta}\frac{\sin^{2n+2}\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\frac{\sin^{2n+1}\theta}{\cos\theta}-(2n+1)\int_0^{\theta}\sin^{2n}\theta d\theta=\frac{\sin^{2n+1}\theta}{\cos\theta}-(2n+1)S(n,\theta),\ n\geq 0. \quad (89)$$

Отсюда получим решение для $\bar{U}_1(\gamma)$:

$$\bar{U}_1(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\left\{\frac{\sin^{2n+1}\theta_0}{\cos\theta_0}-(2n+1)S(n,\theta_0)\right\}, \quad (90)$$

или

$$\bar{U}_1(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{l}{h}\right)^{2n}\left\{\left(\frac{h}{u_1}\right)^{2n}\frac{h}{\sqrt{u_1^2-h^2}}-(2n+1)S(n,\arcsin\frac{h}{u_1})\right\}. \quad (91)$$

С помощью ряда:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^3}}=\frac{\partial\left(\frac{2}{\sqrt{(1-x^2)}}\right)}{\partial x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}x^{2n}, \quad (92)$$

в интеграле $\bar{U}_2(\gamma)$ получим:

$$\int_0^{\theta_0}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\left(\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\right)^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}k^{2n}\int_0^{\theta_0}\sin^{2n+2}\theta d\theta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}k^{2n}S(n+1,\theta_0). \quad (93)$$

Окончательно получим решение для интеграла $\bar{U}_2(\gamma)$ в виде:

$$\bar{U}_2(\gamma)=-\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}k^{2n}S(n+1,\theta_0), \quad (94)$$

или

$$\bar{U}_2(\gamma) = -\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{l}{h}\right)^{2n} S(n+1, \operatorname{arcsin}\frac{h}{u_1}). \qquad (95)$$

Аналогично интеграл $\bar{U}_3(\gamma)$ приводим к виду:

$$\bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{2h^3}\int_0^{\theta_0}\frac{\sin^2\theta d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = -\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}k^{2n}S(n+1,\theta_0), \qquad (96)$$

или

$$\bar{U}_3(\gamma) = -\frac{1}{2h^3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{l}{h}\right)^{2n} S(n+1, \arcsin\frac{h}{u_1}). \qquad (97)$$

Таким образом, получены аналитические решения для эллиптических интегралов разложением в ряды для определения силовой функции и составляющих силы притяжения трехосного эллипсоида внешней точки $P(x, y, z)$. В [5, 7] получена другая форма для $\bar{U}_i, i = 0,...,3$. Выражения $\bar{U}_i, i = 0,...,3$ (86), (91), (95) и (97) включают важную функцию $S(n,\theta)$. Рассмотрим её свойства.

2.2.4. Свойства функции $S(n, \theta)$

Рассмотрим функцию $S(n, \theta)$ из (82б):

$$S(n,\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left\{\theta-\sum_{m=1}^{n}\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta\right\}, n\geq 0.$$

Понижаем степень выражения $\sin^{2m-1}\theta\cos\theta$ с помощью соотношения

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}, \cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \qquad (98)$$

где i – мнимая единица. Получим:

$$\sin^{2m-1}\theta\cos\theta = \frac{1}{2^{2m}}\sum_{j=0}^{2m-1}(-1)^{m+j-1}\binom{2m-1}{j}\left[\sin(2m-2j)\theta+\sin(2m-2j-2)\theta\right]. \qquad (99)$$

Подставляя (99) в функцию $S(n, \theta)$ (82б) и введя обозначение

$$\psi_{mj} = \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\frac{1}{2^{2m}}(-1)^{m+j-1}\binom{2m-1}{j} = \left(\frac{(m-1)!}{2}\right)^2\frac{(-1)^{m+j-1}}{j!(2m-j-1)!}, \qquad (100)$$

получим

$$\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta = \sum_{j=0}^{2m-1}\psi_{mj}\left[\sin(2m-2j)\theta+\sin(2m-2j-2)\theta\right]$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} 2\psi_{mj} \left[\sin(2m-2j)\theta + \sin(2m-2j-2)\theta \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \Gamma_{mj} \left[\sin 2j\theta + \sin(2j-2)\theta \right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\Gamma_{mj+1} + \Gamma_{mj}) \sin 2j\theta. \qquad (101)$$

В (101) величины Γ_{mj} и ψ_{mj} связаны соотношением:

$$\Gamma_{mj} = 2\psi_{mm-j} = \frac{(-1)^{j+1}\left((m-1)!\right)^2}{2(m-j)!(m+j-1)!}, 1 \le m \le n, 1 \le j \le m. \qquad (102)$$

Отсюда следует:

$$\Gamma_{mj+1} = -\frac{m-j}{m+j}\Gamma_{mj}, \ \ \Gamma_{mj+1} + \Gamma_{mj} = \frac{2j}{m+j}\Gamma_{mj}. \qquad (103)$$

Подставляя (103) в (101), получим

$$\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta = \sum_{j=1}^{m}\frac{2j}{m+j}\Gamma_{mj}\sin 2j\theta. \qquad (104)$$

Введем новые обозначения

$$\Lambda_{mj} = \frac{-2j}{m+j}\Gamma_{mj}, \ \ \Phi_{mj} = -\Lambda_{mj}\frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!}. \qquad (105)$$

Получим окончательно

$$\frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!}\sin^{2m-1}\theta\cos\theta = -\sum_{j=1}^{m}\Lambda_{mj}\sin 2j\theta, \qquad (106)$$

$$\sin^{2m-1}\theta\cos\theta = \sum_{j=1}^{m}\Phi_{mj}\sin 2j\theta, \qquad (107)$$

где

$$\Lambda_{mj} = \frac{(-1)^j j\left((m-1)!\right)^2}{(m-j)!(m+j)!}, 1 \le j \le m, \qquad (108)$$

$$\Phi_{mj} = \frac{(-1)^{j+1} j(m-1)!(2m-1)!!}{2^{m-1}(m-j)!(m+j)!}, 1 \le j \le m. \qquad (109)$$

Подставляем (106) в функцию $\bar{S}(n,\theta)$ (84). Тогда:

$$\bar{S}(n,\theta)=\theta+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Lambda_{mj}\sin 2j\theta,\ n\geq 0. \tag{110}$$

Определяем второй член функции $\bar{S}(n,\theta)$. При j=1 имеем:

$$\Lambda_{m1}=\frac{-1}{m(m+1)}, \tag{111}$$

$$\sum_{m=1}^{n}\Lambda_{m1}=\sum_{m=1}^{n}\frac{-1}{m(m+1)}=\frac{-n}{n+1}. \tag{112}$$

Тогда получим:

$$\bar{S}(n,\theta)=\theta-\frac{n}{n+1}\sin 2\theta+\sum_{m=2}^{n}\sum_{j=2}^{m}\Lambda_{mj}\sin 2j\theta,\ n\geq 0. \tag{113}$$

Таким образом, функция $\bar{S}(n,\theta)$ (84) имеет вид (110) и (113):

$$\bar{S}(n,\theta)=\theta+\sum_{m=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Lambda_{mj}\sin 2j\theta,\ n\geq 0$$

или

$$\bar{S}(n,\theta)=\theta-\frac{n}{n+1}\sin 2\theta+\sum_{m=2}^{n}\sum_{j=2}^{m}\Lambda_{mj}\sin 2j\theta,\ n\geq 0.$$

Приведем функцию $\bar{S}(n,\theta)$ при $n\leq 5$:

$$\begin{aligned}
&\bar{S}(0,\theta)=\int_0^{\theta}\sin^0\theta d\theta=\theta,\\
&\bar{S}(1,\theta)=2\int_0^{\theta}\sin^2\theta d\theta=\theta-\frac{\sin 2\theta}{2},\\
&\bar{S}(2,\theta)=\frac{8}{3}\int_0^{\theta}\sin^4\theta d\theta=\theta-\frac{2\sin 2\theta}{3}+\frac{\sin 4\theta}{12},\\
&\bar{S}(3,\theta)=\frac{16}{5}\int_0^{\theta}\sin^6\theta d\theta=\theta-\frac{3\sin 2\theta}{4}+\frac{3\sin 4\theta}{20}-\frac{\sin 6\theta}{60},\\
&\bar{S}(4,\theta)=\frac{128}{35}\int_0^{\theta}\sin^8\theta d\theta=\theta-\frac{4\sin 2\theta}{5}+\frac{\sin 4\theta}{5}-\frac{4\sin 6\theta}{105}+\frac{\sin 8\theta}{280},\\
&\bar{S}(5,\theta)=\frac{256}{63}\int_0^{\theta}\sin^{10}\theta d\theta=\theta-\frac{5\sin 2\theta}{6}+\frac{5\sin 4\theta}{21}-\frac{5\sin 6\theta}{84}+\frac{5\sin 8\theta}{504}-\frac{\sin 10\theta}{1260}.
\end{aligned} \tag{114}$$

Получено разложение интеграла $F(\theta, k)$, аналогичное данному в [18, 19].

Качественно функция $\bar{S}(n,\theta)$ при n>0 состоит из двух частей. Первая – линейная, равная θ. Вторая – периодическая, с линейным комбинированием периодических членов вида $A_j\sin 2j\theta$, $1\leq j\leq n$, период этой части равен π.

При увеличении j модуль амплитуды $|A_j|$ быстро уменьшается.

На рис. 1 показана функция $\bar{S}(n,\theta)$ на интервале $\theta \in [-\pi, \pi]$ для n= 0, 1, 10, 100. С увеличением n функция $\bar{S}(n,\theta)$ меняется от прямой линии к ступенчатой, т.е. при стремлении $n \to \infty$ имеется соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \bar{S}(n,\theta) = \left\lfloor \frac{\theta + \pi/2}{\pi} \right\rfloor \pi, \theta \neq j\pi + \pi/2,\ j \in Z, \tag{115}$$

где $\lfloor\ \rfloor$ – функция округления до ближайшего целого в меньшую сторону.

Когда $-\pi/2 < \theta < \pi/2$, функция $\bar{S}(+\infty,\theta) =$ 0, а в точках $\theta = j\pi/2,\ j \in Z$, периодическая часть функции $\bar{S}(n,\theta)$ равна 0, т.е.

$$\lim_{n\to+\infty} \bar{S}(n,\theta) = 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, \tag{115a}$$

$$\bar{S}(n, j\pi/2) = j\pi/2, n \geq 0,\ j \in Z. \tag{116}$$

Т.е. (114) и (116) определяют предельную функцию $S_0(\theta)$ (см. рис. 2)

$$S_0(\theta) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{\theta + \pi/2}{\pi} \right\rfloor \pi, \theta \neq j\pi + \pi/2, \\ \theta, \theta = j\pi + \pi/2,\ j \in Z. \end{cases} \tag{117}$$

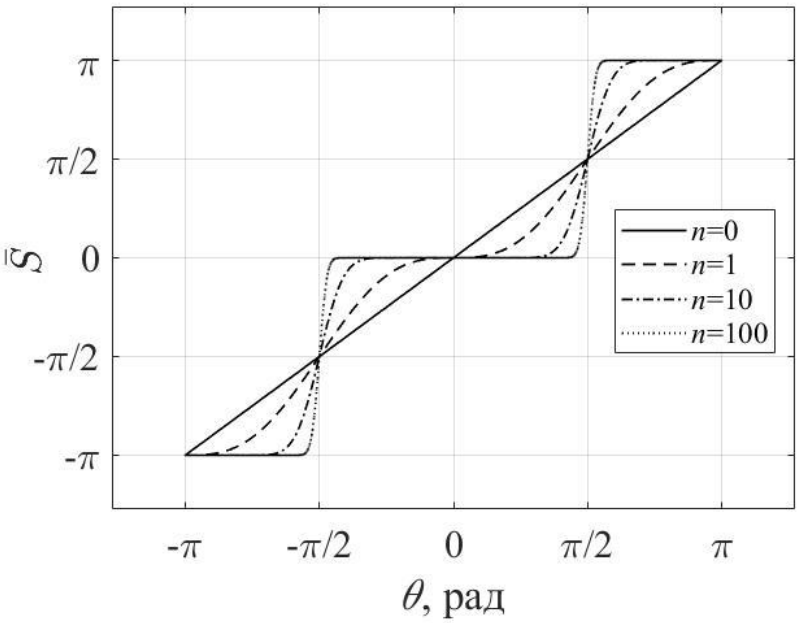

Рис. 1. Функция $\bar{S}(n,\theta)$ в зависимости от параметра n

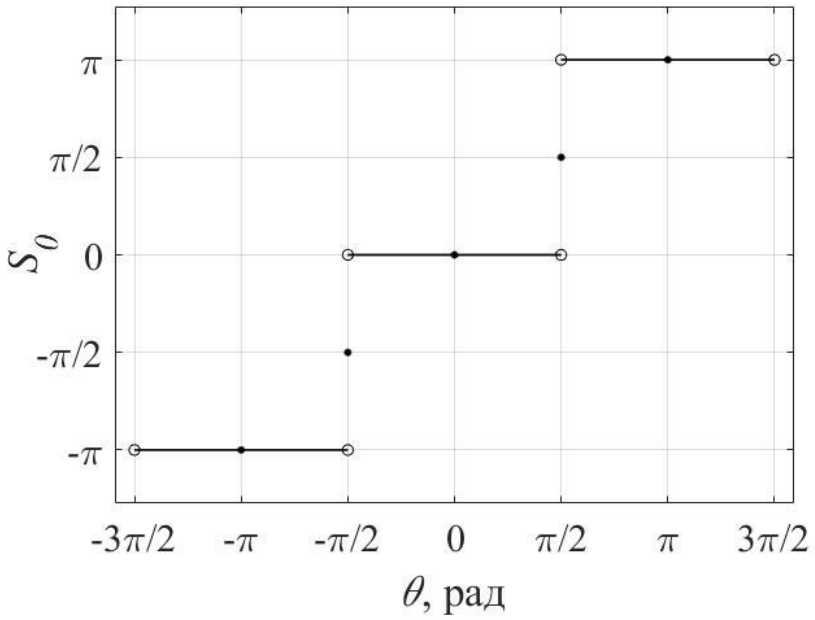

Рис. 2. Функция $S_0(\theta)$

3. Анализ численных результатов в применении к астероиду Апофис

В качестве примера определяется потенциальное поле астероида 99942 Апофис, который опасно сближается с Землей в 2029 г. и имеет некоторую малую вероятность столкновения с нашей планетой в текущем столетии. По результатам обработки наблюдений астероид Апофис аппроксимируется трехосным эллипсоидом. Оценка отношений главных осей динамически эквивалентного эллипсоида дала $\alpha=c/a\approx1.5(\pm0.2)$, $\alpha_1=b/a\approx1.06(\pm0.02)$ [20]. С целью изучения характеристик астероида Апофис в НПО им. С.А.Лавочкина РФ разрабатывается проект полета к нему, и в рамках этой программы предполагается вывести долговременный спутник с радиомаяком на орбиту вокруг Апофиса. Обработка его сигналов может помочь существенно уточнить орбиту астероида Апофис. При этом следует отметить работы [21-23], в которых исследованы оптимальная траектория полета к Апофису, а также возмущенное пассивное движение КА вблизи астероида с целью выявления времени существования КА у астероида Апофис. Так как средняя полуось астероида близка к малой, в данных работах для Апофиса принята приближенная модель вытянутого эллипсоида вращения, т.е. $\alpha_1=1$. Для анализа движения спутника астероида Апофис в настоящей работе рассмотрен вопрос вычисления потенциала и силы притяжения этого астероида.

Для расчета гравитационный параметр Апофиса взят $\mu=2.86$ м^3/с^2, средний радиус астероида Апофис $R_a=160$ м, $\alpha=1.5$. Рассмотрим два случая: (а) случай двухосного эллипсоида при $\alpha_1=1$, (б) случай трехосного эллипсоида при $\alpha_1=1.06$.

Применяем три способа определения потенциала или силовой функций: аналитический с разложением потенциалов в ряды по введенным функциям $S(n,\theta)$ (п. 2.2.2 (56-59) и п. 2.2.3 (86), (91), (95) и (97)), численный с вычислением интегралов по квадратурам (п. 2.2.1) и приближенный аналитический с разложением по сферическим гармоникам (п. 2.1). Полученные этими тремя способами значения силовой функций соответственно обозначаются через $U_{анал}$, $U_{числ}$ и $U_{сфер}$. Для анализа точности определения потенциала определяем также относительную ошибку

$$\varepsilon_{числ} = \left| \frac{U_{числ} - U_{анал}}{U_{анал}} \right|, \quad \varepsilon_{сфер} = \left| \frac{U_{сфер} - U_{анал}}{U_{анал}} \right|. \tag{118}$$

3.1. Случай двухосного эллипсоида

Для этого случая принято: α=1.5, α_1=1. Получим главные полуоси эллипсоида: c=209.7 м, b=a=139.8 м. Ненулевые гармоники остаются только зональными, до 4-го порядка, имеем C_{20}=0.1111, C_{40}=0.0265. В этом случае потенциал не зависит от долготы λ. В качестве примера расчета полагаем, что положение точки $P(x,y,z)$ меняется от поверхности эллипсоида (астероида) вдоль малой оси, т.е. оси x. Тогда координаты точки P в данной связанной СК равны: x=a+H, y=z=0, т.е. $\lambda = \varphi = 0$, $r = a+H$, высота H меняется в диапазоне [0, 3] км.

На рис. 3 сплошная кривая дает силовую функцию $U_{анал}$ (в зависимости от высоты H), определяемую аналитическим методом в соответствии с точными формулами для расчета силовой функции вытянутого эллипсоида вращения (56–59) [3-5, 7, 17]. Силовая функция быстро (~1/r) уменьшается от 18.6 до 0.9 м^3/с^2 при увеличении высоты точки от 0 до 3 км. На рис. 4 показана относительная ошибка $\varepsilon_{числ}$ численного метода в зависимости от высоты H для разного числа узлов на отрезке [–1, 1], n=5, 8, 10 и 15. Степень $n \geq 15$ обеспечивает относительную ошибку ~ 10^{-11}-10^{-14}. На рис. 5 приведена относительная ошибка $\varepsilon_{сфер}$ расчета силовой функции по приближенному разложению по сферическим гармоникам до 4-го порядка включительно в зависимости от высоты H. Чем ближе к поверхности астероида, тем больше ошибка $\varepsilon_{сфер}$. Ее максимальное значение достигает 1.9% при H=0. На высоте 0.5 км ошибка составляет ~ 10^{-6}, а на высоте 1 км она еще в 10 раз меньше, $\varepsilon_{сфер} \approx 10^{-7}$.

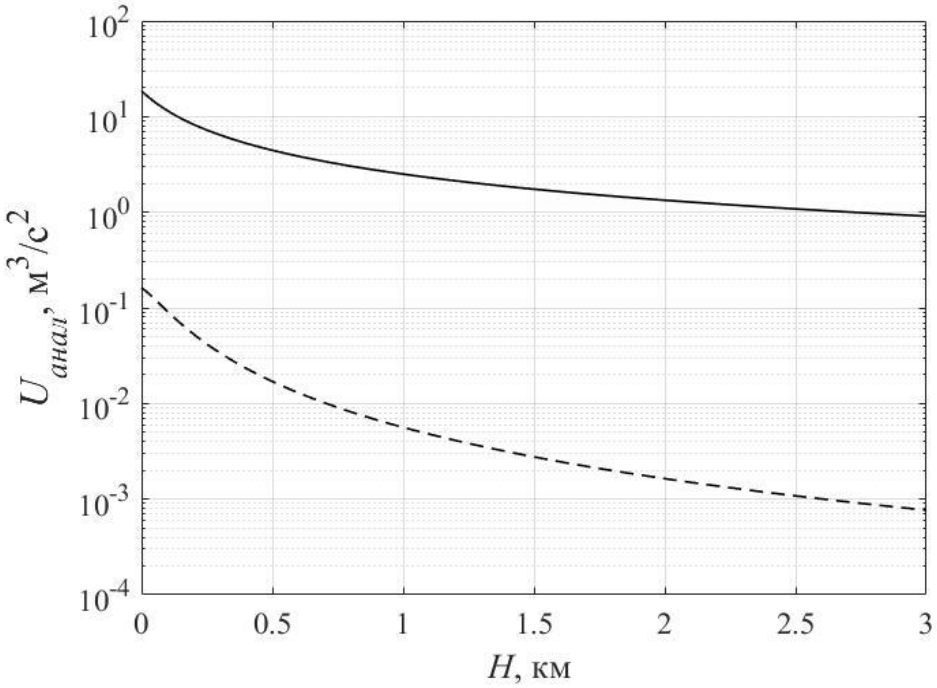

Рис. 3. Силовая функция в зависимости от высоты H: сплошная кривая – случай α_1=1, расчет по аналитическому методу; штриховая кривая – зависимость $\Delta U(H)$

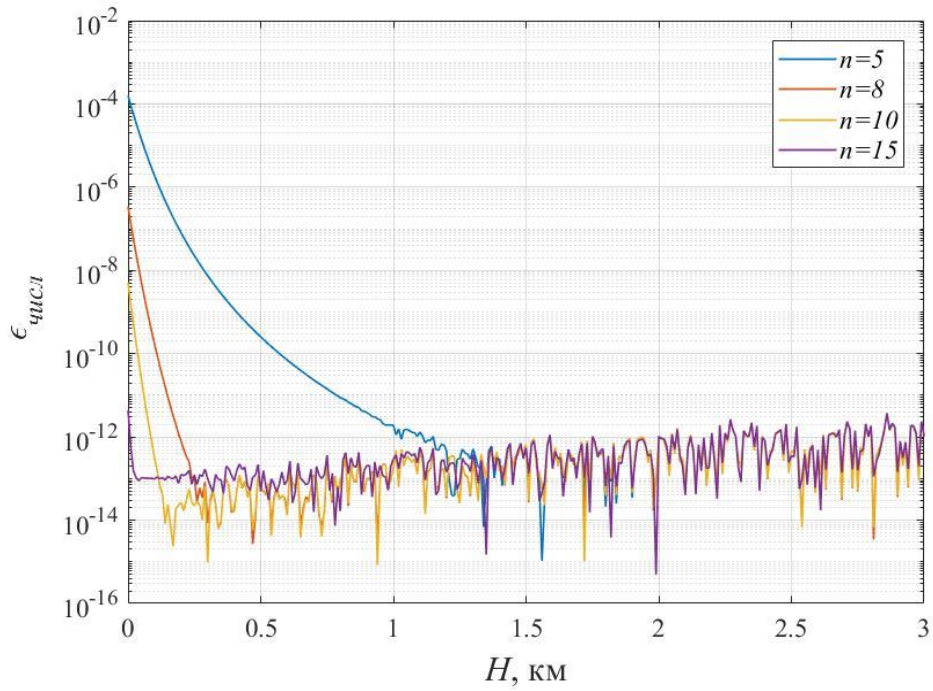

Рис. 4. Относительная ошибка численного метода определения потенциала $\varepsilon_{числ}$ в зависимости от высоты H для разного числа узлов на отрезке [–1, 1]: n=5, 8, 10 и 15 (α=1.5, α_1=1)

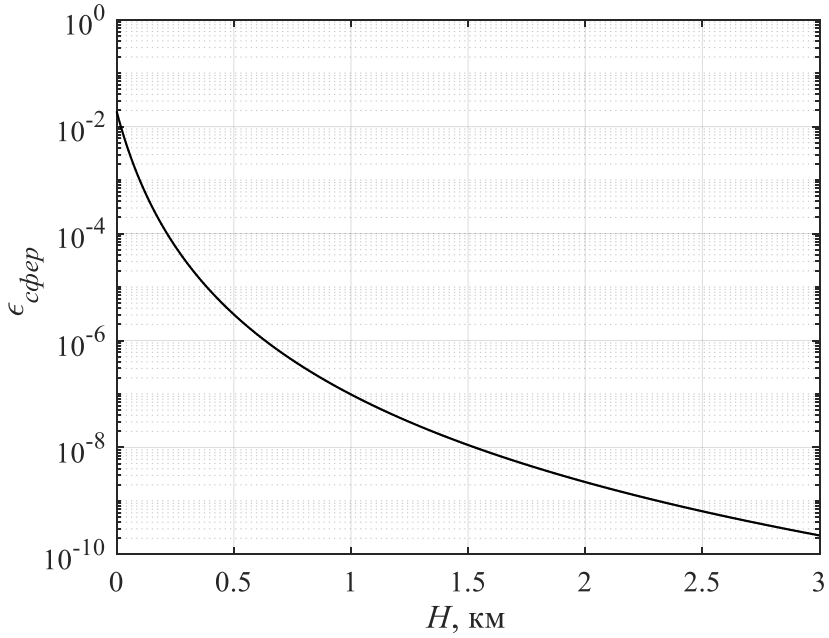

Рис. 5. Относительная ошибка определения потенциала $\varepsilon_{сфер}$ в зависимости от высоты H (α=1.5, α_1=1).

3.2. Случай трехосного эллипсоида

Рассмотрим случай трёхосного эллипсоида. Для него принято α=1.5, α_1=1.06. Главные полуоси эллипсоида составляют c=205.6 м, b= 145.3 м, a=137.1 м. Для ненулевых сферических гармоник до 4-го порядка имеем: C_{20}= 0.1056, C_{22}= –0.0027, C_{40} = 0.0239. C_{42} = -2.0721×10^{-4}, C_{44} =1.3472×10^{-6}. Также полагаем, что положение точки $P(x, y, z)$ меняется от поверхности эллипсоида вдоль малой оси, $x=a+H$, $y=z=0$.

Для расчета силовой функции численным методом по квадратурам принято на основании предыдущего анализа его точности, что имеется n=15 узлов. Получены величины силовой функции численным способом для данного случая трехосного эллипсоида, при n=15 узлов, $U_{числ}(\alpha_1=1.06)$. На рис. 3 штриховая кривая дает зависимость разности $\Delta U=U_{числ}(\alpha_1=1.06) - U_{анал}(\alpha_1=1)$ от высоты H. Разность ΔU показывает отличие силовой функции для случаев трехосного и двухосного эллипсоидов, т.е. влияние «трехосности». Величины силовой функции для данного случая эллипсоида увеличиваются на 0.1%–0.9%, максимальное значение ΔU достигается при $H\approx20$ м.

Точность определения силовой функции аналитическим методом по формулам (86), (91), (95) и (97) зависит от числа учитываемых членов рядов (от «степени приближения»). Обозначим значение силовой функции, соответствующей этой степени приближения N, через $U_{анал}^{(N)}$. Для того чтобы определить минимальную степень приближения N, обеспечивающую

необходимую относительную точность (10^{-12}-10^{-14}), делаем сравнение $U_{анал}^{(N)}$ со значением силовой функции $U_{числ}^{(15)}$, полученным численным методом при n=15, и вычисляем относительную ошибку

$$\varepsilon_{анал}^{(N)} = \left| \frac{U_{анал}^{(N)} - U_{числ}^{(15)}}{U_{числ}^{(15)}} \right|. \qquad (119)$$

Определяем, при каком числе членов ряда N получается необходимая точность определения силовой функции. На рис. 6 приведена относительная ошибка $\varepsilon_{анал}^{(N)}$ по аналитическому методу для случаев степени приближения N=4, 10, 15, 20 и 25. Видно, что максимальная ошибка составляет 0.4% при N=4, H=0, и N≥25 обеспечивает на всех высотах требуемую относительную точность (10^{-12}-10^{-14}). Учитывая, что точность численного метода оценена ранее относительной ошибкой 10^{-11}, получим оценку ошибки этих обоих методов в 10^{-11}.

На рис. 7 также показана относительная ошибка определения силовой функции $U_{сфер}$ приближенным аналитическим методом с разложением по сферическим гармоникам до 4-го порядка включительно $\varepsilon_{сфер}$ в зависимости от высоты H для трехосного эллипсоида. Максимально ошибка $\varepsilon_{сфер}$ составляет 2.1% при H=0. Сопоставление ошибки $\varepsilon_{сфер}$ и $\varepsilon_{анал}^{(N)}$ показывает, что при ограничении степени приближения до 4-го порядка разработанный аналитический метод с разложением по функциям $S(n,\theta)$ эффективнее, чем метод с разложением по сферическим гармоникам при всех высотах, и является довольно точным: $\varepsilon_{анал}^{(N=4)} = 0.004, \varepsilon_{сфер} = 0.02$.

Теперь рассмотрим случай, когда точка P находится на поверхности эллипсоида H=0, и рассмотрим влияние положения точки (λ, φ) на поверхности эллипсоида. На рис. 8 для данного случая трехосного эллипсоида приведено значение силовой функции, определенной по аналитическому методу $U_{анал}^{(N)}$ (N=25), в зависимости от долготы и широты точки P. Сравнивая значение силовой функции для сферических гармоник $U_{сфер}$ с ее значениями для аналитического метода $U_{анал}^{(25)}$, получим относительную ошибку $\varepsilon_{сфер}$ в зависимости от долготы и широты точки P, см. рис. 9. Здесь принято:

$$\varepsilon_{сфер} = \frac{U_{сфер} - U_{анал}^{(25)}}{U_{анал}^{(25)}}. \qquad (120)$$

Максимально модуль значения $\varepsilon_{сфер}$ не превышает 2.1%. Эти максимальные ошибки достигаются в вершинах малой полуоси, т.е. в ближайших к центру масс эллипсоида точках, λ=(0; 180) град., φ=0.

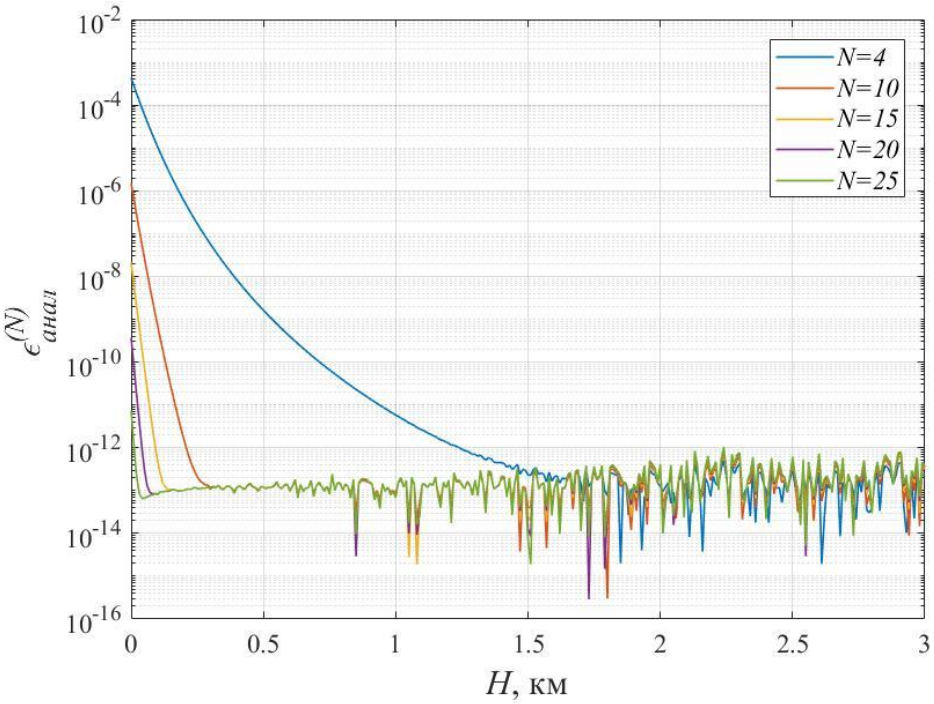

Рис. 6. Относительная ошибка определения потенциала $\varepsilon_{анал}^{(N)}$ для аналитического метода при N=4, 10, 15, 20 и 25 (α=1.5, α_1=1.06)

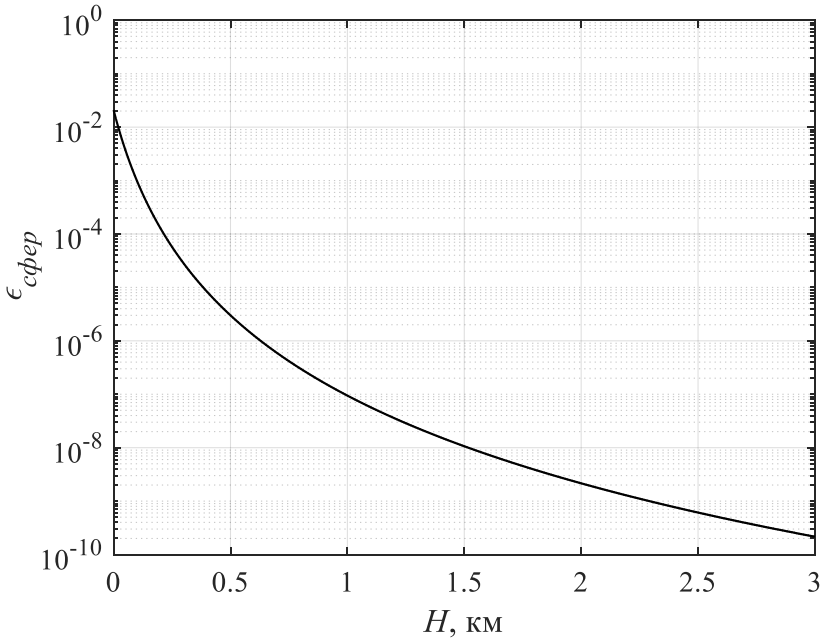

Рис. 7. Относительная ошибка $\varepsilon_{сфер}$ потенциала в зависимости от высоты H (α=1.5, α_1=1.06)

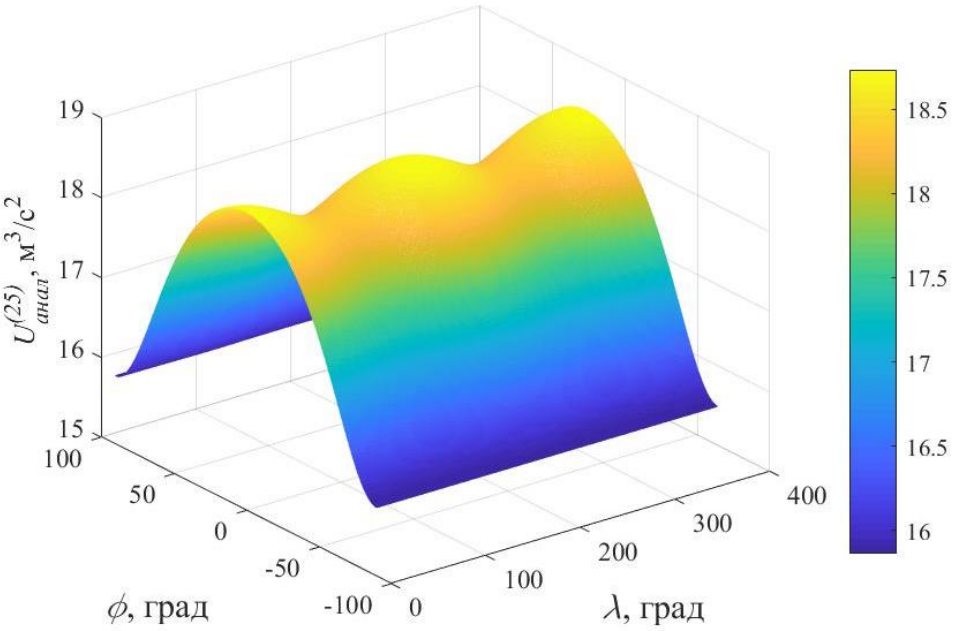

Рис. 8. Силовая функция по аналитическому методу $U^{(N)}_{анал}$ (N=25) в зависимости от долготы λ и широты φ точки P, шаг сетки 1° (α=1.5, α_1=1.06, H=0)

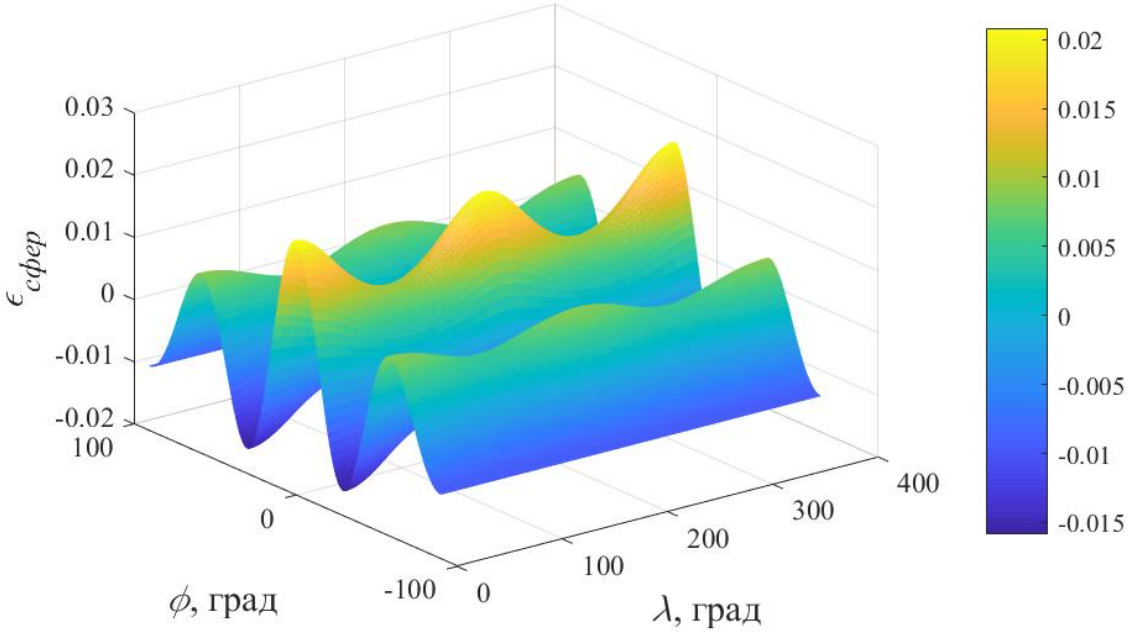

Рис. 9. Относительная ошибка определения силовой функции $\varepsilon_{сфер}$ в зависимости от долготы и широты точки P (α=1.5, α_1=1.06, H=0)

Согласно уравнению (34) для определения силы притяжения эллипсоидом точки точность вычисления составляющих этой силы пропорциональна точности вычисления интегралов $\bar{U}_i, i = 1,...,3$. Численный анализ подтвердил, что вычисление силы притяжения и потенциала с помощь формулы Дирихле даёт близкие оценки точности при использовании разных методов расчета интегралов.

Результаты определения силы притяжения в зависимости от высоты при движении точки *P* вдоль малой оси эллипсоида показаны на рис. 10: 1 – модуль ускорения для случая двухосного эллипсоида; 2 – относительная разность ускорений для трехосного и двухосного эллипсоидов $\varepsilon = |F_{анал}(\alpha_1=1.06) - F_{анал}(\alpha_1=1)|/F_{анал}(\alpha_1=1)$; 3 – относительная ошибка $\varepsilon_{сфер}$ определения ускорения с помощью разложения по сферическим гармоникам до 4-го порядка для трехосного эллипсоида; 4 – относительная ошибка определения ускорения по аналитическому методу через формулу Дирихле при степени приближения N=4 для трехосного эллипсоида. Кривая 2 на рис. 10 показывает отличие ускорений для случаев трехосного и двухосного эллипсоидов, максимальная относительная разность достигается при $H \approx 100$ м, $\varepsilon \approx 1.2\%$. Сравнение ошибки $\varepsilon_{сфер}$ с $\varepsilon_{анал}^{(N=4)}$ (кривые 3 и 4) показывает, что при одинаковой степени приближения (4-го порядка) разработанный аналитический метод с помощью формулы Дирихле эффективнее, причем максимальные значения $\varepsilon_{сфер}$ и $\varepsilon_{анал}^{(N=4)}$ соответственно составляют 16% и 0.3% при H=0.

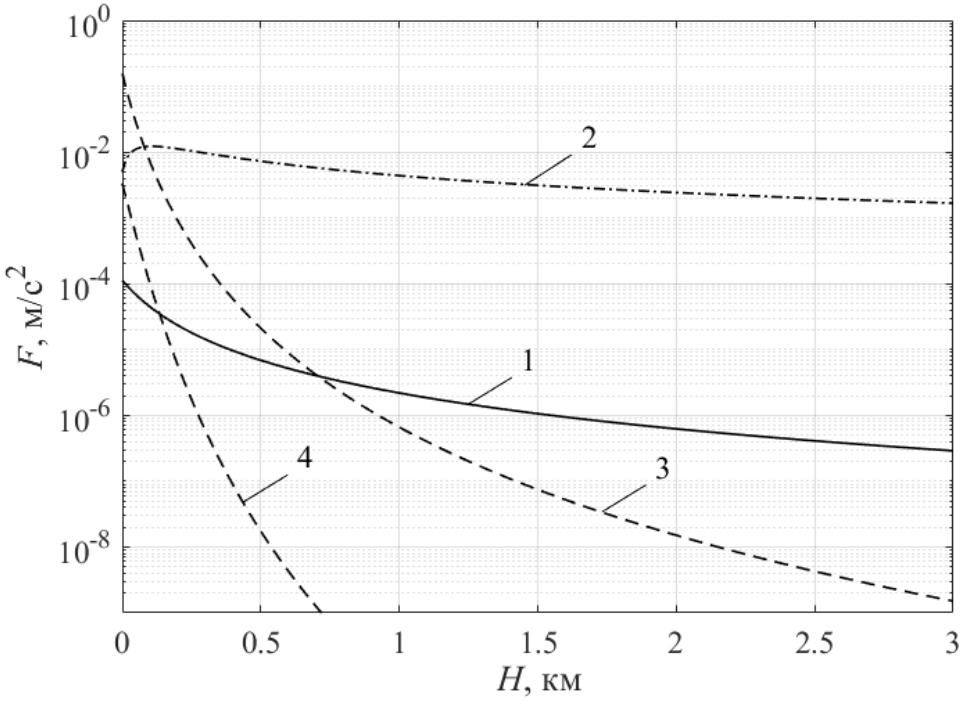

Рис. 10. Зависимости ускорения от высоты: 1 – модуль ускорения для случая двухосного эллипсоида; 2 – относительная разность ускорений для трехосного и двухосного эллипсоидов; 3 – относительная ошибка определения ускорения $\varepsilon_{сфер}$ для трехосного эллипсоида при разложении по сферическим функциям; 4 – относительная ошибка аналитического определения ускорения $\varepsilon_{анал}^{(N=4)}$ для трехосного эллипсоида при использовании формулы Дирихле.

4. Выводы

Разработаны алгоритмы определения внешнего потенциала и силы притяжения астероида для общего случая его аппроксимации трехосным эллипсоидом. Точное вычисление потенциала для эллипсоида задается формулой Дирихле, содержащей эллиптические интегралы. Разработаны численный и аналитический методы вычисления этих интегралов. Получено аналитическое представление для эллиптических интегралов, выраженное в виде тригонометрических рядов. В качестве примера определены потенциал и сила притяжения астероида 99942 Апофис в модельных случаях двухосного и трехосного эллипсоидов. Выполнен анализ точности вычисления потенциала и ускорения с помощью численного и аналитического методов. Анализ показал высокую точность вычисления потенциала и силы притяжения эллипсоида, с относительной ошибкой ~ 10^{-11}. Сделано также сравнение с результатами вычисления силовой функции и ускорения приближенным разложением потенциала по сферическим гармоникам до 4-го порядка включительно.

Авторы признательны М.А. Вашковьяку, Н.В. Емельянову и Б.П. Кондратьеву за обсуждение работы и ряд полезных советов.

5. Литература

1. Garmier Romain and Barriot Jean-Pierre. Ellipsoidal harmonic expansions of the gravitational potential: theory and application // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2001. Vol. 79. pp. 235–275.
2. Garmier R., Barriot J.-P., Konopliv A.S., and Yeomans D.K. Modeling of the Eros Gravity Field as an Ellipsoidal Harmonic Expansion from the NEAR Doppler Tracking Data // Geophysical Research Letters. 2002. Vol. 29. № 8. p. 1231.
3. Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: ГИФМЛ. 1961. 288 с.
4. Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. М.: Наука. 2 изд. 1968. 798 с.
5. MacMillan W.D. The Theory of the Potential. Dover, New York. 1958. 528 p.
6. Hobson E.W. The theory of spherical and ellipsoidal harmonics. Chelsea. 1965. 500 p.
7. Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир. 2007. 512 с.
8. Balmino G. Gravitational potential harmonics from the shape of an homogeneous body // Celest. Mech. Dyn. Astron. 1994. Vol. 60. Pp. 331–364.
9. Werner R. A., and Scheeres D. J. Exterior gravitation of a polyhedron derived and compared with harmonic and mascon gravitation representations of asteroid 4769 Castalia // Celest. Mech. Dyn. Astron., 1997. Vol. 65. Pp. 314–344.
10. Rossi A., Marzari F., and Farinella P. Orbital evolution around irregular bodies // Earth Planets Space. 1999. 51. Pp. 1173–1180.
11. Jaydeep P. Bardhan and Matthew G. Knepley. Computational science and

re-discovery: open-source implementation of ellipsoidal harmonics for problems in potential theory // Computational Science & Discovery 5 (2012) 014006. 15 p.
12. Hu Xuanyu. Comparison of ellipsoidal and spherical harmonics for gravitational field modeling of non-spherical bodies. Master Thesis. 2012. 127 p.
13. Yu Takahashi and Scheeres D. J. Surface Gravity Fields for Asteroids and Comets // Journal of guidance, control, and dynamics. 2013. Vol. 36, No. 2. Pp. 362–374.
14. Yu Takahashi and Scheeres D.J. Small body surface gravity fields via spherical harmonic expansions // Celest. Mech. Dyn. Astron. 2014. Vol. 119. Pp. 169–206.
15. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука. ФМ. 1979. 832 с.
16. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 2003. 636 с.
17. Ивашкин В.В. Модель орбитального движения КА вблизи ядра кометы // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 1998. № 60. 32 с.
18. Paul F. Byrd and Morris D. Friedman. Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists. Springer Verlag. Berlin, Heidelberg GMBH. 1954. 358 pp.
19. Двайт Г.В. Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука. 1969. 228 с.
20. Pravec P., Scheirich P., Durech J., et al. The tumbling spin state of (99942) Apophis // Icarus. 2014. V. 233. Pp. 48–60.
21. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ орбитального движения космического аппарата вокруг астероида Апофис // Доклады академии наук. 2016. Т. 468. № 4. С. 403–407. DOI: 10.7868/S086956521616012X
22. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ орбитального движения спутника астероида Апофис // Космические исследования. 2017. Т. 55. № 4. 268–277. DOI:10.7868/S0023420617030050
23. Ивашкин В.В., Лан А. Анализ оптимальности траекторий экспедиции Земля–Астероид–Земля // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2017. № 113. 25 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2017-113.
24. Boyce W. Comment on a formula for the gravitational harmonic coefficients of a triaxial ellipsoid // Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 67, 107–110, 1997.

Приложение

Параметры ξ_{nm}, η_{nm} и ζ_{nm} до 4-й степени включительно

n	m	ξ_{nm}	η_{nm}	ζ_{nm}
1	0	$3\sin\varphi$	$\left(3\sin^2\varphi-1\right)/\sin\varphi$	0
1	1	$\left(2-\tan^2\varphi\right)\cos\varphi$	$3\cos\varphi$	$1/\cos\varphi$
2	0	$3\left(5\sin^2\varphi-1\right)/2$	$3\left(5\sin^2\varphi-3\right)/2$	0
2	1	$3\tan\varphi\left(4-5\sin^2\varphi\right)$	$-3\cot\varphi\left(1-5\sin^2\varphi\right)$	$3\tan\varphi$
2	2	$9-15\sin^2\varphi$	$15\cos^2\varphi$	6
3	0	$5\left(7\sin^3\varphi-3\sin\varphi\right)/2$	$\left(35\sin^4\varphi-30\sin^2\varphi+3\right)/(2\sin\varphi)$	0
3	1	$3\left(35\sin^2\varphi\cos^2\varphi-4\right)/\left(2\cos\varphi\right)$	$15\cos\varphi\left(7\sin^2\varphi-3\right)/2$	$3\left(5\sin^2\varphi-1\right)/\left(2\cos\varphi\right)$
3	2	$15\sin\varphi\left(5-7\sin^2\varphi\right)$	$-15\cot\varphi\cos\varphi\left(1-7\sin^2\varphi\right)$	$30\sin\varphi$
3	3	$15\left(4-7\sin^2\varphi\right)\cos\varphi$	$105\cos^3\varphi$	$45\cos\varphi$
4	0	$15\left(21\sin^4\varphi-14\sin^2\varphi+1\right)/8$	$5\left(63\sin^4\varphi-70\sin^2\varphi+15\right)/8$	0
4	1	$-5\tan\varphi\left(63\sin^4\varphi-77\sin^2\varphi+18\right)/2$	$15\cot\varphi\left(21\sin^4\varphi-14\sin^2\varphi+1\right)/2$	$5\tan\varphi\left(7\sin^2\varphi-3\right)/2$
4	2	$-15\left(63\sin^4\varphi-56\sin^2\varphi+5\right)/2$	$315\cos^2\varphi\left(3\sin^2\varphi-1\right)/2$	$15\left(7\sin^2\varphi-1\right)$
4	3	$315\sin\varphi\cos\varphi\left(2-3\sin^2\varphi\right)$	$105\cot\varphi\cos^2\varphi\left(9\sin^2\varphi-1\right)$	$315\sin\varphi\cos\varphi$
4	4	$105\cos^2\varphi\left(5-9\sin^2\varphi\right)$	$945\cos^4\varphi$	$420\cos^2\varphi$

Оглавление

1. Введение 3
2. Притяжение астероида как однородного эллипсоида 4
2.1. Разложение силовой функции эллипсоида в ряд по сферическим функциям 5
2.2. Представление силовой функции однородного эллипсоида по формуле Дирихле 7
2.2.1. Численное вычисление интегралов по квадратурным формулам 11
2.2.2. Аналитическое решение в случае двухосного эллипсоида 12
2.2.3. Аналитическое решение в случае трехосного эллипсоида с разложением в ряды 13
2.2.4. Свойства функции $S(n, \theta)$ 17
3. Анализ численных результатов в применении к астероиду Апофис 21
3.1. Случай двухосного эллипсоида 22
3.2. Случай трехосного эллипсоида 24
4. Выводы 29
5. Литература 29
Приложение 31