ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 67 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Липанов А.М., Родионов П.В.

Схемы высоких порядков аппроксимации и их применение для прямого численного моделирования новороссийской боры

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Липанов А.М., Родионов П.В. Схемы высоких порядков аппроксимации и их применение для прямого численного моделирования новороссийской боры // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 67. 42 с. doi:10.20948/prepr-2018-67
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-67

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.М. Липанов, П.В. Родионов

Схемы высоких порядков аппроксимации и их применение для прямого численного моделирования новороссийской боры

Москва — 2018

Липанов А.М., Родионов П.В.

Схемы высоких порядков аппроксимации и их применение для прямого численного моделирования новороссийской боры

В настоящей работе проведено исследование метода вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком аппроксимации, определены его свойства и ограничения. Данный метод был использован для построения явной разностной схемы типа Лакса-Вендроффа высокого порядка аппроксимации для решения системы уравнений газовой динамики. Полученная схема была применена для моделирования экстремального ветра бора в Новороссийске. Проведенное сравнение численных результатов с осредненными данными метеорологических наблюдений показало соответствие предлагаемой модели реальному атмосферному течению.

Ключевые слова: схема высокого порядка аппроксимации, разностная схема, прямое численное моделирование, dns, бора

Alexey Matveevich Lipanov, Pavel Vadimovich Rodionov

High-order accurate schemes and their application for the direct numerical simulation of bora in Novorossiysk

In this paper, the method of calculating of arbitrary spatial derivatives with any predefined approximation order was studied; its properties and limitations are defined. This method was used to construct an explicit high-order accurate finite-difference Lax-Wendroff-type scheme for solving the system of gas dynamics equations. The obtained scheme was applied to simulation of the extreme wind bora in Novorossiysk. The comparison of the numerical results with the averaged data of meteorological observations showed that the proposed model corresponds to the real atmospheric flow.

Key words: high-order accurate scheme, finite difference scheme, direct numerical simulation, dns, bora

Работа выполнена с использованием ресурсов суперкомпьютерного комплекса МГУ имени М.В. Ломоносова.

Введение

Бора – достаточно известное разрушительное природное явление. Она представляет собой сильный порывистый нисходящий ветер, образующийся при переходе холодных масс воздуха через горный хребет, расположенный вблизи поверхности моря [Прох, 1983]. Действие силы тяжести, усиливаемое разностью давлений между холодным фронтом и прогретыми морем приземными слоями воздуха, обусловливает развитие стремительного течения, направленного с вершины хребта к морской поверхности. Характерные скорости данного явления зависят от многих параметров, таких как температура прогретого и холодного воздуха, их скорости и направления движения во всем столбе атмосферы, высота и форма рельефа.

Наиболее благоприятными для возникновения боры являются окрестности Новороссийска и северные участки восточного побережья Адриатического моря – новороссийская и адриатическая бора, соответственно. При Новороссийской боре массам воздуха необходимо преодолеть сначала северо-западный участок Главного Кавказского хребта, а затем располагающийся в непосредственной близости Маркотхский хребет (высоты обоих над уровнем моря порядка 500-600 м для рассматриваемой области). Адриатической же боре, имеющей место в прибрежных районах между Альпами и Данарским нагорьем [Прох, 1983], как правило, достаточно преодолеть только хребет Велебит, однако его высота на участках, где наблюдается сильно выраженная бора, уже составляет 700-1100 м.

Изучение боры началось с момента появления первых метеорологических измерительных приборов, однако, даже несмотря на бурный рост методов численного моделирования атмосферных явлений в последние десятилетия, до сих пор не решен вопрос о ее корректном прогнозировании и моделировании, поскольку данные расчетов, как правило, совпадают скорее качественно, нежели количественно с результатами наблюдений [Grisogono, Belušić, 2009]. Причина этого заключается в том, что бора – явление экстремальное, но при этом мезомасштабное, то есть близкое к локальному, весьма ограниченное по высоте в атмосфере и очень порывистое, турбулентное. Многие современные подходы, используемые для изучения атмосферы, часто не дают достаточно точных результатов, в том числе и потому, что используют те или иные упрощения исходной системы уравнений гидромеханики, например, метод крупных вихрей (LES) или осреднение по Рейнольдсу (RANS). Эти упрощения, безусловно, выбираются сознательно, поскольку приводят к многократному увеличению скорости вычислений, позволяющему дополнить исходную систему уравнений слагаемыми, соответствующими важнейшим метеорологическим явлениям и процессам, таким как влажность воздуха, инсоляция, возникновение облаков, образование совокупности мелких частиц (снег, дождь), химические реакции в атмосфере, взаимное влияние воздушных и водных (например, море) масс на границе раздела сред. Учет этих параметров дает качественный скачок в

макромасштабном описании атмосферных явлений, позволяет описывать и прогнозировать погодные условия в различных точках планеты.

Однако специфика указанных климатических моделей и предмета их изучения вводит и соответствующие ограничения на область их применения. Так, в ряде работ говорится об ограниченности данного подхода как с точки зрения допустимых масштабов, так и с точки зрения невозможности воспроизведения всех физических деталей реального течения в виду многочисленных параметризаций и упрощений [Doyle и др., 2011; Gultepe, 2015]. Сравнение наблюдений и численных экспериментов, проведенных с использованием LES и RANS, можно найти, например, в работах [Allard и др., 2010; Gohm и др., 2008; Gohm, Mayr, 2005; Kuzmić и др., 2006; Sheridan, Vosper, 2012]. К механизмам, являющимся критически важными при развитии нисходящих мезомасштабных течений и в то же время в недостаточной степени точности воспроизводящимся с помощью LES и RANS, следует отнести характерные околоземные пульсации, причина которых кроется в неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [Абакумов, Липанов, Попов, 2016; Шестакова, 2017], мезомасштабные структуры, такие как подветренные роторы, гидравлический скачок, низкоуровневые струи, небанальным вопросом остается и вклад турбулентности и пограничного слоя в итоговое течение [Gohm и др., 2008; Grisogono, Belušić, 2009].

Для преодоления указанных ограничений при моделировании боры в настоящей работе предлагается использовать прямое численное моделирование (DNS). Его основная идея заключается в решении базовой системы уравнений гидромеханики без использования каких-либо дополнительных предположений и упрощений. Прямое решение такой системы оказывается, как правило, крайне ресурсоемким, однако при удачном выборе численного метода и корректной постановке граничных условий позволяет получить течение, достаточно близкое к реальному. Конечно, такая точность может оказаться нецелесообразной, если необходимо моделировать движение атмосферы над всем земным шаром или материком, однако при рассмотрении мезомасштабных явлений ураганной силы над сложной неравномерной поверхностью данный подход может оказаться весьма полезным.

Работы, использующие прямое численное моделирование для воспроизведения и анализа природных явлений, стали появляться сравнительно недавно. С их примерами можно ознакомиться в обзоре [Sun и др., 2015]. Там же указано, что несмотря на то, что прямое численное моделирование является достаточно ресурсоемким инструментом и обладает в следствие этого достаточно жесткими ограничениями на область применимости, его использование, в частности, для анализа деталей атмосферных мезомасштабных явлений должно дать существенное продвижение в понимании их внутренних взаимодействий и структуры.

Для решения базовой системы уравнений гидромеханики в настоящей работе была использована явная разностная схема типа Лакса-Вендроффа

высокого порядка точности, основанная на методе вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком аппроксимации [Липанов, 2011]. Краткое описание и анализ данного метода приведены в разделе 2. Раздел 3 посвящен математической постановке задачи, а раздел 4 – описанию указанной явной разностной схемы и методам аппроксимации граничных условий. Описание результатов расчетов и их сравнение с осредненными данными метеорологических наблюдений проводится в разделе 5.

1. Описание и анализ метода вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком аппроксимации

Следуя [Липанов, 2011], кратко изложим метод вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком точности. Начнем для простоты с рассмотрения первой производной. Пусть в пространстве введена равномерная сетка с шагом Δx. Тогда для вычисления первой производной функции $q(x)$ будем использовать следующее выражение:

$$\frac{\partial q}{\partial x}(x_i) \cong \frac{q_{i+1/2} - q_{i-1/2}}{\Delta x} = \\ = \frac{1}{\Delta x}\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(1)}(q_{i+m} + q_{i-m+1} - q_{i+m-1} - q_{i-m}), \tag{1}$$

$$q_{i+1/2} = \sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(1)}(q_{i+m} + q_{i-m+1}),$$

$$q_{i-1/2} = \sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(1)}(q_{i+m-1} + q_{i-m}),$$

где $q_i = q(x_i)$, N – заданный порядок аппроксимации, кратный 2, а $a_m^{(1)}$ – некоторые коэффициенты, подлежащие определению. Для определения значений $a_m^{(1)}$ запишем разложения функции $q(x)$ в ряд Тейлора в точках $i + m$ и $i - m$, предполагая, что $q(x)$ дифференцируема необходимое число раз:

$$q_{i+m} = q(x_i) + \frac{\partial q}{\partial x}(x_i)\frac{m\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x_i)\frac{(m\Delta x)^2}{2!} + \cdots, \tag{2}$$

$$q_{i-m} = q(x_i) - \frac{\partial q}{\partial x}(x_i)\frac{m\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x_i)\frac{(m\Delta x)^2}{2!} - \cdots.$$

Из этого следует, что

$$q_{i+m} - q_{i-m} = 2\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x_i)\frac{m\Delta x}{1!} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_i)\frac{m^3\Delta x^3}{3!} + \cdots\right),$$

$$q_{i+m-1} - q_{i-m+1} = 2\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x_i)\frac{(m-1)\Delta x}{1!} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_i)\frac{(m-1)^3\Delta x^3}{3!} + \cdots\right),$$

$$q_{i+m} + q_{i-m+1} - q_{i+m-1} - q_{i-m} =$$

$$= 2\left(\frac{\partial q}{\partial x}(x_i)\frac{[m-(m-1)]\Delta x}{1!} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_i)\frac{[m^3-(m-1)^3]\Delta x^3}{3!} + \cdots\right).$$

Суммируя последние выражения, умноженные на коэффициенты $(-1)^{m+1}a_m^{(1)}/\Delta x$, по m и приравнивая полученный коэффициент при первой производной единице, а при остальных по возможности нулю, получим систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $a_m^{(1)}$:

$$A^{(1)}a^{(1)} = b^{(1)}, \qquad \text{где}$$

$$A^{(1)} = \left[(-1)^{j+1}\left(j^{2i-1} - (j-1)^{2i-1}\right)\right] \in \mathbb{N}^{N/2\times N/2},$$

$$b^{(1)} = \frac{1!}{2} * [1\ 0 \dots 0]^T \in \mathbb{Q}^{N/2\times 1}.$$

Можно показать, что определитель данной системы отличен от нуля, и, следовательно, она имеет единственное решение. Используя полученные значения коэффициентов, приходим к равенству:

$$\frac{q_{i+1/2} - q_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{\partial q}{\partial x}(x_i) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(1)}\frac{[m^{N+1}-(m-1)^{N+1}]}{(N+1)!}\frac{\partial^{N+1}q}{\partial x^{N+1}}(x_i)\Delta x^N + \cdots.$$

Аналогично (1) можно получить выражение, аппроксимирующее значение второй производной в точке x_i с порядком N. Для этого положим:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x_i) \cong \frac{D_{i+1/2} - D_{i-1/2}}{\Delta x} =$$

$$= \frac{1}{\Delta x^2} \sum_{m=1}^{N/2} (-1)^{m+1} a_m^{(2)} (q_{i+m} - q_{i-m+1} - q_{i+m-1} + q_{i-m}),$$

$$D_{i+1/2} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^{N/2} (-1)^{m+1} a_m^{(2)} (q_{i+m} - q_{i-m+1}),$$

$$D_{i-1/2} = \frac{1}{\Delta x} \sum_{m=1}^{N/2} (-1)^{m+1} a_m^{(2)} (q_{i+m-1} - q_{i-m}).$$

Используя разложения (2), имеем:

$$q_{i+m} + q_{i-m} = 2\left(q(x_i) + \frac{\partial q^2}{\partial x^2}(x_i)\frac{m^2 \Delta x^2}{2!} + \cdots\right),$$

$$q_{i+m-1} + q_{i-m+1} = 2\left(q(x_i) + \frac{\partial q^2}{\partial x^2}(x_i)\frac{(m-1)^2 \Delta x^2}{2!} + \cdots\right),$$

$$q_{i+m} - q_{i-m+1} - q_{i+m-1} + q_{i-m} =$$

$$= 2\left(\frac{\partial q^2}{\partial x^2}(x_i)\frac{[m^2 - (m-1)^2]\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^4 q}{\partial x^4}(x_i)\frac{[m^4 - (m-1)^4]\Delta x^4}{4!} + \cdots\right).$$

Просуммировав последнее выражение с соответствующими коэффициентами и приравняв коэффициент при второй производной единице, а при остальных производных по возможности нулю, получим следующую систему линейных алгебраических уравнений относительно $a_m^{(2)}$:

$$A^{(2)} a^{(2)} = b^{(2)}, \qquad \text{где}$$

$$A^{(2)} = \left[(-1)^{j+1}\left(j^{2i} - (j-1)^{2i}\right)\right] \in \mathbb{N}^{N/2 \times N/2},$$

$$b^{(2)} = \frac{2!}{2} * [1\ 0 \ldots 0]^T \in \mathbb{Q}^{N/2 \times 1}.$$

Ее решение приводит к окончательному равенству

$$\frac{D_{i+1/2} - D_{i-1/2}}{\Delta x} = \frac{\partial q^2}{\partial x^2}(x_i) +$$

$$+2\sum_{m=1}^{N/2} (-1)^{m+1} a_m^{(2)} \frac{[m^{N+2} - (m-1)^{N+2}]}{(N+2)!} \frac{\partial^{N+2} q}{\partial x^{N+2}}(x_i)\Delta x^N + \cdots.$$

Варьируя значение N и значения компонент вектора b, можно добиться получения выражений для вычисления производных любого порядка с любым порядком аппроксимации. Для этого достаточно положить:

$$N = \begin{cases} n+k-1, & n \bmod 2 = 1, \\ n+k-2, & n \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

$$A^{(n,k)} = \begin{cases} \left[(-1)^{j+1}\left(j^{2i-1} - (j-1)^{2i-1}\right)\right] \in \mathbb{N}^{N/2\times N/2}, & n \bmod 2 = 1, \\ \left[(-1)^{j+1}\left(j^{2i} - (j-1)^{2i}\right)\right] \in \mathbb{N}^{N/2\times N/2}, & n \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

$$b^{(n,k)} = \frac{n!}{2} \cdot \begin{cases} e_{(n+1)/2} \in \mathbb{N}^{N/2\times 1}, & n \bmod 2 = 1, \\ e_{n/2} \in \mathbb{N}^{N/2\times 1}, & n \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

где n – порядок производной, k – заданный порядок аппроксимации, кратный 2, а e_r – единичный вектор с единицей в r-ой компоненте. В конченом итоге приходим к уравнению

$$\frac{1}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k)}(q_{i+m} + (-1)^{n+1}q_{i-m+1} - q_{i+m-1} +$$

$$+(-1)^n q_{i-m}) = \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots, \tag{3}$$

$$C^{(n,k)} = 2\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k)}\frac{[m^{n+k} - (m-1)^{n+k}]}{(n+k)!}.$$

Однако применение формулы (3) возможно только в точках, имеющих, как минимум, $N/2$ соседних точек с каждой стороны. Для приграничных точек с номерами, принадлежащими множеству $\mathcal{B} = [0, N/2-1] \cup [M-N/2, M-1]$, где M – общее количество пространственных узлов, для сохранения порядка аппроксимации k необходимо использовать несимметричные шаблоны. При их построении будем руководствоваться принципом постепенного перехода от несимметричных формул к симметричным по мере удаления от границы. Для этого введем выражение:

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_p)\Delta x^n \cong \sum_{m=1}^{N^*-p}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k,p)}(q_{p+m} - q_p) +$$

$$+\sum_{m=1}^{p}(-1)^{m+1}a_{m+N^*-p}^{(n,k,p)}(q_{p+m} + (-1)^{n+1}q_{p-m+1} - q_{p+m-1} + \tag{4}$$

$$+(-1)^n q_{p-m}), \qquad N^* = n+k-1,$$

применимое для $p \in [0, N/2-1]$. Видно, что размер матриц A не удастся удержать на уровне $N/2 \times N/2$, поскольку

$$q_{p+m} - q_p = \frac{\partial q}{\partial x}(x_p)\frac{m\Delta x}{1!} + \frac{\partial^2 q}{\partial x^2}(x_p)\frac{m^2\Delta x^2}{2!} + \frac{\partial^3 q}{\partial x^3}(x_p)\frac{m^3\Delta x^3}{3!} + \cdots.$$

Вместо этого имеем

$$A^{(n,k,p)}a^{(n,k,p)} = b^{(n,k,p)}, \qquad \text{где}$$

$$A^{(n,k,p)} = \left[\begin{cases} (-1)^{j+1}j^i/2, & j \le N^* - p, \\ (-1)^{d+1}\left(d^{\mathrm{i}} - (d-1)^i\right), & j > N^* - p, \ \ i^* \bmod 2 = 1, \\ 0, & j > N^* - p, \ \ i^* \bmod 2 = 0, \end{cases}\right] \in \mathbb{Q}^{N^* \times N^*},$$

$$d = j - (N^* - p),$$

$$i^* = \begin{cases} i, & n \bmod 2 = 1, \\ i+1, & n \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

$$b^{(n,k,p)} = \frac{\mathrm{n}!}{2} * e_n \in \mathbb{Q}^{N^* \times 1}.$$

По аналогии с (3) правая часть выражения (4) равна

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_p)\Delta x^n + C^{(n,k,p)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_p)\Delta x^{n+k} + \cdots,$$

$$C^{(n,k,p)} = \sum_{m=1}^{N^*-p}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k,p)}\frac{m^{n+k}}{(n+k)!} +$$

$$+2\sum_{m=1}^{p}(-1)^{m+1}a_{m+N^*-p}^{(n,k,p)}\frac{[m^{n+k} - (m-1)^{n+k}]}{(n+k)!}.$$

Приведенные формулы для левых приграничных точек легко трансформируются в формулы для правых приграничных точек. Для этого достаточно заметить, что для функций $q(x)$ и $q^*(x) = q(-x)$ справедливы следующие равенства:

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x) = -\frac{\partial^n q^*}{\partial x^n}(-x), \qquad n \bmod 2 = 1,$$

$$\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x) = \frac{\partial^n q^*}{\partial x^n}(-x), \qquad n \bmod 2 = 0.$$

Из этих равенств следует, что для правых приграничных точек значения коэффициентов $a^{(n,k,p)}$ остаются неизменными, меняется лишь направление индексации в правой части (4) и знак получаемой производной.

В заключение описания метода заметим, что как $a^{(n,k)}$, так и $a^{(n,k,p)}$ являются векторами с рациональными компонентами, поскольку они являются решениями систем линейных алгебраических уравнений с рациональными матрицами и правыми частями. С примерами конкретных значений коэффициентов $a_m^{(n,k)}$ и $a_m^{(n,k,p)}$ можно ознакомиться в [Карсканов, 2009; Липанов, 2011].

Полученные выше формулы можно использовать и для вычисления смешанных производных. Для этого необходимо последовательно применять оператор разностной производной по каждой из переменных. Действительно, согласно (3), для $q(x,y)$

$$\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x,y) = \frac{1}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k)}[q(x+m\Delta x,y)+$$

$$+(-1)^{n+1}q(x-(m-1)\Delta x,y)-q(x+(m-1)\Delta x,y)+$$

$$+(-1)^n q(x-m\Delta x,y)],$$

$$\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x_i,y) = \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i,y) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i,y)\Delta x^k + \cdots,$$

$$\mathcal{D}_y^{(r,k)}\big(g(y),y_j\big) = \frac{\partial^r g}{\partial y^r}\big(y_j\big) + C^{(r,k)}\frac{\partial^{r+k} g}{\partial y^{r+k}}\big(y_j\big)\Delta y^k + \cdots,$$

$$\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x_i,y),y_j\right) = \tag{5}$$

$$= \frac{\partial^r}{\partial y^r}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i,y) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i,y)\Delta x^k + \cdots\right)\big(y_j\big) +$$

$$+C^{(r,k)}\frac{\partial^{r+k}}{\partial y^{r+k}}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i,y) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i,y)\Delta x^k + \cdots\right)\big(y_j\big)\Delta y^k + \cdots =$$

$$= \frac{\partial^{n+r} q}{\partial x^n \partial y^r}\big(x_i,y_j\big) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k+r} q}{\partial x^{n+k}\partial y^r}\big(x_i,y_j\big)\Delta x^k +$$

$$+C^{(r,k)}\frac{\partial^{n+r+k} q}{\partial x^n \partial y^{r+k}}\big(x_i,y_j\big)\Delta y^k + \cdots$$

Также возможно последовательное применение оператора разностной производной для вычисления производных по одной переменной. Так, для $q(x)$

$$\mathcal{D}_x^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x),x_i\right) = \tag{6}$$

$$= \frac{\partial^r}{\partial x^r}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x)\Delta x^k + \cdots\right)(x_i) +$$

$$+C^{(r,k)}\frac{\partial^{r+k}}{\partial x^{r+k}}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x)\Delta x^k + \cdots\right)(x_i)\Delta x^k + \cdots =$$

$$= \frac{\partial^{n+r} q}{\partial x^{n+r}}(x_i) + \left(C^{(n,k)} + C^{(r,k)}\right)\frac{\partial^{n+r+k} q}{\partial x^{n+r+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots.$$

Тем не менее, стоит отметить, что в реальных расчетах все приведенные выше равенства не выполняются точно в связи с ограничениями, связанными с представлением вещественных чисел в памяти компьютера, и погрешностями, появляющимися при выполнении арифметических операций. Так, используя числа двойной точности, значение мантиссы для большинства вещественных чисел удается сохранить лишь с точностью до 10^{-15} - 10^{-17} [Kahan, 1997]. Также для нахождения значений $a_m^{(n,k)}$ и $a_m^{(n,k,p)}$ необходимо численно решать системы линейных алгебраических уравнений, что приводит к появлению дополнительной погрешности, однако данное обстоятельство нередко удается преодолеть посредством приближения полученных значений рациональными числами.

Исходя из вышесказанного, будем предполагать, что значения функции $q(x)$ заданы с некоторой ошибкой $\varepsilon(x)$, ограниченной и не являющейся дифференцируемой функцией. Тогда

$$\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon, x_i) = \mathcal{D}_x^{(n,k)}(q, x_i) + \mathcal{D}_x^{(n,k)}(\varepsilon, x_i) =$$

$$= \mathcal{D}_x^{(n,k)}(\varepsilon, x_i) + \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i) + C^{(n,k)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots,$$

$$\left|\mathcal{D}_x^{(n,k)}(\varepsilon, x_i)\right| \le \frac{4\max_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|,$$

$$\left|\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon, x_i) - \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i)\right| \le$$

$$\le \frac{4\max_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right| + \left|C^{(n,k)}\right|\left|\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\right|\Delta x^k + \cdots. \tag{7}$$

Для приграничных точек, используя (4), можно записать аналогичное неравенство:

$$\left|\mathcal{D}_x^{(n,k,p)}(\varepsilon, x_p)\right| \le \frac{2\max\limits_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N^*-p}\left|a_m^{(n,k,p)}\right| + \frac{4\max\limits_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{p}\left|a_{m+N^*-p}^{(n,k,p)}\right|,$$

$$\left|\mathcal{D}_x^{(n,k,p)}(q+\varepsilon, x_p) - \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_p)\right| \le \frac{2\,max\limits_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N^*-p}\left|a_m^{(n,k,p)}\right| +$$

$$+\frac{4\,max\limits_x|\varepsilon|}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{p}\left|a_{m+N^*-p}^{(n,k,p)}\right| + \left|C^{(n,k,p)}\right|\left|\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_p)\right|\Delta x^k + \cdots. \tag{8}$$

Видно, что при уменьшении Δx до определенного значения оценка для модуля погрешности аппроксимации будет уменьшаться. Однако при $\Delta x \to 0$ данная оценка стремится к бесконечности. Более того, если коэффициенты $a_m^{(n,k)}$ вычислены с некоторыми ошибками δ_m, то

$$A^{(n,k)}\left(a^{(n,k)} + \delta\right) - b^{(n,k)} = A^{(n,k)}\delta = \sigma \ne 0,$$

$$\mathcal{D}_x^{(n,k)[a+\delta]}(q, x_i) = \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i) +$$

$$+\sum_{m=1}^{N/2}\sigma_m^*\frac{\partial^{m^*}q}{\partial x^{m^*}}(x_i)\frac{\Delta x^{m^*}}{\Delta x^n} + C^{(n,k)[a+\delta]}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots,$$

$$m^* = \begin{cases} 2m-1, & n \bmod 2 = 1, \\ 2m, & n \bmod 2 = 0, \end{cases}$$

$$\sigma_m^* = \frac{2\sigma_m}{(m^*)!},$$

$$C^{(n,k)[a+\delta]} = 2\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}\left(a_m^{(n,k)} + \delta_m\right)\frac{[m^{n+k} - (m-1)^{n+k}]}{(n+k)!}.$$

Аналогичные равенства справедливы и для приграничных точек. Заметим также, что правая часть неравенства (7) приближенно равна

$$f(\Delta x) = \frac{a}{\Delta x^n} + b\Delta x^k = \frac{a}{\Delta x^n}\left(1 + \frac{b}{a}\Delta x^{n+k}\right), \qquad \text{где}$$

$$\mathrm{a} = 4\max_x|\varepsilon|\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|, \qquad b = \left|C^{(n,k)}\right|\left|\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\right|.$$

Минимум данной функции достигается при

$$\overline{\Delta x} = \left(\frac{na}{kb}\right)^{\frac{1}{n+k}},$$
$$f(\overline{\Delta x}) = a\left(\frac{na}{kb}\right)^{-\frac{n}{n+k}}\left(1+\frac{n}{k}\right). \tag{9}$$

Теперь проиллюстрируем все сказанное на примере модельной функции

$$q(x,y) = \sin x \sin y\,, \qquad x,y \in [0,7].$$

Пусть в пространстве введена равномерная по обоим переменным сетка с шагом $\Delta x = \Delta y$. Порядок аппроксимации вычисляемых производных положим равным 6.

Как станет видно в дальнейшем, наибольшая точность достигается при применении симметричного шаблона внутри области, в приграничных же точках из-за использования несимметричных шаблонов точность вычисления производных уменьшается, причем, как правило, чем ближе точка к границе, тем больше получаемая ошибка. В связи с этим для получения как можно более наглядного примера, будем рассматривать только значения, полученные с помощью симметричных шаблонов. Причем, если мы применяем последовательно оператор разностной производной, то мы обязаны на каждом шаге сужать множество рассматриваемых точек, поскольку возмущение, полученное на границе, будет продвигаться внутрь области с каждым новым примененным оператором. Таким образом, для оценки разницы между точным значением производной и приближенным будем применять

$$\max_{x_i,y_j}|\mathcal{D}(q) - D(q)|\,, \qquad x_i, y_j \in [0+s, 7-s],$$

$$s = 3 \cdot 8 \cdot \Delta x,$$

где $\mathcal{D}$ – оператор разностной производной, а D – оператор непрерывной производной. Данное значение s связано с тем, что мы, в частности, будем 8 раз последовательно применять оператор первой разностной производной, и такое значение s позволяет гарантировано избежать появления ошибок приграничной природы. Полученные ошибки приведены в таблице 1.

Столбцы разделены по значениям шага Δx, строки – по типам применяемых операторов. Так, первые 8 строк соответствуют единичному применению оператора разностной производной соответствующего порядка по переменной x, строки с 9 по 12 – двойному применению оператора разностной производной соответствующего порядка по переменной x, и так далее. Строки с 18 по 25 отвечают попеременному вычислению первых разностных производных по указанным направлениям.

Таблица 1

Погрешность аппроксимации во внутренней области

Δx	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
I	7.0e-09	1.1e-10	1.7e-12	6.5e-14	1.1e-13	1.7e-13
II	1.7e-09	2.8e-11	2.8e-12	1.0e-11	4.1e-11	1.5e-10
III	1.3e-08	2.2e-10	1.4e-10	7.8e-10	9.7e-09	5.1e-08
IV	5.2e-09	7.2e-10	2.1e-08	2.8e-07	5.5e-06	6.8e-05
V	2.3e-08	1.7e-08	9.3e-07	2.1e-05	1.0e-03	2.1e-02
VI	2.9e-08	1.4e-06	1.6e-04	8.3e-03	6.8e-01	3.2e+01
VII	2.2e-07	2.6e-05	6.3e-03	5.7e-01	1.1e+02	9.3e+03
VIII	9.6e-06	2.7e-03	1.2e+00	2.4e+02	8.2e+04	1.5e+07
I(I)	1.4e-08	2.2e-10	4.0e-12	4.6e-12	1.8e-11	7.4e-11
II(II)	3.4e-09	7.7e-10	2.2e-08	2.9e-07	5.8e-06	7.1e-05
III(III)	2.8e-08	4.0e-07	3.9e-05	2.3e-03	1.7e-01	9.1e+00
IV(IV)	1.1e-05	3.2e-03	1.5e+00	2.7e+02	9.8e+04	1.8e+07
I(I(I))	2.1e-08	3.4e-10	6.0e-11	4.3e-10	4.5e-09	3.0e-08
II(II(II))	2.8e-08	1.7e-06	1.9e-04	9.2e-03	7.9e-01	3.7e+01
I(I(I(I)))	2.7e-08	5.3e-10	2.8e-09	4.9e-08	8.0e-07	1.3e-05
II(II(II(II)))	1.3e-05	3.6e-03	1.6e+00	3.1e+02	1.1e+05	2.0e+07
I(I(I(I(I)))))	4.0e-08	1.3e-07	9.1e-06	6.4e-04	4.5e-02	2.6e+00
x	7.0e-09	1.1e-10	1.7e-12	6.5e-14	1.1e-13	1.7e-13
xy	1.4e-08	2.2e-10	3.5e-12	1.7e-12	6.2e-12	2.6e-11
xyx	2.1e-08	3.3e-10	2.2e-11	1.6e-10	1.3e-09	1.1e-08
$xyxy$	2.7e-08	4.9e-10	1.0e-09	1.7e-08	2.9e-07	4.9e-06
$xyxyx$	3.5e-08	1.7e-09	5.5e-08	2.1e-06	6.8e-05	2.4e-03
$xyxyxy$	4.3e-08	4.6e-08	3.1e-06	2.5e-04	1.6e-02	1.1e+00
$xyxyxyx$	4.9e-08	1.3e-06	1.8e-04	2.8e-02	3.8e+00	4.9e+02
$xyxyxyxy$	1.4e-07	4.1e-05	1.1e-02	3.1e+00	8.8e+02	2.4e+05

Опишем наблюдаемые закономерности:

1. Первое, на что необходимо обратить внимание, что в любой строке, начиная с некоторого значения Δx, ошибка увеличивается, причем неограниченно. Это прямое следствие неравенства (7). Для нахождения

оптимального значения $\overline{\Delta x}$ из (9) необходимо знать $\max\limits_{x,y}|\varepsilon|$. Определим его приближенно с помощью таблицы 1. Для этого предположим, что в точке, где достигается максимум ошибки, неравенство (7) выполняется как равенство и что в сравнении с первым слагаемым все остальные слагаемые правой части пренебрежимо малы. Последнее в наибольшей степени справедливо для наименьшего Δx, поэтому рассмотрим последний столбец первой строки. Указанные предположения дают возможность найти максимальную оценку для искомой величины. По изложенным предположениям:

$$\max_{x_i,y_j}\left|\mathcal{D}_x^{(1,6)}(q+\varepsilon,x,y)-\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)\right| \approx \frac{4\,\max\limits_x|\varepsilon|}{\Delta x}\sum_{m=1}^{3}\left|a_m^{(1,6)}\right|,$$

$$\max_x|\varepsilon| \approx \frac{\Delta x}{4}\max_{x_i,y_j}\left|\mathcal{D}_x^{(1,6)}(q+\varepsilon,x,y)-\frac{\partial q}{\partial x}(x,y)\right| \Big/ \sum_{m=1}^{3}\left|a_m^{(1,6)}\right| \approx 2\cdot 10^{-16}.$$

Данное значение подтверждается и при рассмотрении других порядков производных.

Теперь определим значения $\overline{\Delta x}$ при помощи (9), принимая во внимание, что

$$\left|\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x,y)\right| \le 1 \Rightarrow b = \left|C^{(n,k)}\right|.$$

Приведем здесь необходимые для вычисления $\overline{\Delta x}$ величины. Получаем

Таблица 2

Значения $\overline{\Delta x}$ для внутренней области и величины, необходимые для его определения

	$\sum_{m=1}^{N/2}\left\|a_m^{(n,6)}\right\|$	$\left\|C^{(n,6)}\right\|$	$\overline{\Delta x}$	$f(\overline{\Delta x})$	max_err($\overline{\Delta x}$)
I	0.7(6)	0.0071	0.010525	6.8e-14	4.7e-14
II	1.5(1)	0.0018	0.026253	2.3e-12	2.1e-12
III	2.(3)	0.0136	0.034478	6.8e-11	4.9e-11
IV	8.5(3)	0.0054	0.061999	7.7e-10	4.5e-10
V	9.4930(5)	0.0230	0.072140	7.1e-09	4.8e-09
VI	45.8(6)	0.0115	0.110158	4.1e-08	2.9e-08
VII	40.858(3)	0.0360	0.119909	2.0e-07	1.4e-07
VIII	237.5(1)	0.0206	0.166246	7.6e-07	4.8e-07

Последний столбец таблицы 2 соответствует апостериорному значению максимума модуля ошибки, полученному при использовании оптимального шага $\overline{\Delta x}$.

Видно, что результаты таблицы 2 полностью согласуются с результатами, описанными в таблице 1. Заметим, что значения $\overline{\Delta x}$ и $f(\overline{\Delta x})$ были получены только исходя из формул (7) и (9), информация из таблицы 1, за исключением нахождения величины $\max\limits_{x,y}|\varepsilon|$, не использовалась.

Также справедливость оценки (7) подчеркивается значениями максимума модуля ошибки в строках 1-8 таблицы 1 в зависимости от шага Δx. Действительно, в этих строках наблюдается уменьшение ошибки как функции Δx^6 при $\Delta x > \overline{\Delta x}$ и увеличение ошибки как функции $1/\Delta x^n$ при $\Delta x < \overline{\Delta x}$.

2. Таблица 1 отражает и выполнение равенств (5) и (6). Так, строки 9-11, 13, 15, 17 первого столбца и 9, 15 второго столбца подтверждают справедливость равенства (6), а строки 19-23 первого столбца, 19, 20 второго столбца и 19 третьего столбца - справедливость равенства (5). Видно, что данные равенства применимы только для $\Delta x > \overline{\Delta x}$.

3. Для $\Delta x < \overline{\Delta x}$ в строках 9-17 и 19-25 выполняется аналог неравенства (7). Перейдем к его получению, предполагая, как и ранее, что значения функции $q(x)$ заданы с некоторой ошибкой $\varepsilon(x)$. Имеем

$$\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon,x_i,y),y_j\right)=\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x_i,y)+\mathcal{D}_x^{(n,k)}(\varepsilon,x_i,y),y_j\right)=$$

$$=\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x_i,y),y_j\right)+\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(\varepsilon,x_i,y),y_j\right).$$

Используя равенство (5), получаем следующую оценку ошибки для последовательного применения оператора разностной производной при вычислении смешанных производных:

$$\left|\mathcal{D}_y^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon,x_i,y),y_j\right)-\frac{\partial^{n+r}q}{\partial x^n\partial y^r}(x_i,y_j)\right|\le$$

$$\le\left(\frac{4}{\Delta y^r}\sum_{m=1}^{N(r)/2}\left|a_m^{(r,k)}\right|\right)\left(\frac{4}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N(n)/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|\right)\max_x|\varepsilon|+$$

$$+\left|C^{(n,k)}\right|\left|\frac{\partial^{n+k+r}q}{\partial x^{n+k}\partial y^r}(x_i,y_j)\right|\Delta x^k+\left|C^{(r,k)}\right|\left|\frac{\partial^{n+r+k}q}{\partial x^n\partial y^{r+k}}(x_i,y_j)\right|\Delta y^k+\cdots.$$

Аналог данного неравенства для последовательного применения оператора разностной производной только по одному направлению имеет вид

$$\left|\mathcal{D}_x^{(r,k)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon,x),x_i\right)-\frac{\partial^{n+r}q}{\partial x^{n+r}}(x_i)\right|\le$$

$$\leq \left(\frac{4}{\Delta x^r}\sum_{m=1}^{N(r)/2}\left|a_m^{(r,k)}\right|\right)\left(\frac{4}{\Delta x^n}\sum_{m=1}^{N(n)/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|\right)\max_x|\varepsilon| +$$

$$+\left(\left|C^{(n,k)}\right| + \left|C^{(r,k)}\right|\right)\left|\frac{\partial^{n+r+k}q}{\partial x^{n+r+k}}(x_i)\right|\Delta x^k + \cdots.$$

Описанный подход приводит и к более общему неравенству

$$\left|\mathcal{D}_{x[l]}^{(n,k)}(q+\varepsilon, x_i) - \frac{\partial^{nl}q}{\partial x^{nl}}(x_i)\right| =$$

$$= \left|\mathcal{D}_x^{(n,k)}\left(\ldots\left(\mathcal{D}_x^{(n,k)}(q+\varepsilon, x)\right), x_i\right) - \frac{\partial^{nl}q}{\partial x^{nl}}(x_i)\right| \leq \tag{10}$$

$$\leq \left(4\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|\right)^l \frac{\max_x|\varepsilon|}{\Delta x^{nl}} + l\left|C^{(n,k)}\right|\left|\frac{\partial^{nl+k}q}{\partial x^{nl+k}}(x_i)\right|\Delta x^k + \cdots.$$

Легко проверить, что неравенство (10) выполняется при $\Delta x < \overline{\Delta x}$ как для строк 9-17, так и 19-25 таблицы 1, поскольку в рассматриваемом примере $\Delta x = \Delta y$.

Рассмотрим теперь величины ошибок, получаемых в приграничной области:

$$\max_{x_i, y_j}|\mathcal{D}(q) - D(q)|, \qquad x_i, y_j \in [0, s) \cup (7-s, 7].$$

Соответствующие значения приведены в таблице 3.

Опишем наблюдаемые закономерности:

1. Из неравенства (8), являющегося аналогом неравенства (7) для приграничных узлов, следует, что, как и для случая внутренних точек, для приграничных точек существует оптимальный шаг $\overline{\Delta x(p)}$, зависящий от индекса p, при котором максимум ошибки будет минимален, и значение которого также можно определить аналитически. Справедливость неравенства (8) подчеркивается значениями строк 1-8 таблицы 3, из которых видно, что максимум ошибки уменьшается как функция Δx^6 при $\Delta x > \overline{\Delta x(p)}$ и увеличивается как функция $1/\Delta x^n$ при $\Delta x < \overline{\Delta x(p)}$.

2. Важно отметить, что для каждого типа производной и каждого значения шага сетки максимум ошибки в приграничной области больше, чем максимум ошибки во внутренней области (см. таблицу 1). Данное обстоятельство для строк 1-8 таблицы 3 объясняется неравенством (8).

Таблица 3

Погрешность аппроксимации в приграничной области

Δx	0.1	0.05	0.025	0.0125	0.00625	0.003125
I	1.4e-07	2.2e-09	3.5e-11	5.5e-13	6.9e-13	4.5e-13
II	2.6e-07	5.4e-09	1.3e-10	6.3e-11	9.2e-10	1.2e-09
III	1.8e-06	3.0e-08	4.8e-09	4.0e-08	7.3e-07	2.7e-06
IV	1.8e-06	1.0e-07	5.4e-07	1.6e-05	4.4e-04	4.3e-03
V	1.0e-05	4.9e-06	1.5e-04	5.2e-03	2.1e-01	5.4e+00
VI	9.5e-06	3.0e-04	2.9e-02	1.4e+00	8.7e+01	5.7e+03
VII	1.1e-04	1.5e-02	4.3e+00	3.4e+02	2.9e+04	5.2e+06
VIII	4.1e-03	5.3e-01	5.1e+02	6.5e+04	9.8e+06	4.0e+09
I(I)	5.7e-06	1.8e-07	5.8e-09	1.8e-10	6.0e-10	6.7e-10
II(II)	2.0e-04	1.7e-05	1.3e-06	7.4e-07	5.8e-05	2.4e-04
III(III)	1.0e-02	1.3e-03	2.2e-03	8.5e-02	3.1e+00	2.8e+02
IV(IV)	7.9e-02	1.2e-01	4.5e+01	9.1e+03	2.2e+06	5.8e+08
I(I(I))	1.5e-04	9.5e-06	6.0e-07	4.0e-08	2.6e-07	7.4e-07
II(II(II))	3.5e-02	1.2e-02	3.3e-03	9.0e-03	8.9e-01	3.7e+01
I(I(I(I)))	2.7e-03	3.4e-04	4.3e-05	6.2e-06	7.4e-05	5.6e-04
II(II(II(II)))	1.1e+00	1.5e+00	2.7e+00	3.1e+02	1.0e+05	2.0e+07
I(I(I(I(I))))	2.7e-01	1.3e-01	6.8e-02	4.2e-02	1.3e+00	7.1e+01
x	1.4e-07	2.2e-09	3.5e-11	5.5e-13	6.9e-13	4.5e-13
xy	2.8e-07	4.4e-09	7.0e-11	1.4e-11	1.1e-10	2.6e-10
xyx	5.7e-06	1.8e-07	5.8e-09	4.3e-09	3.8e-08	1.9e-07
$xyxy$	6.9e-06	2.2e-07	1.2e-07	1.6e-06	1.5e-05	1.4e-04
$xyxyx$	1.5e-04	9.6e-06	2.0e-05	3.6e-04	5.2e-03	8.7e-02
$xyxyxy$	3.0e-04	7.9e-05	2.2e-03	7.0e-02	3.6e+00	4.3e+01
$xyxyxyx$	2.7e-03	3.1e-03	2.0e-01	9.2e+00	2.2e+03	8.8e+04
$xyxyxyxy$	3.0e-03	1.0e-01	1.4e+01	1.1e+03	6.6e+05	4.0e+07

Действительно, отношение максимумов ошибок в приграничной и внутренней областях характеризуется для $\Delta x > \overline{\Delta x(p)}$ величиной

$$\gamma_1^{(n,k,p)} = \frac{\left|C^{(n,k,p)}\right|}{\left|C^{(n,k)}\right|},$$

а для $\Delta x < \overline{\Delta x(p)}$ – величиной

$$\gamma_2^{(n,k,p)} = \frac{\sum_{m=1}^{N^*-p}\left|a_m^{(n,k,p)}\right| + 2\sum_{m=1}^{p}\left|a_{m+N^*-p}^{(n,k,p)}\right|}{2\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|}.$$

В частности,

$$\gamma_1^{(n,k,0)} = \frac{\left|\sum_{m=1}^{N^*}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k,0)}m^{n+k}\right|}{2\left|\sum_{m=1}^{N/2}(-1)^{m+1}a_m^{(n,k)}[m^{n+k}-(m-1)^{n+k}]\right|},$$

$$\gamma_2^{(n,k,0)} = \frac{\sum_{m=1}^{N^*}\left|a_m^{(n,k,0)}\right|}{2\sum_{m=1}^{N/2}\left|a_m^{(n,k)}\right|}.$$

Значения данных величин для $k = 6$ приведены в таблице 4.

Таблица 4

Отношение погрешности аппроксимации в приграничной области к погрешности аппроксимации во внутренней области

	$\gamma_1^{(n,6,0)}$	$\gamma_2^{(n,6,0)}$	$\gamma_1^{(n,6,1)}$	$\gamma_2^{(n,6,1)}$	$\gamma_1^{(n,6,2)}$	$\gamma_2^{(n,6,2)}$
I	20	16.489	3.(3)	3.5543	1.(3)	1.5326
II	363	61.688	29	5.1728	5.(2)	1.25
III	144.05	202.65	0.0780	8.8143	1.6146	6.6268
IV	882.54	234.46	62	29.936	15.598	5.9438
V	446.95	795.83	59.432	160.65	5.0791	6.3213
VI	1.7e+3	574.04	328.96	150.34	5.5266	12.855
VII	1.0e+3	2.1e+3	240.64	664.44	23.077	115.65
VIII	3.0e+3	1.1e+3	855.88	408.21	138.10	98.120

Из нее следует, что максимум ошибки в приграничных точках практически всегда больше соответствующего максимума во внутренних точках. Причем максимальная ошибка, как правило, достигается именно на границе.

Значения первых двух столбцов таблицы 4 подтверждаются при сравнении первых восьми строк таблиц 1 и 3. Левая часть неравенства (8) при этом, как правило, не достигает своего максимума при $\Delta x < \overline{\Delta x(0)}$ в силу меньшего

количества точек на границе по сравнению с внутренней областью ($O(M)$ против $O(M^2)$), что приводит к меньшей выборке значений $\varepsilon(x)$. Дополнительные величины, необходимые для проверки данных утверждений приведены в таблице 5.

Таблица 5

Величины, необходимые для определения $\gamma_1^{(n,6,0)}$ и $\gamma_2^{(n,6,0)}$

	$\sum_{m=1}^{N^*} \left\lvert a_m^{(n,6,0)} \right\rvert$	$\left\lvert C^{(n,6,0)} \right\rvert$
I	25.283	0.1429
II	186.43	0.6482
III	945.72	1.9531
IV	4.0e+3	4.7862
V	1.5e+4	10.272
VI	5.3e+4	20.051
VII	1.7e+5	36.414
VIII	5.4e+5	62.454

3. Изучим теперь поведение ошибки в приграничной области при последовательном применении оператора разностной производной по одному направлению. Для этого рассмотрим функцию

$$\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x_i) = \begin{cases} \mathcal{D}_x^{(n,k,i)}(q,x_i), & i \in \mathcal{B}, \\ \mathcal{D}_x^{(n,k)}(q,x_i), & i \notin \mathcal{B}, \end{cases}$$

$$\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x_i) - \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i) = \begin{cases} C^{(n,k,i)} \dfrac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots, & i \in \mathcal{B}, \\ C^{(n,k)} \dfrac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_i)\Delta x^k + \cdots, & i \notin \mathcal{B}. \end{cases}$$

В пункте 2 было выяснено, что ошибка достигает своего максимума на границе области, поэтому сразу будем анализировать поведение ошибки в точке x_0. Имеем

$$\mathcal{D}_x^{(r,k,0)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x),x_0\right) = \frac{1}{\Delta x^r}\sum_{m=1}^{N^*(r)}(-1)^{m+1}a_m^{(r,k,0)} \times$$
$$\times \left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_m) - \frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_0) + C^{(n,k,m)}\frac{\partial^{n+k} q}{\partial x^{n+k}}(x_m)\Delta x^k - \right. \tag{11}$$

$$-C^{(n,k,0)}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_0)\Delta x^k+\cdots)=\frac{\partial^{n+r}q}{\partial x^{n+r}}(x_0)+$$

$$+\Theta(q,\Delta x)+C^{(r,k,0)}\frac{\partial^{n+r+k}q}{\partial x^{n+r+k}}(x_0)\Delta x^k+\cdots,\ \text{где}$$

$$\Theta(q,\Delta x)=\frac{\Delta x^k}{\Delta x^r}\sum_{m=1}^{N^*(r)}(-1)^{m+1}a_m^{(r,k,0)}\times$$

$$\times\left(C^{(n,k,m)}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_m)-C^{(n,k,0)}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_0)\right)=O(\Delta x^{k-r})$$

Видно, что полученный в результате порядок аппроксимации равен $k-r$, что существенно ниже порядка k, полученного в равенстве (6). Данное обстоятельство объясняется различием коэффициентов C в функции $\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x_i)$ для внутренних и приграничных точек. Действительно, если в равенстве (11) все коэффициенты $C^{(n,k,p)}$ были бы равны $C^{(n,k)}$, то в выражении для $\Theta(q,\Delta x)$ можно было бы вынести их за знак суммирования и в итоге получить выражение вида $O(\Delta x^k)$. Однако коэффициенты $C^{(n,k,p)}$ по определению не равны между собой и не равны $C^{(n,k)}$, следовательно, в данном случае для точек $[0,(N(n)+N(r))/2-1]\cup[M-(N(n)+N(r))/2,M-1]$ порядок аппроксимации будет равен $k-r$.

Равенство (11) подтверждается значениями строк 9, 10, 13, 15 таблицы 3 при $\Delta x>\overline{\Delta x(0)}$. Добавление к функции $q(x)$ ошибки $\varepsilon(x)$ приводит к привычному поведению максимума итоговой ошибки как функции вида $O(1/\Delta x^n)$ при $\Delta x<\overline{\Delta x(0)}$, что также легко видеть из строк 11, 12, 14, 16 таблицы 3.

4. Анализ получаемых ошибок в приграничных точках при последовательном использовании оператора разностной производной по различным направлениям при $\Delta x>\overline{\Delta x(0)}$ является чуть более сложным. Рассмотрим следующий оператор:

$$\mathcal{D}_y^{(r,k,*)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x_i,y),y_j\right).$$

Поскольку, согласно пункту 2, максимальная ошибка оператора разностной производной соответствует граничным точкам, максимальная ошибка данного оператора будет достигаться в одной из угловых точек рассматриваемой прямоугольной области. Причем

$$\mathcal{D}_y^{(r,k,0)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k,0)}(q,x_i,y),y_j\right)= \tag{12}$$

$$=\frac{\partial^r}{\partial y^r}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i,y)+C^{(n,k,0)}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_i,y)\Delta x^k+\cdots\right)(y_j)+$$

$$+C^{(r,k,0)}\frac{\partial^{r+k}}{\partial y^{r+k}}\left(\frac{\partial^n q}{\partial x^n}(x_i,y)+C^{(n,k,0)}\frac{\partial^{n+k}q}{\partial x^{n+k}}(x_i,y)\Delta x^k+\cdots\right)(y_j)\Delta y^k+\cdots=$$

$$=\frac{\partial^{n+r}q}{\partial x^n\partial y^r}(x_i,y_j)+C^{(n,k,0)}\frac{\partial^{n+k+r}q}{\partial x^{n+k}\partial y^r}(x_i,y_j)\Delta x^k+$$

$$+C^{(r,k,0)}\frac{\partial^{n+r+k}q}{\partial x^n\partial y^{r+k}}(x_i,y_j)\Delta y^k+\cdots,\qquad i,j=\{0,M\},$$

то есть при повторном применении оператора разностной производной по одной из переменных, как и в (11), итоговый порядок аппроксимации по этой переменной в приграничной области уменьшится. Несложно проверить, что и

$$\mathcal{D}_y^{(t,k,0)}\left(\mathcal{D}_x^{(l,k,0)}\left(\mathcal{D}_y^{(r,k,*)}\left(\mathcal{D}_x^{(n,k,*)}(q,x_i,y),y_j\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{\partial^{n+r+l+t}q}{\partial x^{n+l}\partial y^{r+t}}(x_i,y_j)+\Theta_2(q,\Delta x)+\Theta_3(q,\Delta y)+\cdots,\ \text{где} \tag{13}$$

$$\Theta_2(q,\Delta x)=O(\Delta x^{k-l}),\qquad \Theta_3(q,\Delta y)=O(\Delta y^{k-t}),\qquad i,j=\{0,M\}.$$

Равенства (12) и (13) полностью подтверждаются строками 19-21 таблицы 3 для $\Delta x>\overline{\Delta x(0)}$.

В качестве иллюстрации значений таблиц 1 и 3 приведем функцию ошибки для третьей производной, взятую вдоль прямой $y=\pi/2$ при различных шагах сетки Δx (рис. 1 и 2).

В заключение обсудим выбор способов вычисления производных порядка выше первого по одной переменной. Часто производные таких порядков возникают при введении в уравнения газовой динамики искусственной вязкости, необходимой для обеспечения устойчивости вычислительного алгоритма. К примеру, в данной работе для этой цели будут использоваться слагаемые вида $\varepsilon_a(\Delta x)^k\partial^k q/\partial x^k$ [Флетчер, 1991].

Как видно из таблицы 1, для внутренних точек области нет принципиальной разницы каким именно образом вычислять производные порядка выше первого: использовать ли для этого оператор разностной производной требуемого порядка или последовательно применять в различных комбинациях операторы разностных производных более низких порядков. Для приграничной области, как следует из таблицы 3, выводы не столь однозначны и сильно зависят от выбора Δx. Также необходимо учитывать, что при последовательном применении оператора разностной производной приграничная область, в которой, как было выяснено в (11), порядок аппроксимации существенно ниже, неизбежно расширяется.

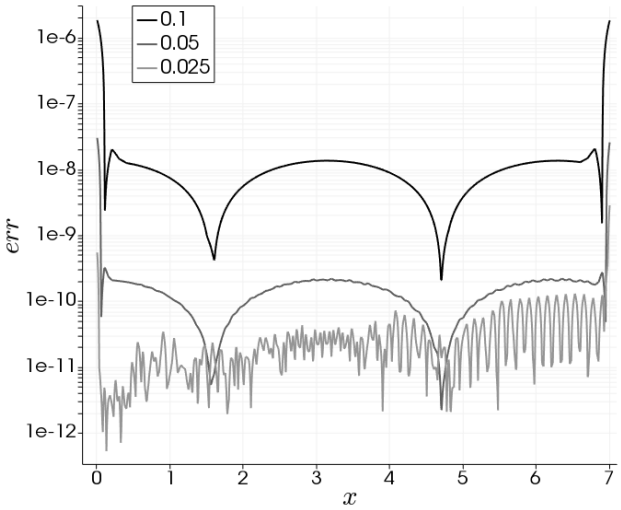

Рис. 1.

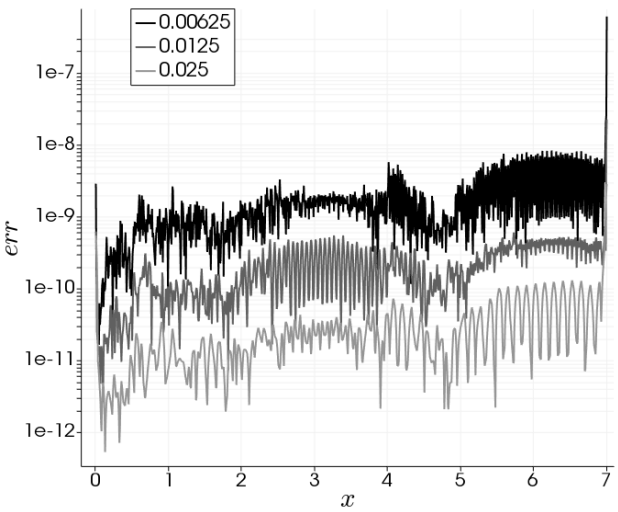

Рис. 2.

Таким образом, сделать однозначный вывод о том, какой способ вычисления производных порядка выше первого следует использовать, не представляется возможным, все зависит от выбранного шага Δx, порядка аппроксимации k и специфики уравнений. Для указанных выше членов искусственной вязкости было эмпирически получено, что при шагах $\Delta x \in [0.05; 0.025]$ и порядке аппроксимации $k = 6$ оптимальными с точки зрения устойчивости являются способы II(II(II))), II(IV) и IV(II) в терминологии таблиц 1 и 3. Любое использование для данной цели операторов разностных производных нечетных порядков приводило к неустойчивости, что можно объяснить тем, что производные в слагаемых $\varepsilon_a(\Delta x)^k \partial^k q/\partial x^k$ обязательно должны иметь четный порядок [Флетчер, 1991]. Неустойчивым оказалось и использование оператора разностной производной шестого порядка.

Функция ошибки для различных способов вычисления производных порядка выше первого, взятая вдоль прямой $y = \pi/2$ при $\Delta x = 0.025$, приведена на рис. 3 и 4. Так, рис. 3 соответствует вычислению производной четвертого порядка, а рис. 4 – вычислению производной шестого порядка. Некоторые кривые на данных рисунках обозначают сразу несколько способов вычисления производных. Это связано с тем, что кривые, соответствующие указанным способам, во внутренних точках (и только в них) являются очень близкими или даже совпадающими между собой и их отдельное представление теряет всякий смысл. Ввиду того, что функция ошибки соответствует прямой, проходящей через всю область, тот факт, что некоторые способы вычисления производных дают близкие или совпадающие функции, говорит о близости или совпадении при использовании данных способов итоговых коэффициентов при значениях функции $q(x_i)$ во внутренних точках x_i. Проверить аналитически данное утверждение довольно проблематично, но отсутствие других причин, объясняющих описанные закономерности, дает основания считать его верным.

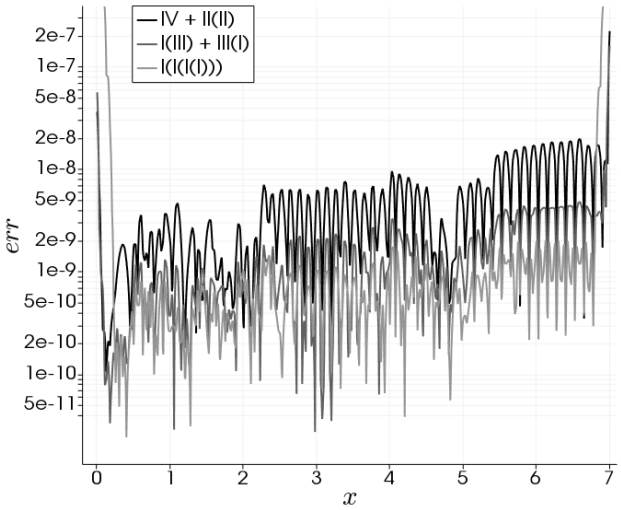

Рис. 3.

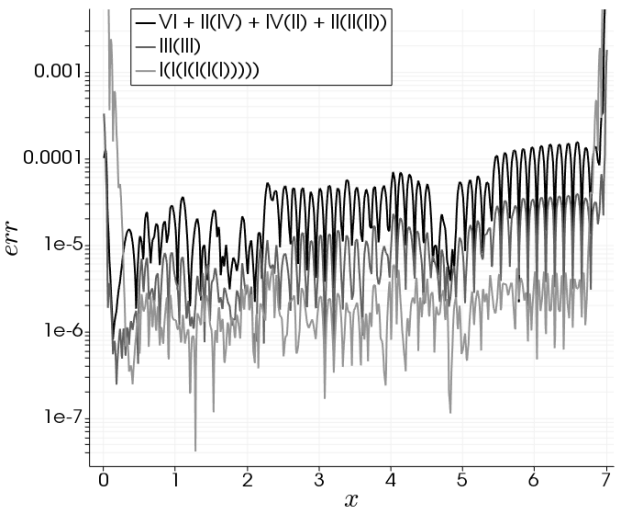

Рис. 4.

2. Математическая постановка задачи

Рассмотрим следующую двумерную область в декартовых координатах:

$$\Omega = \{(x,z) \mid 0 \le x \le L_x, H(x) \le z \le L_z\},$$

где $H(x) \ge 0$ – функция, соответствующая высоте рельефа над уровнем моря (рис. 5). Течение вязкой сжимаемой среды в этой области с учетом действия силы тяжести и влиянием теплопроводности описывается уравнениями ([Кочин, Кибель, Розе, 1963; Липанов, 2011])

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial \rho U}{\partial x} - \frac{\partial \rho W}{\partial z},$$

$$\frac{\partial \rho U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho U^2) - \frac{\partial}{\partial z}\rho U W +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial x}\mu\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \rho F_x,$$

$$\frac{\partial \rho W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\rho W U - \frac{\partial}{\partial z}(P + \rho W^2) + \tag{14}$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\mu\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\mu\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\mu\frac{\partial W}{\partial z} + \rho F_z,$$

$$\frac{\partial \rho E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}(P + \rho E)U - \frac{\partial}{\partial z}(P + \rho E)W +$$

$$+2\frac{\partial}{\partial x}\mu U\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\mu W\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\mu U\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) +$$

$$2\frac{\partial}{\partial z}\mu W\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\mu U\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\mu W\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial z}\lambda\frac{\partial T}{\partial z}+\rho(F_xU+F_zW),$$

$$\vec{F}=(0,-g),\qquad E=E_{int}+E_{kin},$$

$$E_{kin}=\frac{U^2+W^2}{2},$$

где ρ – плотность, $\vec{v}=(U,W)$ – скорость, P – давление, T – температура, E – удельная энергия, E_{int} – удельная внутренняя энергия, E_{kin} – удельная кинетическая энергия, μ – коэффициент вязкости, λ – коэффициент теплопроводности, $\vec{F}=(F_x,F_z)$ – удельная величина внешней массовой силы, g – ускорение свободного падения. Система (14) подразумевает, что все входящие в нее функции облазают достаточной гладкостью, то есть дифференцируемы по времени и пространству с необходимым порядком.

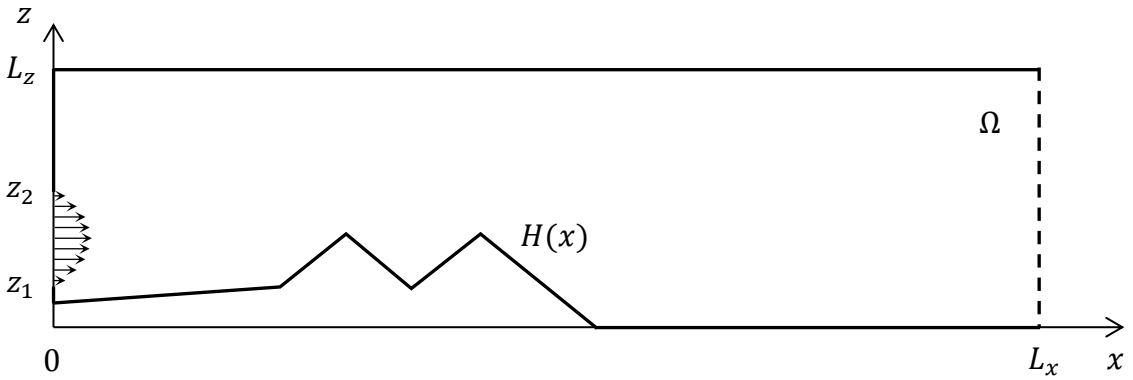

Рис. 5.

Для замыкания системы (14) будем использовать уравнение состояния идеального газа Клапейрона–Менделеева:

$$P=\frac{1}{V}\frac{m}{M}RT=\rho R_{sp}T, \tag{15}$$

где m – масса газа, заключенная в объеме V, M – молярная масса газа, R и R_{sp} – универсальная и удельная газовые постоянные соответственно.

Дополнительно для замыкания системы (14) необходимо ввести уравнение для удельной внутренней энергии E_{int}. Для этого, используя первое и второе начала термодинамики [Самарский, Попов, 1992; Сивухин, 1975], получим

$$dE_{int}=TdS-Pd\eta, \tag{16}$$

где S – энтропия, $\eta = V/m = 1/\rho$ – удельный объем. Данное равенство можно переписать в виде

$$d\Psi = d(E_{int} - TS) = -SdT - Pd\eta,$$

из которого следует, что

$$\frac{\partial \Psi}{\partial T} = -S, \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} = -P.$$

В предположении достаточной гладкости функции Ψ

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = -\frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial T}\right) = -\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}\right) = \frac{\partial P}{\partial T}.$$

Тогда уравнение (16) преобразуется к виду

$$dE_{int} = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}dT + \frac{\partial S}{\partial \eta}d\eta\right) - Pd\eta = T\frac{\partial S}{\partial T}dT + \left(T\frac{\partial P}{\partial T} - P\right)d\eta.$$

из которого с учетом (15) следует, что

$$dE_{int} = T\frac{\partial S}{\partial T}dT. \tag{17}$$

Согласно определению удельной теплоемкости при постоянном объеме C_V и первому началу термодинамики [Сивухин, 1975]:

$$C_V = \left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_V = \frac{\partial E_{int}}{\partial T},$$

где Q – количество теплоты, сообщенное единице массы газа. Тогда (17) преобразуется к виду

$$dE_{int} = C_V(T)dT.$$

Предположим, что удельная теплоемкость C_V не зависит от температуры. Тогда, опуская несущественную аддитивную постоянную, окончательно имеем [Кочин, Кибель, Розе, 1963; Ландау, Лифшиц, 1986]

$$E_{int} = C_V T. \tag{18}$$

Величину C_V также можно выразить через отношение теплоемкостей $K = C_P/C_V$, где C_P – удельная теплоемкость при постоянном давлении, и удельную газовую постоянную R_{sp}, используя соотношение Майера [Сивухин, 1975]:

$$C_P - C_V = R_{sp},$$

$$C_V = \frac{R_{sp}}{K-1}.$$

Приведем теперь систему (14), (15), (18) к безразмерному виду. Для этого достаточно задать набор из семи масштабных величин $(h, U_{sc}, P_{sc}, T_{sc}, g, \mu_{sc}, \lambda_{sc})$, где h соответствует характерной пространственной величине области, в которой решается задача, U_{sc} – максимуму продольной компоненты скорости, достигаемому внутри области, P_{sc} и T_{sc} – характерным давлению и температуре, g – ускорению свободного падения, μ_{sc} и λ_{sc} – характерным значениям коэффициентов вязкости и теплопроводности. Тогда, обозначая безразмерные переменные чертой сверху, получим

$$\overline{x} = \frac{x}{h}, \qquad \overline{z} = \frac{z}{h}, \qquad \overline{U} = \frac{U}{U_{sc}}, \qquad \overline{W} = \frac{W}{U_{sc}},$$

$$\overline{T} = \frac{T}{T_{sc}}, \qquad \overline{P} = \frac{P}{P_{sc}}, \qquad \overline{\vec{F}} = \frac{\vec{F}}{g}, \qquad \overline{\mu} = \frac{\mu}{\mu_{sc}}, \qquad \overline{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_{sc}}.$$

Безразмерные переменные времени, плотности и удельной энергии примут вид

$$\overline{t} = t\frac{U_{sc}}{h}, \qquad \overline{\rho} = \rho\frac{R_{sp}T_{sc}}{P_{sc}} = \frac{\rho}{\rho_{sc}}, \qquad \overline{E} = \frac{E}{U_{sc}^2}.$$

Полагая постоянными коэффициенты вязкости и теплопроводности и опуская черту над безразмерными переменными, окончательно приходим к системе ([Кочин, Кибель, Розе, 1963; Липанов, 2011])

$$\begin{gathered}
\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\partial\rho U}{\partial x} - \frac{\partial\rho W}{\partial z}, \\
\frac{\partial\rho U}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{P} + \rho U^2\right) - \frac{\partial}{\partial z}\rho UW + \\
+\frac{1}{\mathrm{Re}_{sc}}\left[2\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right)\right] + \frac{\rho F_x}{\mathrm{Fr}_{sc}}, \\
\frac{\partial\rho W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\rho WU - \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{P} + \rho W^2\right) + \\
+\frac{1}{\mathrm{Re}_{sc}}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial x}\right) - \frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial W}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial z}\right] + \frac{\rho F_z}{\mathrm{Fr}_{sc}}, \\
\frac{\partial\rho E}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\tilde{P} + \rho E\right)U - \frac{\partial}{\partial z}\left(\tilde{P} + \rho E\right)W +
\end{gathered} \tag{19}$$

$$+\frac{1}{\mathrm{Re}_{sc}}\left[2\frac{\partial}{\partial x}U\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}W\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial z}U\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial x}\right)\right.$$
$$+2\frac{\partial}{\partial z}W\frac{\partial W}{\partial z}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x}U\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)$$
$$\left.-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial z}W\left(\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial W}{\partial z}\right)\right]+$$
$$+\frac{1}{(K-1)\mathrm{Re}_{sc}\mathrm{M}_{sc}^2\mathrm{Pr}_{sc}}\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right)+\frac{\rho}{\mathrm{Fr}_{sc}}(F_xU+F_zW),$$

$$P=\rho T,\qquad E=\frac{U^2+W^2}{2}+\frac{1}{K-1}\frac{\tilde{P}}{\rho},$$

$$\tilde{P}=\frac{P}{K\mathrm{M}_{sc}^2},\qquad \vec{F}=(0,-1).$$

Здесь

$$\mathrm{M}_{sc}=\frac{U_{sc}}{C_{sc}},\qquad C_{sc}=\sqrt{\frac{KP_{sc}}{\rho_{sc}}},\qquad \mathrm{Re}_{sc}=\frac{\rho_{sc}U_{sc}h}{\mu_{sc}},$$

$$\mathrm{Fr}_{sc}=\frac{U_{sc}^2}{gh},\qquad \mathrm{Pr}_{sc}=\frac{C_P\mu_{sc}}{\lambda_{sc}}$$

соответствуют широко известным безразмерным величинам – числу Маха (M_{sc}), Рейнольдса (Re_{sc}), Фруда (Fr_{sc}) и Прандтля (Pr_{sc}).

Исходная двумерная область в безразмерных переменных примет вид:

$$\left\{(x,z)\,\middle|\,0\le x\le\frac{L_x}{h},\frac{H(x)}{h}\le z\le\frac{L_z}{h}\right\}$$

Обсудим теперь задание начальных и граничных условий, используя для простоты изложения уравнения (14) в размерных переменных с учетом всех описанных выше предположений.

Будем полагать, что в начальный момент времени среда во всех точках области покоится ($U=W=0$). Тогда система (14) преобразуется к виду

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial x}=0,$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}=-\rho g,$$

$$\frac{\rho R_{sp}}{K-1}\frac{\partial T}{\partial t} = \lambda\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right).$$

Предположим также, что в начальный момент времени температура во всех точках не меняется и ее распределение зависит только от координаты z:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0, \qquad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

Тогда

$$T = T_0 - kz, \tag{20}$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{g}{R_{sp}}\frac{P}{T_0 - kz}. \tag{21}$$

Формула (20) отражает линейное убывание температуры с высотой в среднем, действительно наблюдаемое в тропосфере, до 10-12 км от земной поверхности в умеренных широтах. Значение коэффициента k для умеренных широт варьируется в пределах от 0.005 до 0.0065 К/м [Кочин, Кибель, Розе, 1963; Хромов, Петросянц, 2006].

Интегрируя уравнение (21), получим

$$P = P_0\left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR_{sp}}}, \qquad \rho = \rho_0\left(1 - \frac{kz}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR_{sp}}-1},$$

где ρ_0, P_0 и T_0 – плотность, давление и температура на уровне моря ($z = 0$). В безразмерных переменных данные равенства принимают вид

$$\overline{P} = \overline{P_0}\left(1 - \frac{kh\overline{z}}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR_{sp}}}, \qquad \overline{\rho} = \overline{\rho_0}\left(1 - \frac{kh\overline{z}}{T_0}\right)^{\frac{g}{kR_{sp}}-1}.$$

На верхней и нижней границе области зададим условия

$$\frac{\partial T}{\partial z} = -k, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} = -\frac{g}{R_{sp}}\frac{P}{T},$$

аналогичные условиям (20) и (21). Скорость на верхней границе будет определяться, исходя из равенств

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\partial W}{\partial z} = 0,$$

на нижней – задаваться равенствами

$$U = W = 0.$$

Левую границу за исключением отрезка $[z_1, z_2]$ определим с помощью условий

$$U = W = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Участок $[z_1, z_2]$ левой границы соответствует втекающему потоку. Без учета сглаживающей функции граничные условия на нем имеют вид

$$U = U_l, \qquad W = 0,$$

$$T = T_l, \qquad \frac{\partial P}{\partial x} = 0.$$

Правая граница будет «свободной» с фиксированным распределением давления, определяемым начальными условиями. Решение в окрестности данной границы будет переноситься вдоль характеристики C^+ параллельно оси Ox.

3. Описание численного метода

Запишем систему (19) в виде

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \Pi(Q), \qquad Q = (\rho, \rho U, \rho W, \rho E)^T, \tag{22}$$

где П соответствующий векторный оператор, содержащий производные только по пространственным переменным.

Для численного решения данной системы будем использовать известную идею метода Лакса-Вендроффа о разложении получаемого решения в каждой точке в ряд Тейлора по степеням малого параметра Δt при переходе с n-го временного слоя на $(n+1)$-й [Липанов, Кисаров, Ключников, 2001; Роуч, 1980]:

$$Q(t_{n+1}) = Q(t_n) + \frac{\Delta t}{1!}\frac{\partial Q}{\partial t}(t_n) + \frac{(\Delta t)^2}{2!}\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2}(t_n) + \cdots, \qquad Q(t) = Q(\vec{x}, t). \tag{23}$$

Так как правая часть ряда (23) зависит только от значений функций на n-ом временном слое, получаемая разностная схема будет явной.

Для ее реализации необходимо вычислять значения производных по времени соответствующих порядков от функции Q на каждом временном шаге. Значение первой производной, согласно (22), совпадает со значением вектора $\Pi(Q)$, и поскольку оператор П содержит только пространственные производные, для вычисления $\Pi(Q)$ возможно применение метода, описанного в разделе 2.

С учетом (22), вторая производная по времени имеет следующий вид

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} = \frac{\partial \Pi(Q)}{\partial t}.$$

После необходимого числа преобразований вектора $\Pi(Q)$ по формуле Лейбница каждая его компонента станет равной сумме слагаемых вида

$$G_1 G_2 \dots G_l,$$

$$G_m = \frac{\partial^{r_{m,x}+r_{m,z}} F_m(Q)}{\partial x^{r_{m,x}} \partial z^{r_{m,z}}}\ ,\ \ m = \overline{1,l},\ \ r_{m,x}, r_{m,z} \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где $F_m(Q)$ – функционал, не содержащий операции дифференцирования. Применение оператора производной по времени к вектору $\Pi(Q)$ также после преобразований по формуле Лейбница в конечном итоге приведет к множителям вида

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^{r_{m,x}+r_{m,z}} F_m(Q)}{\partial x^{r_{m,x}} \partial z^{r_{m,z}}} = \frac{\partial^{r_{m,x}+r_{m,z}}}{\partial x^{r_{m,x}} \partial z^{r_{m,z}}} \frac{\partial F_m(Q)}{\partial t}.$$

Таким образом, выразив производную по времени от произвольного функционала $F(Q)$, не содержащего операции дифференцирования, через пространственные производные, мы сделаем возможным применение метода из раздела 2. Для этого достаточно применить правило дифференцирования сложной функции:

$$\frac{\partial F(Q)}{\partial t} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial t} = \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i} \Pi_i(Q).$$

Аналогично можно получить выражение и для третьей временной производной от функции Q. Для этого необходимо заметить, что

$$\frac{\partial^2 F(Q)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i} \frac{\partial Q_i}{\partial t}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i}\right) \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2} =$$

$$= \sum_{i=1}^{5} \sum_{j=1}^{5} \frac{\partial^2 F(Q)}{\partial Q_i \partial Q_j} \frac{\partial Q_j}{\partial t} \frac{\partial Q_i}{\partial t} + \sum_{i=1}^{5} \frac{\partial F(Q)}{\partial Q_i} \frac{\partial^2 Q_i}{\partial t^2}.$$

Таким образом, используя правило дифференцирования сложной функции, можно выразить временную производную функции Q любого порядка через

временные производные функции Q меньших порядков. А поскольку первая производная по времени, как было отмечено выше, имеет непосредственное выражение через пространственные производные, то производную по времени функции Q любого порядка можно выразить через пространственные производные и найти ее значение, используя метод, описанный в разделе 2.

Видно также, что повышение порядка временной производной неизбежно приводит к усложнению необходимых для ее вычисления формул. Вследствие этого сумму (23) вычисляют не полностью, задавая тем самым порядок аппроксимации по времени. С выражениями для производных по времени функции Q до третьего порядка включительно можно ознакомиться в [Липанов, 2011; Липанов, Кисаров, Ключников, 2001].

Опыт показывает [Карсканов, 2009], что для устойчивости описанной выше явной разностной схемы граничные условия должны аппроксимироваться в области шириной $k/2$ точек, где k – заданный порядок аппроксимации всех пространственных производных. Для этого в указанной области условия типа $q = const$ будем аппроксимировать, просто задавая соответствующие значения компонент вектора Q^*, где

$$Q^* = \left(U, W, \tilde{P}, T\right)^T,$$

$$U = \frac{\rho U}{\rho}, \qquad W = \frac{\rho W}{\rho},$$

$$\tilde{P} = (K-1)\left[\rho E - \frac{(\rho U)^2 + (\rho W)^2}{\rho}\right],$$

$$T = (K-1)\left[\frac{\rho E}{\rho} - \frac{(\rho U)^2 + (\rho W)^2}{\rho^2}\right],$$

а для аппроксимации условий вида $\partial q/\partial x = 0$ будем использовать экстраполяцию полиномом второй степени $p(x)$, который при $k = 6$ при должен удовлетворять следующим требованиям:

$$p'(x_0) = 0,$$

$$p(x_{k/2}) = q(x_{k/2}),$$

$$p(x_{k/2+1}) = q(x_{k/2+1}),$$

При $x_i = i\Delta x$ он имеет вид:

$$p(x) = \left(q_{k/2} - q_{k/2+1}\right)\frac{x^2 - x_{k/2}^2}{x_{k/2+1}^2 - x_{k/2}^2} + q_{k/2},$$

где $q_i = q(x_i)$.

Так как движение вдоль характеристики C^+ параллельно оси Ox предполагает движение со скоростью $U + C$, где U и C – локальные скорость среды вдоль оси Ox и скорость звука соответственно, для всех компонент вектора Q^*, кроме $\tilde{P}$, в правой приграничной области определим следующее правило изменения значений:

$$q(x_i, t) = \left(\frac{[U + C](x_{i-1}, t_0)}{\Delta x} t\right) q(x_{i-1}, t_0) + \left(1 - \frac{[U + C](x_{i-1}, t_0)}{\Delta x} t\right) q(x_i, t_0),$$

$$t \in \left[t_0, t_0 + \frac{\Delta x}{[U + C](x_{i-1}, t_0)}\right].$$

Для обеспечения устойчивости расчетов и устранения осцилляций численной природы в получаемом решении требуется введение искусственной вязкости. Для этой цели, следуя [Флетчер, 1991], добавим к правой части уравнения (22) слагаемое

$$(-1)^{k/2+1} \mu_a \left(\Delta x^k \frac{\partial^k Q}{\partial x^k} + \Delta z^k \frac{\partial^k Q}{\partial z^k}\right),$$

где μ_a – задаваемый коэффициент искусственной вязкости.

4. Результаты расчетов

Описанная в разделе 4 схема применялась для моделирования течения воздушных масс при новороссийской боре. Функция $H(x)$ была определена из открытых спутниковых данных EROS USGS [NASA, 2013] вдоль наиболее характерной траектории движения боры (рис. 6). Длина отрезка AB составляет 100 км, отрезка CD – 20 км. В данной работе вычисления были проведены только для участка CD, отрезок AB будет использоваться в дальнейшем и приведен здесь исключительно для иллюстрации направления будущих исследований.

Моделирование проводилось для новороссийской боры стокового типа [Новороссийская бора, 1959; Прох, 1983], соответствующей зимним погодным условиям. Для этого были заданы следующие начальные условия:

$$T_0 = 5\ °\text{C} = 278.15\ \text{К}, \qquad P_0 = 101325\ \text{Па}, \qquad U = W = 0\ \text{м/с}.$$

Остальные параметры задачи, за исключением граничных условий, имели вид:

$$K = 1.4, \qquad R_{sp} = 287.14\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)},$$

$$g = 9.81\ \text{м/с}^2, \qquad k = 6.5 \cdot 10^{-3}\ \text{К/м},$$

$$\mu = 1.72 \cdot 10^{-5}\ \text{Па} \cdot \text{с}, \qquad \lambda = 2.44 \cdot 10^{-2}\ \text{Вт/(м} \cdot \text{К)}.$$

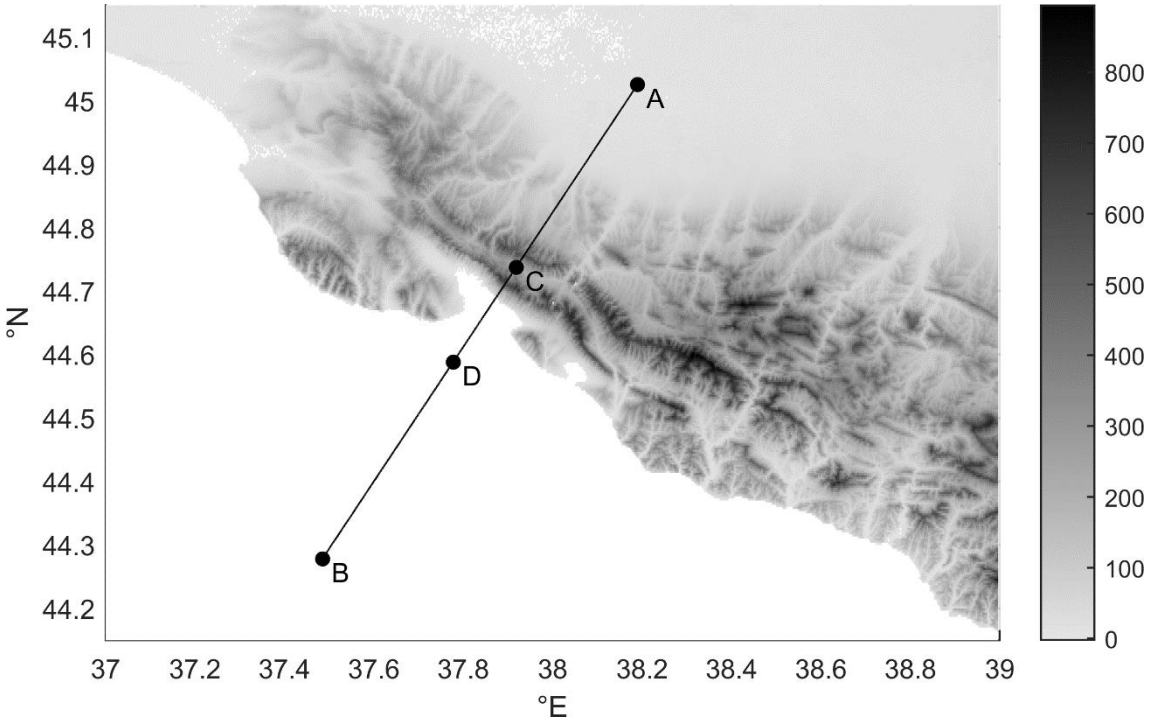

Рис. 6.

Размеры области и высоты нижней и верхней границы втекающего потока были равны:

$$L_x = 20 \text{ км}, \qquad L_z = 3 \text{ км}, \qquad z_1 = 0.4 \text{ км}, \qquad z_2 = 1 \text{ км}.$$

Для постановки задачи в безразмерных переменных использовались параметры:

$$h = 1000 \text{ м}, \qquad U_{sc} = 20 \text{ м/с},$$

$$T_{sc} = T_l, \qquad P_{sc} = P_0, \qquad \mu_{sc} = \mu, \qquad \lambda_{sc} = \lambda,$$

где T_l – температура втекающего потока.

В данной работе приведем два варианта расчетов, которые будут отличаться только значениями температуры T_l на левой границе. Так, в качестве граничных условий для первого расчета использовались

$$T_l = -5 \text{ °C} = 268.15 \text{ K}, \qquad U = 3 \text{ м/с}, \qquad W = 0 \text{ м/с}.$$

Разница температур в 10 °C между побережьем и верхними точками склона Маркотхского хребта является вполне обыкновенной при возникновении боры [Чайка и др., 2009]. Для второго расчета разница температур была увеличена до 15 °C, что также можно наблюдать в данных географических и климатических условиях [Прох, 1983].

Ясно, что такая постановка задачи несколько идеализирована, поскольку она содержит статические нестратифицированные граничные условия для температуры и скорости. Однако она полезна в качестве модельной задачи, демонстрирующей механизмы развитие боры без учета множества деталей.

Идеализация заключается и в двухмерности поставленной задачи, поэтому приведенные расчеты стоит расценивать только как один из шагов на пути к прямому численному моделированию исходного трёхмерного течения.

Для расчетов использовалась явная разностная схема 6-го порядка аппроксимации по пространству и 2-го порядка аппроксимации по времени. Величины шагов по пространству и времени и коэффициент искусственной вязкости были равны

$$\Delta\overline{x} = 0.033, \qquad \Delta\overline{t} = \mathrm{Cr}\,\mathrm{M}_{sc}\Delta\overline{x},$$

$$\mathrm{Cr} = C_{sc}\frac{\Delta t}{\Delta x} = \frac{1}{\mathrm{M}_{sc}}\frac{\Delta\overline{t}}{\Delta\overline{x}} \cong 0.135, \qquad \mu_a = 0.1,$$

$$\Delta x \cong 33\ \text{м}, \qquad \Delta t \cong 0.014\ \text{с},$$

где Cr – число Куранта [Самарский, 1977].

Результаты первого расчета приведены на рис. 7 и 9. Рис. 7 демонстрирует распределения скорости и температуры в размерных переменных в моменты времени $t = 1$ч, 2ч и 3ч. На рис. 8 приведены графики скорости и температуры для указанных моментов времени, взятые вдоль ломанной, изображенной на рис. 7а черным цветом и соответствующей приземному слою атмосферы после прохождения вершины хребта.

Из рис. 7 видно, что начальный поток с шириной 600 м и внутренней скоростью 3 м/с сужается к вершине хребта ($x \cong 3.5$) до 300 м, приобретая скорость 6 м/с. Далее, спускаясь вдоль наиболее крутой части склона ($x \in [3.5, 5.5]$), он приобретает максимальную скорость 12-15 м/с, после чего вследствие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца [Абакумов, Липанов, Попов, 2016; Шестакова, 2017] возникает зона активного перемешивания и сильных пульсаций ($x \in [5.5, 10]$). Скорость в данной зоне составляет 4 м/с в среднем, достигая в порывах 6-7 м/с. После этой зоны ($x > 10$) пульсации существенно сокращаются, скорость стабилизируется на значении около 3 м/с, наблюдается достаточно устойчивая температурная инверсия.

Как следует из рис. 8а, уменьшение высоты рельефа на участке [3.5, 8] и, следовательно, повышение давления в приземном слое атмосферы вызывает нагревание нисходящего потока приблизительно до 2 °С, что всего на 3 °С меньше исходной температуры. Таким образом, уже на расстоянии 4 км от подножия хребта течение достаточно установившееся и его параметры не свидетельствуют о возникновении экстремального ветра.

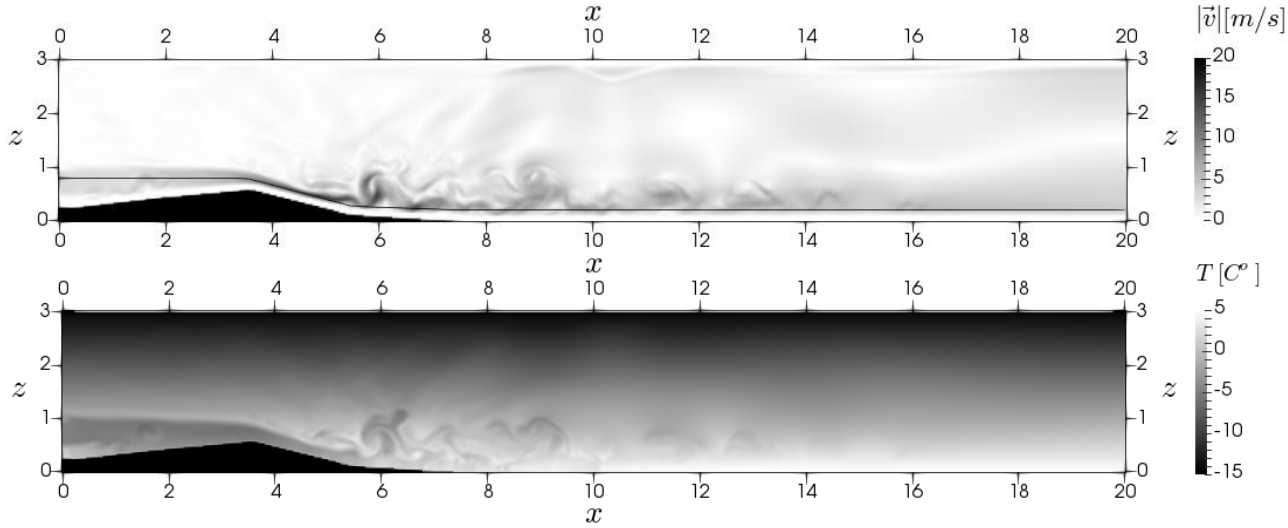

Рис. 7a. $T_l = -5$ °C, $t = 1$h.

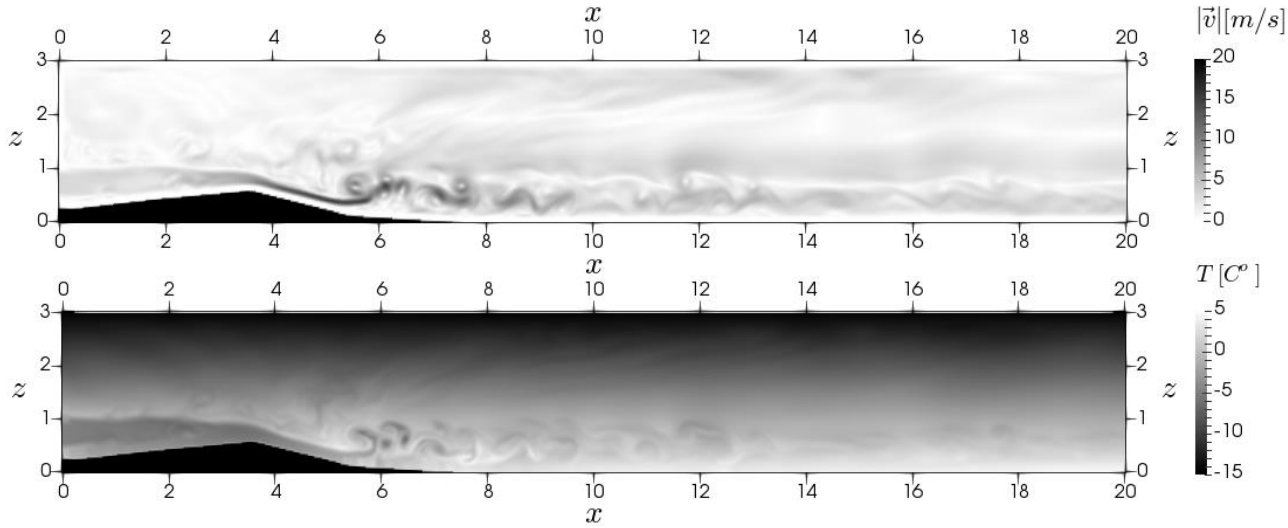

Рис. 7b. $T_l = -5$ °C, $t = 2$h.

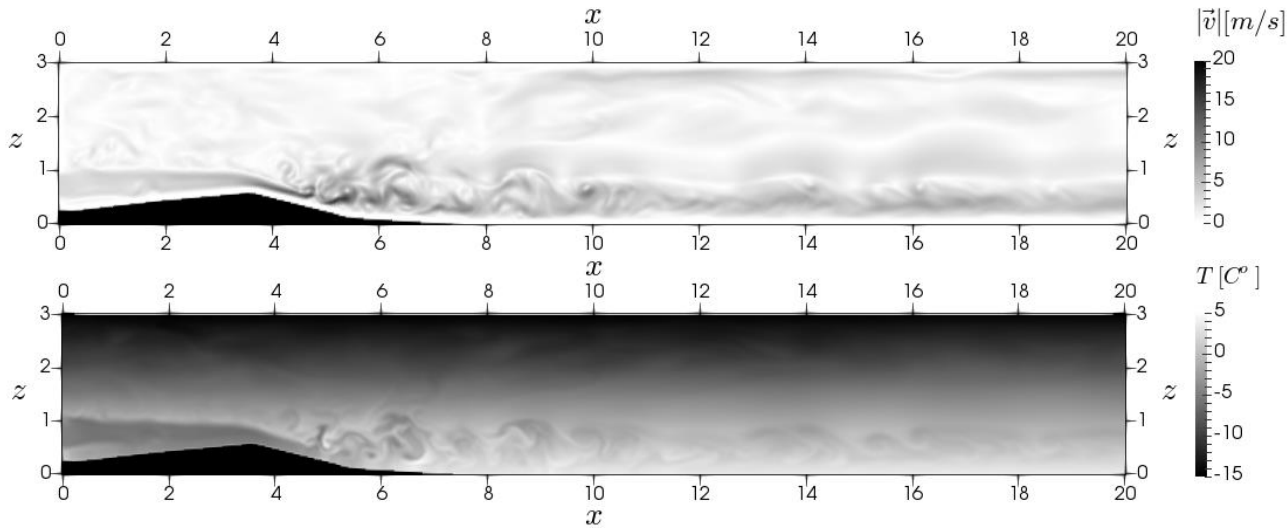

Рис. 7c. $T_l = -5$ °C, $t = 3$h.

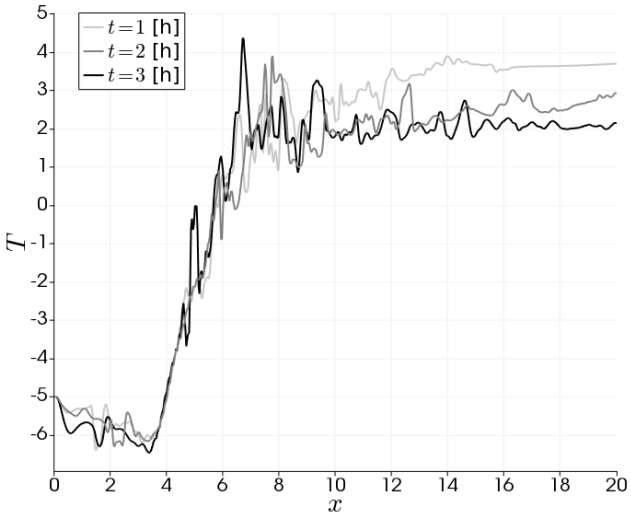

Рис. 8a.

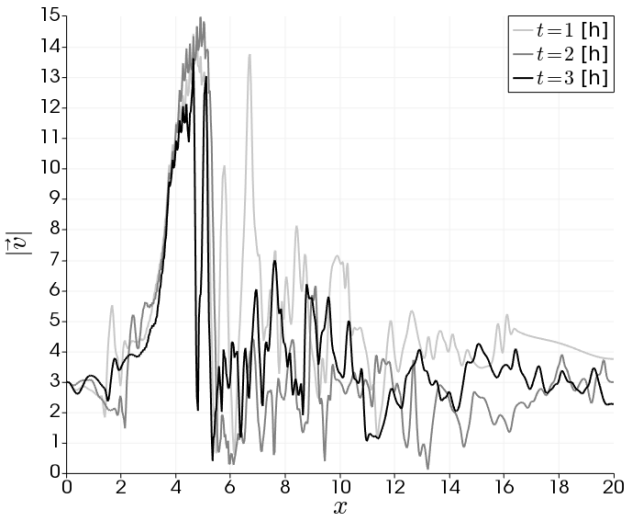

Рис. 8b.

На рис. 9 и 10 представлены результаты второго расчета. Видно, что во многом структура потока аналогична первому расчету. Размер зоны активного перемешивания остается приблизительно таким же, изменяются лишь характеристики течения. Так, вдоль склона поток ускоряется до 13-17 м/с, среднее значение скорости в зоне сильных пульсаций составляет 6 м/с, скорость в порывах – 8-10 м/с, скорость более стабильного участка – около 5 м/с. Температура в приземном слое на участке $x > 10$ опустилась на 6 °С и составила около -1 °С. Несмотря на существенное понижение температуры, в области $x > 10$ также не наблюдается возникновение экстремального ветра.

Полученные результаты согласуются с экспериментальными данными [Семенов, Соколихина, Соколихина, 2013]. В работе рассматриваются данные наземных ежедневных наблюдений за борой на метеостанции города Новороссийска за два десятилетия (1891 - 1900, 1998 - 2007 г.) в период с ноября по апрель, производится анализ характерных параметров потока для каждого типа боры. Для стоковой боры в период с 1998 по 2007 г. среднее падение температуры составило 4.7 °С, средний максимум зафиксированной скорости – 12.3 м/с. При сравнении результатов необходимо учитывать, что метеостанция располагается у подножия хребта на высоте около 40 м над уровнем моря, то есть соответствует зоне сильных пульсаций.

В работе также показано, что в сравнении с другими типами боры – фронтальной, внутримассовой и муссонной – стоковая бора является наиболее слабой, никогда не приводит к катастрофическим последствиям и, как правило, локализована над поверхностью склона и в узкой прибрежной зоне, что достаточно хорошо видно на рис. 8 и 10. Продолжительность стоковой боры по данным наблюдений составляет несколько часов.

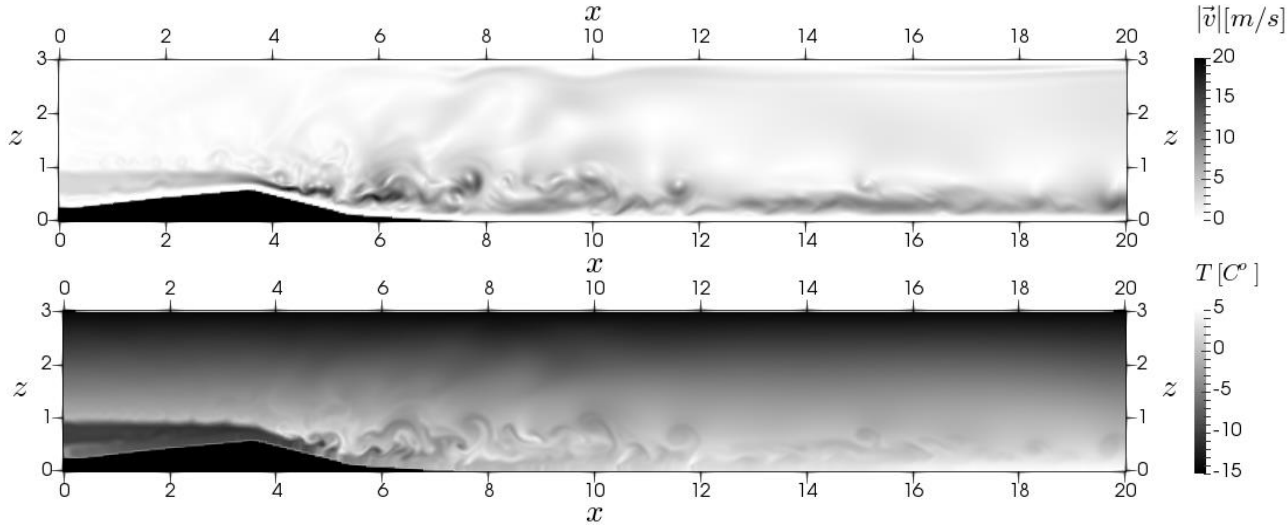

Рис. 9a. $T_l = -10$ °C, $t = 1$h.

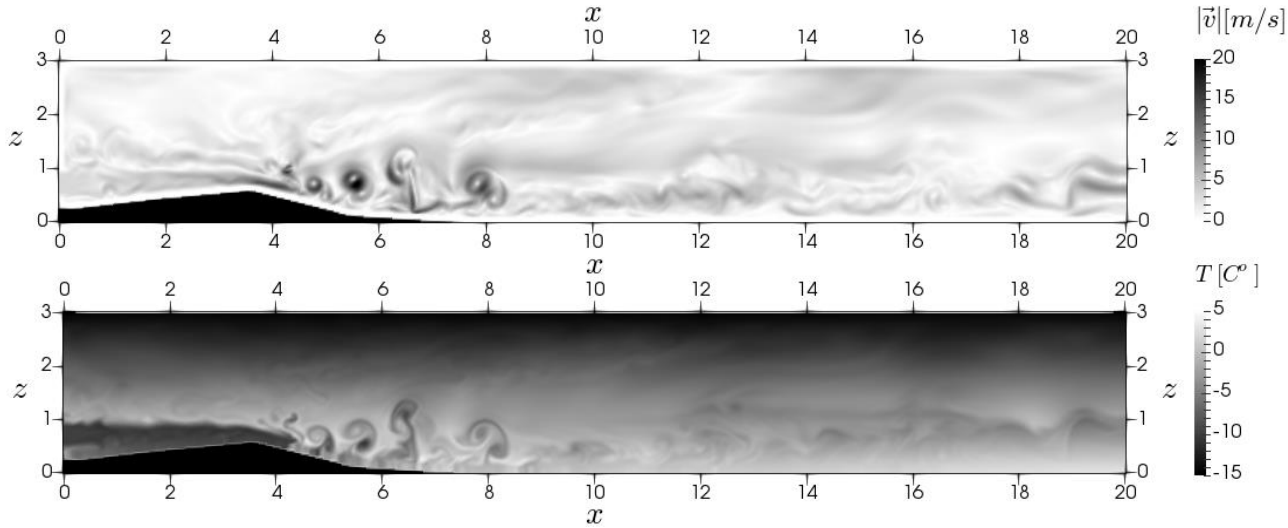

Рис. 9b. $T_l = -10$ °C, $t = 2$h.

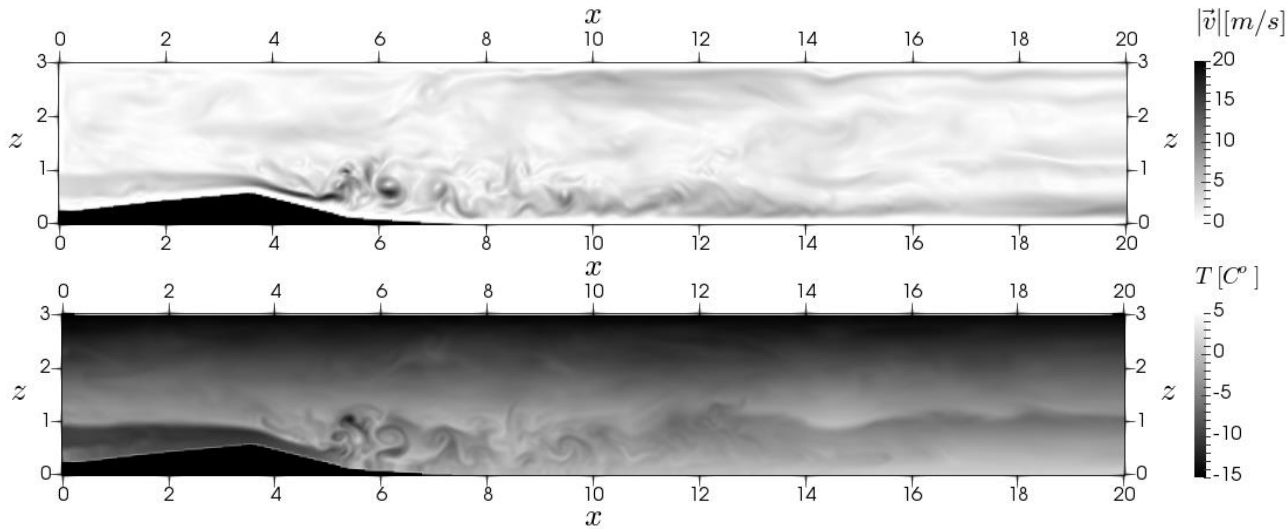

Рис. 9c. $T_l = -10$ °C, $t = 3$h.

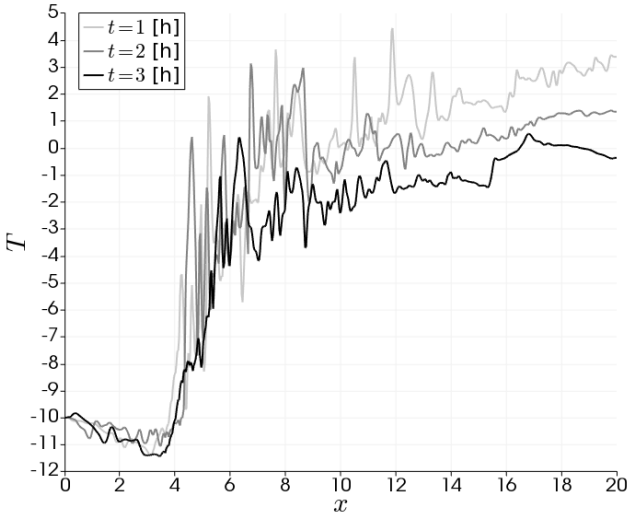

Рис. 10a.

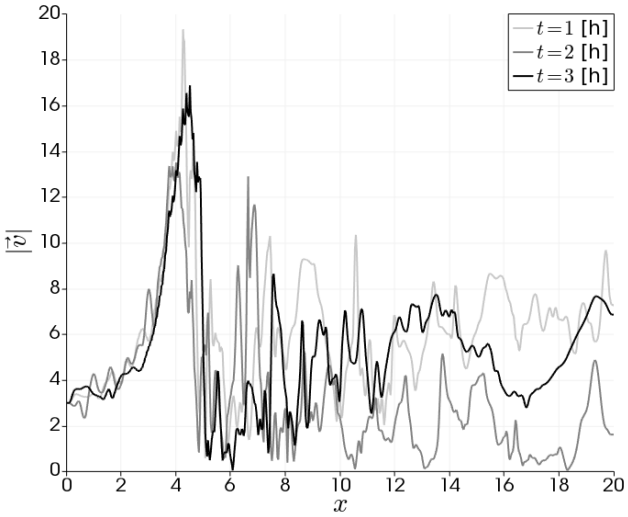

Рис. 10b.

Однако структура и характерные величины второго расчета несколько отличаются от результатов схожего расчета, приведенного в [Абакумов, Липанов, Попов, 2016], где при той же разнице температур в 15 °C и скорости втекающего потока в 10 м/с получена скорость ветра на уровне моря порядка 15 м/с в среднем и до 30 м/с в порывах при отсутствии зоны замедления потока. Причина этого состоит в некотором различии граничных условий и постановок задач. Действительно, в указанной работе ширина потока над вершиной хребта составляет 500 м, а температура во входном потоке стратифицирована с помощью коэффициента k, что в итоге приводит к разнице температур в 18 °C в верхней точке потока по сравнению с приземным слоем. Однако основными отличиями являются условие на нижней границе области и отсутствие рельефа. Так как в [Абакумов, Липанов, Попов, 2016] на нижней границе для горизонтальной компоненты скорости используется условие $\partial U/\partial z = 0$, поток в приземном слое сохраняет скорость, полученную под воздействием силы тяжести. Отсутствие замедления потока и приводит к столько большим скоростям. Отсутствие же рельефа и его замедляющего эффекта делает невозможным возникновение неустойчивости Кельвина-Гельмгольца в более высоких слоях атмосферы, что приводит к отсутствию выраженной зоны активного перемешивания и сильных пульсаций.

Заключение

Анализ описанного в разделе 2 метода вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком точности показал, что для любой производной, вычисляемой с помощью указанного метода, есть ненулевой минимум получаемой ошибки при вариации шага Δx. Величина данного минимума возрастает при увеличении порядка производной или требуемого порядка аппроксимации, а также увеличивается при приближении точки, в которой вычисляется производная, к границе в

приграничной области. Были проанализированы величины ошибок, получаемых при прямом или последовательном способе вычисления производных. Эмпирически было получено, что при вычислении искусственной вязкости вида $\varepsilon_a(\Delta x)^k \partial^k q/\partial x^k$ наиболее устойчивыми оказываются последовательные способы, использующие производные четных порядков, любое же использование производных нечетных порядков приводило к неустойчивости.

Явная разностная схема типа Лакса-Вендроффа, сформулированная в разделе 4, была применена для прямого численного моделирования новороссийской боры стокового типа. Получено соответствие результатов расчетов усредненным характеристикам данного явления, основанным на наблюдениях.

Список литературы

1. Абакумов М.В., Липанов А.М., Попов Ю.П. Математическое моделирование газодинамических течений, сопровождающих ветры бора // Математическое моделирование. 2016. Т. 28. № 6. С. 3–17.

2. Карсканов С.А. Прямое численное моделирование трехмерных течений газа в плоском канале с резким расширением: дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.02.05. Ижевск: , 2009. 127 с.

3. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2-х частях. 4-е изд. М.: Физматлит, 1963.

4. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т. VI. Гидродинамика. 3-е изд. М.: Наука, 1986. 736 с.

5. Липанов А.М. Теоретическая гидромеханика ньютоновских сред. М.: Наука, 2011. 550 с.

6. Липанов А.М., Кисаров Ю.Ф., Ключников И.Г. Численный эксперимент в классической гидромеханике турбулентных потоков. Екатеринбург: УрО РАН, 2001. 162 с.

7. Новороссийская бора. Под ред. А.М. Гусева / Тр. Морского гидрофизического института АН СССР. М.: Изд-во АН СССР, 1959. Вып. 14. 140 с.

8. Прох Л.З. Словарь ветров. Ленинград: Гидрометеоиздат, 1983. 312 с.

9. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 618 с.

10. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 656 с.

11. Самарский А.А., Попов Ю.П. Разностные методы решения задач газовой динамики. 3-е изд. М.: Наука, 1992. 424 с.

12. Семенов Е.К., Соколихина Н.Н., Соколихина Е.В. Синоптические условия формирования и развития новороссийской боры // Метеорология и гидрология. 2013. Т. 10. С. 16–28.

13. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том 2. Термодинамика и молекулярная физика. 2-е изд. М.: Наука, 1975. 552 с.

14. Флетчер К. Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2. Методы расчета различных течений. М.: Мир, 1991. 552 с.

15. Хромов С.П., Петросянц М.А. Метеорология и климатология: учебник. 7-е изд. М.: Изд. МГУ: Наука, 2006. 582 с.

16. Чайка А. и др. Экспедиционные исследования Новороссийской боры // Метеоспектр. 2009. № 2. С. 64–71.

17. Шестакова А.А. Подветренные бури при боре и фёне в различных регионах России: дис. … канд. геогр. наук: 25.00.30. Москва: , 2017. 144 с.

18. Allard R.A. и др. Validation Test Report for the Coupled Ocean/Atmosphere Mesoscale Prediction System (COAMPS) Version 5.0 // 2010.

19. Doyle J.D. и др. An Intercomparison of T-REX Mountain-Wave Simulations and Implications for Mesoscale Predictability // Mon. Weather Rev. 2011. Т. 139. № 9. С. 2811–2831.

20. Gohm A. и др. On the onset of bora and the formation of rotors and jumps near a mountain gap // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2008. Т. 134. № 630. С. 21–46.

21. Gohm A., Mayr G.J. Numerical and observational case-study of a deep Adriatic bora // Q. J. R. Meteorol. Soc. 2005. Т. 131. № 608. С. 1363–1392.

22. Grisogono B., Belušić D. A review of recent advances in understanding the meso- and microscale properties of the severe Bora wind // Tellus A. 2009. Т. 61. № 1. С. 1–16.

23. Gultepe I. Mountain Weather: Observation and Modeling // Adv. Geophys. 2015. Т. 56. С. 229–312.

24. Kahan W. IEEE Standard 754 for Binary Floating-Point Arithmetic [Электронный ресурс]. URL: https://people.eecs.berkeley.edu/~wkahan/ieee754status/IEEE754.PDF (дата обращения: 25.12.2017).

25. Kuzmić M. и др. Modeling the northern Adriatic double-gyre response to intense bora wind: A revisit // J. Geophys. Res. 2006. Т. 111. № C3. С. C03S13.

26. NASA. Shuttle Radar Topography Mission (SRTM) Version 3.0 [Электронный ресурс]. URL: https://dds.cr.usgs.gov/srtm/version2_1/SRTM3/Eurasia/ (дата обращения: 26.02.2018).

27. Sheridan P., Vosper S. High-Resolution Simulations of Lee Waves and Downslope Winds over the Sierra Nevada during T-REX IOP 6 // J. Appl. Meteorol. Climatol. 2012. Т. 51. № 7. С. 1333–1352.

28. Sun J. и др. Review of wave-turbulence interactions in the stable atmospheric boundary layer // Rev. Geophys. 2015. Т. 53. № 3. С. 956–993.

Оглавление

Введение 3

1. Описание и анализ метода вычисления пространственных производных произвольного порядка с любым наперед заданным порядком аппроксимации 5
2. Математическая постановка задачи 24
3. Описание численного метода 30
4. Результаты расчетов 33

Заключение 39

Список литературы 40