ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 60 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Колесниченко А.В.

К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Колесниченко А.В. К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 60. 44 с. doi:10.20948/prepr-2018-60
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-60

Ордена Ленина
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Российской академии наук

А.В. Колесниченко

К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи

Москва — 2018

Колесниченко А.В.

К разработке статистической термодинамики и техники фрактального анализа для неэкстенсивных систем на основе энтропии и различающей информации Реньи.

В работе показано, как можно получить равновесную статистическую термодинамику неэкстенсивных систем и определить её свойства на основе параметрических энтропии и различающей информации Реньи. Это исследование базируется на негиббсовом равновесном распределении, полученном из условия экстремума энтропии Реньи при заданности средней энергии системы, а также на осреднении её случайных динамических параметров по эскортному (нормированному) распределению, удобному при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Показано, что в микроканоническом ансамбле статистика Реньи эквивалентна статистике Больцмана−Гиббса. Выяснено, что временная эволюция замкнутой стохастической системы к равновесному состоянию зависит от знака параметра q, являющегося мерой неэкстенсивности статистической механики Реньи. Обсуждаются различные варианты построения размерностей разных порядков мультифракалав на основе энтропии и информации различия Реньи и проанализированы их особенности.

***Ключевые слова*:** энтропия Реньи, неэкстенсивная статистическая механика, различающая информация Реньи, фрактальная размерность.

Aleksandr Vladimirovich Kolesnichenko

To the development of statistical thermodynamics and technique of fractal analysis for non-extensive systems based on entropy and discrimination information of Renyi.

The article shows how one can obtain statistical thermodynamics of nonextensive systems and determine its properties on the basis of parametric entropy and discrimination information of Renyi. This exploration is based on not Gibbsian equilibrium distribution obtained from the extremum condition Renyi entropy, while preservation an average energy of the system, as well as on the averaging of its of random parameters over an escort (normalized) distribution, convenient when considering the chaotic, fractal and multifractal systems. It is shown that in the microcanonical ensemble the Renyi statistic is equivalent to Boltzmann−Gibbs statistics. It is found that the temporal evolution of a closed stochastic system to the equilibrium state depends on the sign of the parameter q, which is a measure of the nonextensivity of Renyi statistics. Discusses different ways of constructing measures different orders of multifractales on the basis of entropy and discrimination information of Renyi and analyzed their specifics.

***Keywords*:** Renyi entropy, nonextensive statistical mechanics, Renyi discrimination information, fractal dimension.

Введение

Исследования в области механики неэкстенсивных (неаддитивных) систем стали в последнее время предметом значительного интереса в связи с проявлениями неаддитивных свойств в аномальных физических явлениях. Это объясняется как новизной возникающих здесь общетеоретических проблем, так и важностью практических приложений (см. библиографию, представленную на сайте http:/tsallis. cat.cbpf.br/biblio.htm, которая постоянно обновляется). Начало систематического изучения в этом направлении связано с работой К. Тсаллиса (1988), в которой автором была введена параметрическая формула статистической q-энтропии

$$S_q^T\left(p\right)=\frac{k}{q-1}\left(1-\sum\nolimits_i^N p_i^q\right),\quad \sum\nolimits_i^N p_i=1,$$

зависящая от некоторого действительного числа q (так называемого параметра деформации) и обладающая неаддитивностью для совокупности независимых сложных систем. Теория неэкстенсивных систем, основанная на энтропии Тсаллиса, в настоящее время интенсивно развивается, к сожалению, в основном зарубежными специалистами. В научной литературе доступны систематизированные собрания обзоров, дающие последовательное изложение многочисленных новых результатов, полученных в ходе изучения неэкстенсивных свойств в аномальных физических явлениях (см., например, Tsallis, 1999; Abe, Okamoto, 2001; Grigolini и др., 2002; Kaniadakis и др., 2002, 2006; Sugiyama, 2004; Kaniadakis, Lissia, 2004**;** Gell-Mann, Tsallis, 2004; Swinney, Tsallis, 2004; Herrmann и др., 2004; Boon, Tsallis, 2005).

Определение энтропии Тсаллиса не является единственным примером деформированной энтропии. Фундаментом исследований в области неэкстенсивной статистики, проводимых в настоящее время, являются многочисленные (более 30) нелогарифмические энтропии и соответствующие им различающие информации (меры порядка и беспорядка). Их общая классификация, выполненная на основе группового подхода, приведена, например, в монографии Зарипова (2010), в которой автор, используя групповые свойства q-энтропий и q-информаций различия, строго доказал, что существует только четыре принципиально различных типа одно- и двух параметрических неэкстенсивных статистик. В работах (Landsberg, Tranah, 1980; Taneja,1989, 1995) дана классификация возможных типов статистик, основанных как на классической энтропии Больцмана−Гиббса, так и на различных обобщениях энтропии Тсаллиса. Это статистики основанные на:

- классической энтропии Больцмана−Гиббса

$$S^{BG}(p) = -k\sum_i^N p_i \ln p_i \,,$$

- энтропии Тсаллиса

$$S_q^T(p) = \frac{k}{q-1}\left(1 - \sum_i^N p_i^q\right),$$

- энтропии Лансберга−Ведрала

$$S_q^{LV}(p) = \frac{k}{q-1}\left[\left(\sum_i^N p_i^q\right)^{-1} - 1\right],$$

- энтропии Реньи

$$S_q^R(p) = \frac{k}{1-q}\ln\left(\sum_i^N p_i^q\right),$$

(играющей центральную роль в определении фрактальной размерности) и на соответствующих им однопараметрических различающих информациях, а именно на:

- информации различия Кульбака−Лейблера

$$K^{KL}(p\,||f) = k\sum_i^N\left(\ln\frac{p_i}{f_i}\right)p_i \,,$$

- информации различия Ратье−Канаппана

$$K_q^{RK}(p\,||\,f) = \frac{k}{q-1}\left(1 - \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}\right),$$

- информации различия Лансберга−Ведрала

$$K_q^{LV}(p\,||\,f) = \frac{k}{q-1}\left[1 - \left(\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}\right)^{-1}\right],$$

- информации различия Реньи

$$K_q^R(p\,||\,f) = \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q} \;.$$

Поскольку приведенные выше параметризованные энтропии сами по себе являются очень информативными понятиями, количественно характеризующими состояние сложных систем, то результаты работ (Реньи,1961,1970; Тсаллиса,1988, 2001; Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Landsberg, Ve-

dral, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Зарипов, 2006) явились значительным шагом в развитии теоретико-информационного подхода и при разработке принципов неэкстенсивной статистической механики и равновесной термодинамики открытых систем (см., в частности, Lenzi и др., 2000; Рудой, 2003; Zaripov, 2005; Parvan, Biro, 2005; Башкиров, 2006; Колесниченко, Четверушкин, 2014; Колесниченко, 2013, 2016, 2018 a,b; Kolesnichenko, Marov, 2014). При этом важно отметить, что диапазон применения этих и многих других неэкстенсивных параметрических энтропий в настоящее время постоянно расширяется, охватывая различные направления в науке, такие как космология и космогония, теория плазмы, квантовая механика и статистика, нелинейная динамика и фракталы, геофизика, биомедицина и многие другие (Sharma, Mittal, 1977; Taneja, 1989, 1995; Landsberg, Vedral, 1998; Landsberg 1999; Frank, Plastino, 2002; Зарипов, 2006).

Среди всех сложных систем особую важность имеют системы фрактальной природы. Идея исследования фракталов на основе меры Хаусдорфа принадлежит Б. Мандельброту (Mandelbrot, 1975, 1977, 1982; Мандельброт, 2002). Им были получены нетривиальные результаты и построена соответствующая математическая теория. При этом центральная роль в определении фрактальной размерности была отведена энтропии Реньи (Renyi,1961,1970). В настоящее время интерес к изучению свойств фрактальных множеств на основе энтропии Реньи продолжает расти (см. Johal, Rai, 2000; Tsallis, 1995). Обзор уже полученных важных результатов можно найти, в частности, в работах (Шредер, 2001; Божокин, Паршин, 2001; Tsallis, 2002).

Справедливости ради, следует отметить исключительную роль А. Реньи и в становлении неэкстенсивной статистической механики, который в работах (1961,1970), в отличие от классической статистики и теории информации, основанных на энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона, впервые ввёл в рассмотрение параметрическую q-энтропию и соответствующую ей различающую информацию[1)]. Тем самым, А. Реньи предложил ясную формулу связи между энтропией и континуумом мультифрактальных размерностей, указав достаточно универсальный путь к решению проблемы фрактальной параметризации (см. Mandelbrot, 1974, 1975, 1977, 1982; Beck, Schlögl, 1993; Grassberger,1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984; Halsey и др.,1986; Hentschel, Procaccia,1983; Федер,1991; Смирнов, 1991; Beck, Schlogl, 1993; Кроновер, 2000; Шредер, 2001; Божокин, Паршин, 2001; Мандельброт, 2002; Потапов, 2005; Зарипов, 2002, 2010; Jizba, Arimitsu, 2004; Чумак, 2012). В дальнейшем функционалы Реньи сыграли важнейшую роль не только в физике фракталов

[1)] Эти меры Реньи при $q=1$ преобразуются в традиционную энтропию Больцмана–Гиббса и информацию различия Кульбака–Лейблера

и в теории информации, но и в различных областях статистической механики, описывающих динамические свойства нелинейных сложных систем. Последнее связано с тем, что между теорией фракталов, опирающейся на геометрию и теорию размерности, с одной стороны, и теорией хаоса, являющейся развитием теории динамических систем, существует тесная связь.

Важным преимуществом неэкстенсивной статистики Реньи является наличие степенной функции распределения вероятностей, появляющейся (при максимизации энтропии) вместо экспоненциальной функции распределения классической статистики Гиббса. Её использование привело к значительному прогрессу, связанному с исследованиями ряда аномальных физических процессов, например, в ядерной физике (Nagy, Romera, 2009), в теории черных дыр (Bialas, Czyz, 2008), при изучении фрактальных и мультифрактальных систем в космологии (Peebles, 1980; Mandelbrot, 1977, 1982; Колесниченко 2016), при производстве частиц высоких энергий (Kropivnitskaya, Rostovtsev, 2003) и т.п.

Вместе с тем, обобщённая термодинамика, основанная на энтропии Реньи, в отличие от термодинамики Тсаллиса (см., например, Kolesnichenko, Marov, 2014; Колесниченко, 2013, 2016, 2018a,b,c), всё ещё не нашла достойного применения при феноменологическом моделировании ряда космогонических явлений. Так, например, при моделировании формирования протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке с учётом фрактальных представлений о свойствах пылевых кластеров в космической аэродисперсной среде, в работах (Kolesnichenko, Marov, 2013; Колесниченко, Маров, 2014) была использована гидродинамическая модель для фрактальной среды (Tarasov, 2005, 2010), для которой существуют точки и области, не заполненные её частицами. Гидродинамическое моделирование подобной среды, обладающей нецелой фрактальной размерностью, было проведено в рамках дробно-интегральной модели (её дифференциальной формы), использующей для учёта фрактальности дробные интегралы, порядок которых определяется массовой размерностью фрактальных пылевых кластеров. К сожалению, универсальные законы термодинамики, основанной на энтропии Реньи (как меры хаоса) и взаимодополняющие её методы фрактального анализа, обосновывающие технику построения дробных мер (мер структурной упорядоченности) фракталов для сложных нелинейных систем, не были привлечены к замыканию обобщённых гидродинамических уравнений Навье−Стокса для фрактальных сред. Это объясняется тем, что, на тот момент времени, эти на первый взгляд столь противоположные научные направления, совокупно описывающие процессы эволюции фрактальных сред, не были разработаны в достаточно близком соотнесении между собой.

В связи с этим обстоятельством, данная работа посвящена конструированию (на основе параметрических энтропии и различающей информации Реньи) статистической термодинамики неэкстенсивных систем и разработке техники получения мультифрактальных размерностей (с определением их свойств), выполненных с учетом их взаимосвязи. Этот подход базируется на негиббсовом равновесном распределении состояний, полученном из условия экстремума энтропии Реньи при заданности осреднённых динамических параметров, характеризующих аномальную систему, а также на осреднении этих параметров по эскортному (нормированному) распределению, удобному при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных сред. Полученные при этом основные термодинамические соотношения аналогичны соотношениям классической статистической термодинамики для замкнутых и открытых систем. Обсуждаются различные варианты построения мер (разных порядков) фракталов и мультифракталов на основе энтропии и информации различия Реньи и основные неравенства для полученных размерностей. На базе двухпараметрической различающей информации рассмотрен перспективный подход к моделированию мультифрактальных мер с двумя характерными масштабами длины.

При написании данной статьи автор существенно опирался на работы (Кульбак,1967; Beck, Schlogl, 1993; Abe; 2000; Шредер,2001; Tsallis, 2001; Зарипов,2002, 2010). В этом ряду особое место занимают исследования Р.Г. Зарипова, в которых впервые в мировой научной литературе было проведено совместное теоретико-информационное рассмотрение динамических и информационных процессов в сложных системах, а также широко представлены различные информационные стороны происходящих в них процессов необратимости, самораспада и самоорганизации.

1. Некоторые статистические характеристики энтропии и различающей информации Реньи

При аксиоматическом подходе теории вероятностей (Хинчин,1953; Фадеев,1956), для объекта (системы, процесса), который имеет дискретные случайные состояния, в работах (Havrda, Charvat, 1967; Daroczy, 1970; Rathie, Kannappan, 1972) на базе основополагающих работ (Renyi,1961, 1970) даётся строгий вывод следующих функционалов: однопараметрической q-энтропии $S_q^R(p)$ Реньи для дискретного распределения вероятностей $p_i \geq 0$ [2)]

[2)] В отличие от принятых в теории информации функционалов, в данной работе используются энтропия и различающая информация Реньи статистической физики, имеющие размерность постоянной Больцмана.

$$S_q^R(p)=\begin{cases}\dfrac{k}{1-q}\ln\sum_i^N p_i^q, & q\neq 1;\\ -k\sum_i^N p_i\ln p_i, & q=1,\end{cases} \tag{1}$$

и различающей информации Реньи (меры информации в состоянии с распределением $0<p<\infty$ относительно состояния с распределением $0<f<\infty$)

$$K_q^R(p\,||\,f)=\begin{cases}\dfrac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}, & q\neq 1;\\ k\sum_i^N\left(\ln\dfrac{p_i}{f_i}\right)p_i, & q=1,\end{cases} \tag{2}$$

которые зависят от действительного параметра q, изменяющегося в допустимых пределах (сразу заметим, что в случае фрактальной системы параметр q связан с её фрактальной размерностью (см. Федер, 1991)). Здесь k – постоянная Больцмана, N – число возможных состояний статистического объекта; $p=\{p_1,...,p_N\}$ и $f=\{f_1,...,f_N\}$ – распределения вероятностей, удовлетворяющие условию вероятностной нормировки $\sum_i^N p_i=1$ и $\sum_i^N f_i=1$. Свойства этих функций были строго обоснованы в работах (Mandelbrot,1974; Hentschel, Procaccia, 1983).

Покажем, что в пределе слабой связи $q\to 1$ энтропия Реньи $S_q^R(p)$ совпадает с энтропией Больцмана–Гиббса–Шеннона $S_1^R=S(p)\equiv -k\sum_i^N p_i\ln p_i$ (см. Зубарев, 1971), а функционал $K_q^R(p\,||\,f)$ совпадает с различающей информацией Кульбака–Лейблера $K_1^R(p\,||\,f)=K^{KL}(p\,||\,f)\equiv k\sum_i^N\left(\ln\dfrac{p_i}{f_i}\right)p_i$ (см. Kullback, Leibler, 1951; Кульбак, 1967). Действительно, разложение суммы $\Gamma_q(p)\equiv\sum_i^N p_i^q$ по параметру $\varepsilon\equiv q-1$ показывает, что при $\varepsilon\to 0$ имеет место следующее приближенное равенство

$$\Gamma_q(p)\equiv\sum_i^N p_i^q=\sum_i^N p_i^{1+\varepsilon}=\sum_i^N p_i\exp(\varepsilon\ln p_i)\approx$$

$$\approx \sum_i^N p_i (1+\varepsilon \ln p_i) = 1+\varepsilon \sum_i^N p_i \ln p_i .$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon\to 0} S_{\varepsilon+1}^R(p) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{-\frac{k}{\varepsilon}\ln\left(1+\varepsilon\sum_i^N p_i \ln p_i\right)\right\} \approx -k\sum_i^N p_i \ln p_i = S_1^R(p) \equiv S(p).$$

Аналогичное доказательство легко провести и для различающей информации Реньи

$$\lim_{\varepsilon\to 0} K_{\varepsilon+1}^R(p\|f) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\frac{k}{\varepsilon}\ln\left[1+\varepsilon\sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{f_i}\right)\right]\right\} \approx$$

$$\approx k\sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{f_i}\right) = K^{KL}(p\|f).$$

Пусть рассматриваемая статистическая система с мерой Реньи реализуется двумя множествами: множеством всех состояний системы, описываемых распределением вероятностей $p=\{p_1,...,p_N\}$, и множеством параметров $A(p)=\{A_1,...,A_N\}$, характеризующих систему. Будем далее считать, что средневзвешенное каждой случайной величины A в состоянии с распределением p определяется по формуле[3)]

$$\langle A\rangle_q = \sum_i^N A_i \mathcal{P}_i(q) = \Gamma_q^{-1}(p)\sum_i^N A_i\, p_i^q , \qquad (3)$$

где

$$\Gamma_q(p) \equiv \sum_i^N p_i^q = \exp\left\{k^{-1}(1-q)S_q^R\right\} \qquad (4)$$

[3)] В связи с определением средневзвешенного значения случайной величины A отметим следующее: в неэкстенсивной статистике Реньи возможны три способа осреднения по распределениям: p_i, p_i^q, $\mathcal{P}_i$ (см. Bibliography/ http://tsallis.cat.cbpf. br/biblio.htm). Эти способы осреднения, каждый из которых имеет свои преимущества и недостатки, определяют совершенно разные q-термодинамики, соответствующие тем или иным статистически аномальным системам. По этой причине выбор осреднения в физических приложениях носит принципиальный характер, поскольку он оказывается существенным при обработке экспериментальных данных (см.Tsallis и др., 1998; Tsallis, 1999; Martinez и др., 2000; Parvan, Biro, 2005; Башкиров,2006).

− так называемая обобщённая статистическая сумма; $\mathcal{P}_i(q) = p_i^q / \Gamma_q(p)$ − эскортное (нормированное) распределение (см. Abe, 2000), которое обычно используется при рассмотрении хаотических, фрактальных и мультифрактальных систем. Заметим, что при $p_i \equiv 1$ из (3) следует привычное определение среднего арифметического $\langle A \rangle_q = N^{-1} \sum_i^N A_i$. Легко показать, что распределения p_i и $\mathcal{P}_i$ могут быть записаны в следующих эквивалентных формах

$$p_i = \mathcal{P}_i^{1/q} \left[\Gamma_q(p) \right]^{1/q} = \mathcal{P}_i^{1/q} / \sum_i^N \mathcal{P}_i^{1/q}, \quad \mathcal{P}_i(q) = p_i^q \exp\left\{ k^{-1}(q-1) S_q^R(p) \right\},$$

$$S_q^R(\mathcal{P}) = -\frac{k}{1-q} \ln \left\{ \sum_i^N \mathcal{P}_i^{1/q} \right\}^q, \quad k \ln \Gamma_q(p) = (q-1) S_q^R(p).$$

Приведём теперь необходимые для дальнейшего и наиболее важные свойства функционалов (1) и (2), подробно рассмотренных в основополагающих работах (Реньи, 1961, 1970; Kullback, Leibler, 1951; Кульбак, 1967), а также в монографиях (Beck, Schlogl, 1993; Зарипов, 2002).

Основные свойства энтропии Реньи

Положительность и выпуклость. Энтропия Реньи является вещественным, неотрицательным и выпуклым функционалом с максимумом (минимумом) при $q > 0 \quad (q < 0)$, т.е. для произвольных p_1 и p_2 имеем следующие неравенства (Харди и др., 1948):

$$S_q^R(p) \geq 0, \quad S_q^R\left(a_1 p^{(1)} + a_2 p^{(2)} \right) \leq a_1 S_q^R(p^{(1)}) + a_2 S_q^R(p^{(2)}), \tag{5}$$

где $a_1 + a_2 = 1,\ a_1 > 0,\ a_2 > 0$ и энтропии $S_q^R(p^{(n)}) = \frac{k}{1-q} \ln \sum_i^N \left[p_i^{(n)} \right]^q$, с нормированными распределениями $\sum_i^N p_i^{(n)} = 1$, $(n = 1, 2)$.

Покажем, что $S_q^R(p) \geq 0$. Пусть $\alpha > 1$ и $\beta < 1$. Поскольку $0 < p_i \leq 1$, то справедливо $\sum_i p_i^\alpha \leq \sum_i p_i \leq \sum_i p_i^\beta$, или $\ln \sum_i p_i^\alpha \leq 0 \leq \ln \sum_i p_i^\beta$; отсюда

следует, что $S_\alpha^R \geq 0$ при $\alpha > 1$ и $S_\beta^R \geq 0$ при $\beta < 1$, т.е. $S_q^R(p) \geq 0$, $\forall q \in \mathbb{R}$, что и требовалось доказать.

Аддитивность для независимых объектов. Для суммарного случайного объекта (с энтропией $S_q^R\left(p^{(12)}\right) = \frac{k}{1-q}\ln\left(\sum_{i,j}^N p_{ij}^q\right)$ и нормированным распределением $\sum_{i,j}^N p_{ij} = 1$), описываемого совместным мультипликативным распределением вероятностей $p_{ij} = p_i\, p_j$, где p_i и p_j относятся к разным независимым объектам, справедливо свойство аддитивности для энтропий

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) = S_q^R(p^{(1)}) + S_q^R(p^{(2)}), \tag{6}$$

где энтропии $S_q^R\left(p^{(n)}\right) \equiv \frac{k}{1-q}\ln \Gamma_q\left(p^{(n)}\right)$, $(n = 1, 2)$, с соответствующими нормированными распределениями.

Энтропия равновероятного состояния. Согласно Джейнсу (Jaynes, 1963), равновесные вероятностные распределения Гиббса для стохастической системы могут быть выведены из условия экстремума её энтропии при дополнительных условиях нормировки вероятностного распределения и заданности средневзвешенных значений некоторых случайных параметров $A = \{A_1, ..., A_N\}$, характеризующих систему. Этот вариационный метод оказался особенно полезным как в классической статистике (Зубарев, 1971), так и в неэкстенсивной статистической механике (см. Tsallis, 1999; Зарипов, 2002).

Рассмотрим здесь экстремум энтропии Реньи $S_q^R(p)$ только при сохранении нормировки распределения p. Для этого вычислим безусловный экстремум функционала $\mathcal{L}(p) \equiv \frac{k}{1-q}\ln\sum_i^N p_i^q - \alpha\sum_i^N p_i$, где α есть множитель Лагранжа. Из равенства $\delta\mathcal{L} = 0$, получим $p_i = const$. Из условия нормировки следует равновероятное распределение $p_i = 1/N$. Таким образом, экстремальное значение энтропии Реньи $S_q^R(p) = S(p) = k\ln N$ не зависит от параметра экстенсивности q и совпадает с соответствующим значением энтропии

Больцмана−Гиббса−Шеннона. Для второй вариации удлинённой энтропии Реньи $\mathcal{L}(p)$ имеет место неравенство $\delta^2\mathcal{L} > 0$ при $q < 0$ (или $\delta^2\mathcal{L} < 0$ при $q > 0$), что и доказывает утверждение о максимуме (минимуме) энтропии $S_q^R(p)$.

Неравенства. Получим теперь некоторые важные для дальнейших целей неравенства, которым удовлетворяет энтропия Реньи. При использовании приведённых выше определений классической энтропии Больцмана−Гиббса−Шеннона S и различающей информации Кульбака−Лейблера K^{KL}, легко получить соотношения:

$$S\left(\mathcal{P}\right) \equiv -k\sum_i^N \mathcal{P}_i \ln \mathcal{P}_i = -kq\sum_i^N \mathcal{P}_i \ln p_i - (1-q)S_q^R, \tag{7}$$

$$K^{KL}(\mathcal{P} \,||\, p) \equiv k\sum_i^N \mathcal{P}_i \ln\left(\frac{\mathcal{P}_i}{p_i}\right) = k(q-1)\sum_i^N \mathcal{P}_i \ln p_i - (1-q)S_q^R, \tag{8}$$

$$K^{KL}(p \,||\, \mathcal{P}) \equiv k\sum_i^N p_i \ln\left(\frac{p_i}{\mathcal{P}_i}\right) = -(1-q)S(p) + (1-q)S_q^R, \tag{9}$$

которые позволяют получить следующие равенства (справедливые для переходов между состояниями с распределениями $\mathcal{P}$ и p):

$$\frac{q}{q-1}K^{KL}\left(\mathcal{P} \,||\, p\right) = -\left[S\left(\mathcal{P}\right) - S_q^R\left(p\right)\right], \tag{10*}$$

$$\frac{1}{q-1}K^{KL}\left(p \,||\, \mathcal{P}\right) = -\left[S_q^R\left(p\right) - S\left(p\right)\right], \tag{10**}$$

$$\frac{q}{q-1}K^{KL}\left(\mathcal{P} \,||\, p\right) + \frac{1}{q-1}K^{KL}\left(p \,||\, \mathcal{P}\right) = -\left[S\left(\mathcal{P}\right) - S\left(p\right)\right]. \tag{10***}$$

Учитывая теперь условие $K^{KL} \geq 0$ выпуклости для информации различия Кульбака−Лейблера (см., например, Зарипов, 2002), из соотношений (10) получим неравенства

$$S\left(\mathcal{P}\right) > S_q^R\left(p\right) > S\left(p\right), \tag{11}$$

справедливые в области $0<q<1$. При $q>1$ знаки в (11) меняются на противоположные

$$S(\mathcal{P})<S_q^R(p)<S(p). \tag{12}$$

Соответственно, в области $q<0$ справедливы неравенства

$$S_q^R(p)>S(\mathcal{P}) \text{ и } S_q^R(p)>S(p). \tag{13}$$

Используем теперь неравенство (теорема №16 в монографии (Харди и др., 1948))

$$\left(\sum p_i a_i^r\right)^{1/r} \le \left(\sum p_i a_i^{r'}\right)^{1/r'},\ r'>r, \tag{14}$$

справедливое для произвольных $r,r'\in\mathbb{R},\ r,r'\neq 0,\ a_i>0,\ p_i\ge 0,\ \sum p_i=1$. Полагая в (14) $a_i=p_i,\ r=q-1,\ r'=q'-1$, получим

$$\left(\sum p_i^q\right)^{1/(q-1)} \le \left(\sum p_i^{q'}\right)^{1/(q'-1)}, \text{ или } \frac{\ln Z_q(p_i)}{q-1} \le \frac{\ln Z_{q'}(p_i)}{q'-1},\ (q'>q),$$

что равносильно следующему фундаментальному неравенству для энтропии Реньи:

$$S_{q'}^R \ge S_q^R,\ \ (q'>q). \tag{15}$$

Предположим теперь, что $q'>q$ и что q' и q имеют один и тот же знак, и примем во внимание стандартные неравенства (теорема № 27 в монографии (Харди и др., 1948))

$$\left(\sum a_i\right)^r \ge \sum a_i^r,\ (r\ge 1);\quad \left(\sum a_i\right)^r \le \sum a_i^r,\ (0\le r\le 1), \tag{16}$$

справедливые для произвольных $a_i>0$ и положительных $r\in\mathbb{R}$. Для того, чтобы отсюда получить ещё одно важное неравенство для энтропии Реньи, положим $a_i=p_i^q,\ r=q'/q$. Пусть теперь $q'>q>0$, тогда $r>1$ и из (16) следует

$$\left(\sum p_i^q\right)^{q'/q} \geq \sum p_i^{q'},\ (q' > q > 0). \qquad (16^*)$$

Если $0 > q' > q$, то имеем $0 \leq r = q'/q < 1$ и, следовательно,

$$\left(\sum p_i^q\right)^{q'/q} \leq \sum p_i^{q'},\ (0 > q' > q). \qquad (16^{**})$$

Если возвести неравенства (*) и (**) в степень $1/q'$, то для обоих случаев справедливо неравенство

$$\left(\sum p_i^q\right)^{1/q} \geq \left(\sum p_i^{q'}\right)^{1/q'},\quad (q' > q,\ q'q > 0). \qquad (16^{***})$$

Наконец, с учётом (16***) и формулы $\ln \Gamma_q(p) = \ln \sum_i^N p_i^q = k^{-1}(1-q)S_q^R$, окончательно получим (применяемое далее) неравенство для энтропии Реньи

$$\frac{(1-q)}{q} S_q^R \geq \frac{(1-q')}{q'} S_{q'}^R\ ,\quad (q' > q,\ q'q > 0). \qquad (17)$$

Помимо полученных выше неравенств для энтропии Реньи, справедливы также следующие неравенства:

$$S_q^R(p) \leq k \ln N,\quad (q > 0);\quad S_q^R(p) \geq k \ln N,\quad (q < 0), \qquad (18)$$

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) \leq S(p^{(1)}) + S(p^{(2)}), \qquad (19)$$

$$S_q^R\left(p^{(12)}\right) \geq S_q^R(p^{(1)}),\quad S_q^R\left(p^{(12)}\right) \geq S_q^R(p^{(2)}), \qquad (20)$$

а также и некоторые другие, которые можно найти, например, в работах (Beck, 1990; Beck, Schlögl, 1993; Зарипов, 2002).

Основные свойства различающей информации Реньи

Наряду с энтропией Реньи (1), информация различия Реньи (2)

$$K_q^R(p||f) \equiv \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q f_i^{1-q} = \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i\left(\frac{p_i}{f_i}\right)^{q-1}$$

также относятся к наиболее существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической q-системы. Являясь функционалом, она характеризует переход системы от состояния p в состояние f, когда статистические наблюдения ведутся относительно состояния p.

Рассмотрим здесь некоторые наиболее важные свойства информации различия Реньи (см., например, Beck, Schlögl,1993; Tsallis, 2001, 2009; Зарипов, 2002).

Выпуклость. Различающая информация есть вещественный, выпуклый и положительный (или отрицательный) функционал с минимумом (максимумом) при $q>0$ $(q<0)$. Покажем это. Для действительного числа $r>0$ имеем

$$\begin{aligned}\frac{r^{q-1}-1}{q-1} &\geq 1-\frac{1}{r}, \quad \text{если } q>0,\\ &= 1-\frac{1}{r}, \quad \text{если } q=0,\\ &\leq 1-\frac{1}{r}, \quad \text{если } q<0.\end{aligned} \tag{21}$$

Поэтому, например, для $q<0$ справедливо $\left(pf^{-1}\right)^{q-1} \geq q+(1-q)\left(f\,p^{-1}\right)$. Отсюда следует, что

$$K_q^R(p||f) = \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i\left(\frac{p_i}{f_i}\right)^{q-1} \leq \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i\left\{q+(1-q)\left(\frac{f_i}{p_i}\right)\right\} = 0,$$

т.е. имеют место следующие неравенства

$$K_q^R(p||f) \leq 0, \quad (q<0); \quad K_q^R(p||f) \geq 0, \quad (q>0). \tag{22}$$

Заметим, что поскольку при $p = f$ имеет место равенство $K_q^R\left(p \| p\right) = 0$, то различающая информация Реньи является функцией Ляпунова[4)].

Справедливо также неравенство

$$K_q^R\left[\left(a_1 p_1 + a_2 p_2\right) \| f\right] \le a_1 K_q^R\left(p_1 \| f\right) + a_2 K_q^R\left(p_2 \| f\right), \tag{23}$$

где $a_1 + a_2 = 1$ и $a_1 > 0$, $a_2 > 0$.

Аддитивность для двух независимых объектов. Пусть состояние суммарного случайного объекта описывается нормированными совместными распределениями $p^{(12)}$ и $f^{(12)}$. Тогда различающая информация совокупной и отдельных систем определяются выражениями

$$K_q^R\left(p^{(12)} \| f^{(12)}\right) = \frac{k}{q-1} \ln \sum_{i,j}^N p_{ij}^q f_{i,j}^{1-q}, \tag{24}$$

$$K_q^R\left(p^{(1)} \| f^{(1)}\right) = \frac{k}{q-1} \ln \sum_i^N p_i^q f_i^{1-q}, \quad K_q^R\left(p^{(2)} \| u^{(2)}\right) = \frac{k}{q-1} \ln \sum_j^N p_j^q u_j^{1-q}. \tag{25}$$

В случае статистической независимости состояний имеет место условие мультипликативности $p_{ij} = p_i p_j$ и $f_{ij} = f_i f_j$. Отсюда, при использовании (24) и (25), легко получить равенство

$$K_q^R\left(p^{(12)} \| f^{(12)}\right) = K_q^R\left(p^{(1)} \| f^{(1)}\right) + K_q^R\left(p^{(2)} \| f^{(2)}\right), \tag{26}$$

означающее аддитивность информации различия Реньи для суммарного случайного объекта. При $q = 1$ из (26) следует свойство аддитивности для информации различия Кульбака–Лейблера $K^{KL}(p \| f)$ с мерой Больцмана–Гиббса−Шеннона (см. Beck, Schlogl,1993).

[4)] Напомним, что функцией Ляпунова называется знакоопределённая функция, которая обращается в нуль в точке равновесия системы. Состояние равновесия является аттрактором, когда производная по времени от функции Ляпунова имеет знак, противоположный знаку самой функции.

Следствие различающей информации Реньи с равновероятным распределением для $f=\left\{f_{1,}f_{2,}...,f_N\right\}$**.** Покажем, что энтропия Реньи $S_q^R(p)$ произвольного состояния p меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния системы при $q>0 \quad (q<0)$. Подставляя распределение $f_i=1/N$ в (21), получим

$$K_q^R(p_1 \| f_1)=\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q N^{q-1}=-\left(S_q^R-k\ln N\right). \tag{27}$$

Используя (27) и условия выпуклости (22) функционала K_q^R, получим неравенства (18), означающие, что энтропия Реньи меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния при $q>0$ $(q<0)$.

Неравенства. Для различающей информации Реньи справедливы также следующие неравенства:

$$K_q^R\left(p^{(12)} \| f^{(12)}\right)\le K_q^R\left(p^{(1)}\| f^{(1)}\right)+K_q^R\left(p^{(2)} \|: f^{(2)}\right), \tag{28}$$

$$K_q^R(p\|f)>K^{KL}(\mathcal{P}\|f), \quad K_q^R(p\|f)>K^{KL}(p\|f), \quad (q<0), \tag{29}$$

$$K^{KL}(\mathcal{P}\|f)<K_q^R(p\|f)<K^{KL}(p\|f), \quad (q>1), \tag{30}$$

$$K^{KL}(\mathcal{P}\|f)>K_q^R(p\|f)>K^{KL}(p\|f), \quad (0<q<1). \tag{31}$$

Мера неточности. Наряду с информацией различия Реньи, функционал

$$H_q\left(p\|f\right)=S_q^R\left(p\right)+K_q^R\left(p\|f\right)=\frac{k}{1-q}\ln\left[\sum_i^N p_i^q\Big/\sum_i^N p_i\left(\frac{p_i}{f_i}\right)^{q-1}\right] \tag{32}$$

также относятся к существенным статистическим характеристикам неэкстенсивной динамической q-системы. Используемый далее, этот функционал, являющийся мерой статистической неточности определения одного состояния случайного объекта относительно другого и определяемый суммой энтропии и информации различия, впервые был введён в теорию информации в работе

(Nath, 1975). Различающая информация $K_q^R\left(p\|f\right)$, представляющая собой отрицательный вклад в меру неточности, является, таким образом, информацией о снятой мере неточности. При $p=f$ функционал (33) совпадает с энтропией Реньи, то есть $H_q(p\,\|\,p)=S_q^R(p)$.

2. Экстремум энтропии Реньи и негиббсовое равновесное распределение. Термодинамические соотношения

Пусть случайными объектами неэкстенсивной системы являются рассматриваемые в статистической физике дискретные частицы с энергией H_i. Рассмотрим равновесное состояние системы. Далее будем использовать нормированное эскортное распределение $\mathcal{P}_i(q)$, поскольку осреднение с ним приводит к аддитивности средних энергий E_q (см. формулу (46)). Для определения равновесного распределения найдем безусловный экстремум энтропии Реньи $S_q^R(p)$ при сохранении нормировки и заданности средней энергии частиц

$$E_q=\sum\nolimits_i^N \mathcal{P}_i(q)H_i\,,\quad \sum\nolimits_i^N p_i\;=1\,. \tag{33}$$

Согласно вариационному принципу Джейнса, определим функционал

$$\mathcal{L}(p)\equiv\frac{k}{1-q}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q-\beta\sum\nolimits_i^N H_i\mathcal{P}_i-k\lambda\sum\nolimits_i^N p_i\,, \tag{34}$$

где параметры β и λ являются множителями Лагранжа. Тогда, из условия

$$\delta\mathcal{L}=\frac{kq}{1-q}\Gamma_q^{-1}\sum\nolimits_i^N p_i^{q-1}\delta p_i-\beta q\Gamma_q^{-1}\sum\nolimits_i^N p_i^{q-1}\left(H_i-E_q\right)\delta p_i-k\lambda\sum\nolimits_i^N\delta p_i=0$$

получим равенство

$$\Gamma_q^{-1}p_i^{q-1}\left[1-k^{-1}\left(1-q\right)\beta\left(H_i-E_q\right)\right]=\frac{\left(1-q\right)\lambda}{q}, \tag{35}$$

из которого следует значение $\lambda=q/\left(1-q\right)$ и негиббсовое равновесное распределение с параметром β

$$p_{i0}(\beta)=\frac{1}{Z_q}\left\{1-k^{-1}\beta\left(1-q\right)\Delta\left[H_i\right]\right\}^{1/\left(1-q\right)}. \qquad (36)$$

Здесь

$$\Gamma_q(p)\equiv\sum_i^N p_i^q\,,$$

$$Z_q(\beta)=\Gamma_q^{1/(1-q)}=\sum_i^N\left\{1-k^{-1}\beta\left(1-q\right)\Delta\left[H_i\right]\right\}^{1/\left(1-q\right)}>0 \qquad (37)$$

− статистический интеграл; $\beta=1/T$ − обратная температура (изменяющаяся в пределах допустимых значений); $\Delta\left[H_i\right]\equiv(H_i-E_{q0})$ − флуктуация энергии частиц. Таким образом, распределение вероятностей состояния статистического ансамбля неэкстенсивных систем с мерой Реньи, которые находятся в тепловом равновесии с внешней средой (термостатом) и могут обмениваться с ней энергией при постоянном объёме и постоянном числе частиц, соответствует обобщённому каноническому ансамблю Гиббса (36).

Равновесное распределение (36) можно переписать в виде

$$p_{i0}(\beta_0)=\left[\frac{1-k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(\beta_0)}\right]^{\frac{1}{1-q}}=\frac{\exp_q\left\{-\Delta\left[H_i\right]/kT_0\right\}}{\exp\left(S_{q0}^R/k\right)}, \qquad (38)$$

если использовать так называемую деформированную экспоненту Тсаллиса

$$\exp_q(x)\equiv[1+(1-q)x]_+^{\frac{1}{1-q}}=\begin{cases}0, & \text{если } q<1 \text{ и } x<-1/1-q;\\ [1+(1-q)x]_+^{1/1-q} & \text{если } q<1 \text{ и } x\geq-1/1-q;\\ [1+(1-q)x]_+^{1/1-q} & \text{если } q>1 \text{ и } x<-1/1-q,\end{cases} \qquad (39)$$

где выражение, стоящее в квадратных скобках, либо положительно, либо равно нулю, $[y]_+\equiv max(y,0)$. Легко проверить, что при $q\to1$ эта функция принимает стандартный вид: $\exp_1(x)\equiv\lim\limits_{q\to1+0}\exp_q(x)=\lim\limits_{q\to1-0}\exp_q(x)=\exp(x)$.

Если $q=1$, то из (38) следует равновесное каноническое распределение Гиббса: $p_{i0}=\exp\left\{-\left[H_i-E_0+T_0S_0\right]/kT_0\right\}$ классической статистики Больцмана–Гиббса, где $S_0(p_0)=k\ln\sum_i^N\exp\left\{-\Delta\left[H_i\right]/kT_0\right\}$ (см., например, Зубарев, 1971).

Обобщённые термодинамические соотношения. Подстановка распределения (36) в (1) даёт следующее экстремальное значение энтропии Реньи при равновесном распределении p_{i0}

$$S_{q0}^R\equiv S_q^R(p_0)=\frac{k}{1-q}\ln\left(\sum_i^N p_{i0}^q\right)=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\sum_i^N p_{i0}\frac{\Gamma_q(\beta_0)}{1-k^{-1}(1-q)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\sum_i^N\Gamma_q(\beta_0)p_{i0}\left[1+\frac{k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta\left[H_i\right]}{1-k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta\left[H_i\right]}\right]\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\Gamma_q(\beta_0)+\sum_i^N p_{i0}\frac{\Gamma_q(\beta_0)k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta\left[H_i\right]}{1-k^{-1}\beta_0(1-q)\Delta\left[H_i\right]}\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\left\{\Gamma_q(\beta_0)+k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0\sum_i^N\Delta\left[H_i\right]p_{i0}^q\right\}=$$

$$=\frac{k}{1-q}\ln\Gamma_q(\beta_0)=k\ln Z_q(\beta_0). \qquad (40)$$

Тогда свободная энергия F_q для равновесной неэкстенсивной системы в термостате с температурой $T=1/\beta$ и статистический интеграл задаются соотношениями (далее индекс «0» будем опускать)

$$S_q^R=k\ln Z_q(T),\quad F_q=E_q-TS_q^R=E_q-kT\ln Z_q, \qquad (41)$$

$$E_q=\sum_i^N\mathcal{P}_i(q)H_i=\frac{1}{\Gamma_q(T)}\sum_i^N p_i^qH_i, \qquad (42)$$

$$Z_q(T) = \left[\Gamma_q(T)\right]^{1/(1-q)} = \left(\sum_i^N p_i^q\right)^{1/(1-q)}. \qquad (43)$$

При дифференцировании энтропии Реньи для равновесного состояния, заданной выражением (40), получим следующие соотношения

$$\frac{\partial S_q^R}{\partial E_q^R} = \frac{1}{T}, \quad E_q = F_q - T\frac{\partial(F_q)}{\partial T}, \quad \frac{\partial E_q}{\partial T} = -T\frac{\partial^2 F_q}{\partial T} = C_{qv}, \qquad (44)$$

аналогичные соотношениям классической равновесной статистической термодинамики замкнутых систем.

Термодинамическое равновесие. Рассмотрим термодинамическое равновесие двух независимых q-систем с энтропиями $S_{q1}^R = S_q^R\left(p^{(1)}\right)$ и $S_{q2}^R = S_q^R\left(p^{(2)}\right)$, представляющих собой общую замкнутую систему с энтропией $S_q^R = S_q^R\left(p^{(12)}\right)$ при $p^{(12)} = p^{(1)}p^{(2)}$ и энергии E_{q12}. Согласно свойству аддитивности (6) энтропии Реньи (1), для энтропии суммарной системы имеем $S_{q12}^R = S_{q1}^R + S_{q2}^R$.

Для нахождения осреднённой энергии E_{q12}^R суммарной системы воспользуемся распределением (36). Тогда, используя условие мультипликативности $p_{12} = p_1 p_2$, будем иметь

$$\frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_{12}\left[H_i\right]\right\}}{\exp\left\{k^{-1}(S_{q1}^R + S_{q2}^R)\right\}} = \frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_1\left[H_i\right]\right\}}{\exp\left(k^{-1}S_{q1}^R\right)} \times \frac{\exp_q\left\{-k^{-1}\beta\Delta_2\left[H_i\right]\right\}}{\exp\left(k^{-1}S_{q2}^R\right)},$$

откуда, с учетом формулы $\exp_q(x)\exp_q(y) = \exp_q(x + y + (1-q)xy)$ (см.Tsallis, 2009), получим

$$\Delta_{12}\left[H_i\right] = \Delta_1\left[H_i\right] + \Delta_2\left[H_i\right] - (1-q)k^{-1}\beta\Delta_1\left[H_i\right]\Delta_2\left[H_i\right]. \qquad (45)$$

В этом соотношении необходимо использовать условие аддитивности осредненных энергий

$$E_{q12} = E_{q1} + E_{q2}, \tag{46}$$

поскольку без этого предположения осредненные величины будут зависеть от микроскопических величин, что является неприемлемым (см., например, Zaripov, 2005). Тогда из (46) для микроскопических энергий получим следующее условие квазиаддитивности микроскопических энергий

$$H_{i12} = H_{i1} + H_{i2} - (1-q)k^{-1}\beta\Delta_1\left[H_i\right]\Delta_2\left[H_i\right]. \tag{47}$$

Заметим, что именно наличие этого равенства является той причиной, благодаря которой статистику на мере Реньи относят к неэкстенсивной статистической механике.

При варьировании соотношений (6) и (46) получатся следующие равенства $\delta S^R_{q12} = \delta S^R_{q1} + \delta S^R_{q2}$, $\delta E_{q12} = \delta E_{q1} + \delta E_{q2}$, из которых следует

$$\delta S^R_{q1} / \delta E_{q1} = \delta S^R_{q2} / \delta E_{q2} = \beta \tag{48}$$

− равенство температур для двух независимых систем при их тепловом контакте. Таким образом, параметр β действительно является интенсивной величиной и играет роль обратной температуры $\beta \equiv 1/T$ в термодинамике Реньи.

***H*-теорема в статистике Реньи**. Рассмотрим теперь замкнутую систему, для которой распределение p_i является произвольным, а распределение p_{i0} − равновесным

$$p_{i0} = \left[\frac{1 - k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(p_0)}\right]^{\frac{1}{1-q}}. \tag{49 }$$

Тогда спонтанный переход между этими состояниями описывается следующей различающей информацией Реньи (см. Zaripov, 2005)

$$K^R_q(p \,||\, p_0) = \frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N p_i^q p_{i0}^{1-q} = \frac{k}{q-1}\ln\left\{\Gamma_q(p)\sum_i^N \wp_i(q) p_{i0}^{1-q}\right\} =$$

$$=\frac{k}{q-1}\ln\Gamma_q(p)+\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N \wp_i(q)\frac{1-k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0\Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(p_0)}=$$

$$=-\left[S_q^R(p)-S_q^R(p_0)\right]+\frac{k}{q-1}\ln\sum_i^N \wp_i(q)\left\{1-k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0\Delta\left[H_i\right]\right\}=$$

$$=-\left(S_q^R-S_{q0}^R\right)+\frac{k}{q-1}\ln\left\{1-\frac{(1-q)}{kT_0}(E_q-E_{q0})\right\} \qquad (50)$$

с равенством $K_q^R(p\,||\,p_0)=0$ при распределении $p_i=p_{i0}$.

Если $q=1$, то из (50) следует известное выражение для информации различия Кульбака–Лейблера неэкстенсивной статистической механики (см. Зарипов, 2002; Колесниченко 2018с)

$$K^{KL}(p:p_0)=-(S-S_0)+T_0^{-1}(E-E_0)\geq 0, \qquad (51)$$

характеризующее степень отклонения хаотической системы от полного равновесия.

При выполнении условия Гиббса $E_q=E_{q0}$ (см. Климонтович,1990) и с учётом свойства (22) знакоопределенности информации различия $K_q^R(p:p_0)$ из (51) следуют два неравенства

$$K_q^R(p\,||\,p_0)=-(S_q^R-S_{q0}^R)>0 \text{ при } q>0, \qquad (52)$$

$$K_q^R(p\,||\,p_0)=-(S_q^R-S_{q0}^R)<0 \text{ при } q<0, \qquad (52^*)$$

которые обобщают теорему Гиббса на неэкстенсивную статистику Реньи. Согласно этой теореме, для замкнутой системы энтропия Реньи $S_q^R=S_{q0}^R-K_q^R(p\,||\,p_0)$ возрастает (убывает) до экстремального её значения S_{q0}^R при $q>0$ $\left(q<0\right)$ одновременно с уменьшением (увеличением) положительной (отрицательной) информации $K_q^R(p\,||\,p_0)$. Таким образом, различающая информация представлена здесь в виде отрицательного вклада в теку-

щую энтропию Реньи S_q^R и потому может быть названа негэнтропией (Шредингер, 1947).

Поскольку информация различия Реньи является знакоопределенной функцией Ляпунова, то для того чтобы состояние равновесия S_{q0} было устойчивым, необходимо выполнение следующих неравенств

$$\frac{dK_q^R}{dt} = -\frac{d\left(S_q^R - S_{q0}^R\right)}{dt} < 0 \quad \text{при } q > 0; \quad \frac{dK_q^R}{dt} = -\frac{d\left(S_q^R - S_{q0}^R\right)}{dt} > 0 \quad \text{при } q < 0. \quad (53)$$

Из соотношений (54) следует неравенство для энтропии Реньи: $dS_q / dt > 0$ при $q > 0$ и $dS_q / dt < 0$ при $q < 0$, которые выражают H-теорему для рассматриваемой стохастической q-системы: при временной эволюции к равновесному состоянию энтропия Реньи замкнутой системы возрастает (убывает) до экстремального ее значения S_{q0}^R при $q > 0$ $\left(q < 0\right)$.

Рассмотрим теперь открытые системы, находящиеся в окружении с температурой T_0. Согласно равенству (50) они характеризуются физической различающей информацией Реньи

$$\begin{aligned} K_q^R(p \,\|\, f_0) &= \frac{k}{q-1} \ln \sum\nolimits_i^N p_i^q f_{i0}^{1-q} = \\ &= -\left(S_q^R - S_{q0}^R\right) + \frac{k}{q-1} \ln \left\{ 1 - \frac{(1-q)}{kT_0} (E_q - E_{q0}) \right\} \end{aligned} \quad (50^*)$$

при распределении (49)

$$f_{i0} = \left[\frac{1 - k^{-1}\left(1-q\right)\beta_0 \Delta\left[H_i\right]}{\Gamma_q(f_0)} \right]^{\frac{1}{1-q}}. \quad (49^*)$$

Дифференцируя (50*) по времени, получим следующее соотношение для открытых неэкстенсивных q-систем с мерой Реньи

$$dK_q^R \geq -dS_q^R + \frac{dE_q}{T_0\left[1 - (1-q)k^{-1}\beta_0 (E_q - E_{q0})\right]}, \quad (54)$$

которое отличается от обобщённого соотношения Гиббса термодинамики аддитивных информационно-физических процессов $dK^{KL} \geq -dS + dE / T_0$ (см. формулу (41) в работе (Колесниченко, 2018с)) наличием разности средних энергий частиц в этих сопряжённых системах. Знак равенства имеет место для обратимых процессов, а неравенства – для необратимых.

Покажем теперь, что между неэкстенсивной термодинамикой Реньи сложных стохастических систем, с одной стороны, и теорией фракталов, опирающейся на геометрию и статистику, существует тесная взаимосвязь.

3. Определения фрактала и фрактальной размерности

Фракталы появляются во множестве физических приложений (см. Mandelbrot, 1977). Фрактальные объекты в пространстве или фрактальные процессы во времени являются самоподобными (или самоафинными) и обнаруживают скейлинговое поведение на разных пространственно-временных масштабах. В частности, их широко используют в космологии (см., например, Bialas, Czyz, 2008; Kolesnichenko, Marov, 2013, 2014; Kolesnichenko, 2016), космогонии звёздных и планетных систем (см. Пиблс, 1983; Мандельброт, 2002; Колесниченко, Маров, 2014), в физике Солнца (Могилевский, 2001), а также для понимания динамического поведения хаотических систем (Lorenz, 1963), когда фракталами являются все «странные» аттракторы, связанные с непрерывными потоками (см. Ruelle, Takens, 1971; Малинецкий, Потапов, 1988). Основной характеристикой фрактала является его размерность.

Регулярный фрактал. **Мера Хаусдорфа−Безиковича**. Напомним теперь некоторые точные определения. Регулярными фракталами называют геометрические объекты в евклидовом пространстве (с мерой d), которые обладают свойством самоподобия[5)] (т.е. неизменности основных геометрических особенностей при изменении масштаба) и имеют дробную метрическую меру (в смысле Минковского или Хаусдорфа) либо меру, отличную от топологической. При этом мера (размерность) регулярного фрактала определяется следующим образом. Предположим, что для полного покрытия фрактала d-мерными гипершарами[6)] радиуса Δ необходимо не менее чем $N(\Delta)$ шаров.

[5)] Самоподобие характерно лишь для *регулярных фракталов*, способ построения которых имеет детерминированный характер. Однако, если в алгоритм их создания входит элемент случайности (как, например, во многих процессах диффузионного роста кластеров), то возникают так называемые случайные фракталы, для которых свойство самоподобия справедливо только после осреднения по всем статистическим реализациям объекта.

[6)] Под "шаром" в зависимости от задачи следует понимать также же и куб, и квадрат, и просто отрезок прямой.

Тогда, если при достаточно малых Δ величина $N(\Delta)$ меняется с Δ по степенному закону $N(\Delta) \sim 1/\Delta^{D_H}$, то показатель скейлинга D_H называется хаусдорфовой или фрактальной мерой этого объекта. Это определение может быть представлено в виде (Hausdorff, 1919; Btsicovitch,1934)

$$D_H = -\lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln N(\Delta)}{\ln \Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln N(\Delta)}{\ln(1/\Delta)}. \qquad (55)$$

В качестве примера вычислим фрактальную размерность *канторового множества*, схема построения которого приведена на Рис.1.

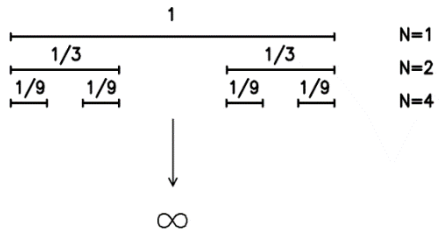

Рис.1.Канторовское множество.

Начнём с отрезка единичной длины. На первом шаге построения фрактала заменим его двумя отрезками с длинами $1/3$, примыкающими соответственно к его левому и правому концам. Очевидно, что на n-м шаге рекуррентного построения имеется 2^n отрезков генератора длиной $1/3^n$ каждый. Предел $\Delta \to 0$ соответствует пределу $n \to \infty$. Поэтому фрактальная размерность равна

$$D_H = -\lim_{n \to \infty} \frac{\ln 2^n}{\ln(1/3^n)} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.63.$$

Размерность Хаусдорфа D_H, рассчитанная с использованием формулы (55) для некоторых известных фрактальных множеств, приведена в табл.1. (Шредер, 2001; Мандельброт 2002).

Таблица 1

Фрактальное множество	D_H
Канторовское множество)	0,63
Триадная кривая Коха	1,26
Кривая Мандельброта-Гивена	1,89
Салфетка Серпинского	1,58
Ковер Серпинского	1,89
Кривая Госпера	1,13
Универсальная кривая Менгера	2,73

Более сложные объекты – мультифракталы – являются суперпозицией нескольких регулярных фракталов различных размерностей и имеют более сложные свойства, чем непосредственно монофракталы (см. Mandelbrot, 1977, 1982; Шредер,2001; Божокин, Паршин, 2001).

4. Континуум мультифрактальных размерностей Реньи

Рассмотрим энтропийный подход к анализу континуума мультифрактальных размерностей.

Мультифракталы. Обобщенная фрактальная размерность. К мультифракталам относятся неоднородные фрактальные объекты, для характеристики которых недостаточно одной размерности Хаусдорфа D_H, а необходим целый спектр таких размерностей, число которых, вообще говоря, бесконечно. Причина этого заключается в том, что в отличие от регулярных фракталов (геометрически подобных объектов) мультифракталы (точнее их фрагменты), наряду с чисто геометрическими характеристиками, определяемыми величиной D_H, являются статистически подобными копиями целого, т.е. обладают некоторым набором статистических свойств. Для характеристики таких структур вводятся в рассмотрение различные информационные размерности, которые чувствительны к неоднородностям подобных множеств (Grassberger, Procaccia, 1983; Бадии, Полити, 1988). Одним из наиболее содержательных описаний фрактальных размерностей служат обобщённые размерности Реньи $D(q)$, разных порядков.

Пусть часть пространства $\mathcal{G}$, занятая фрактальным объектом покрыта равными (гипер) кубическими ячейками с ребром $\Delta > 0$ и объёмом Δ^d. Обозначим через $n_i(\Delta)$ число точек (элементов системы), в гиперкубе с номером $i = 1, 2, ..., N(\Delta)$, где $N(\Delta)$ − полное число элементов выбранного Δ-покрытия. Тогда вероятность, характеризующая относительную заселенность ячейки i, равна $p_i(\Delta) = n_i(\Delta) / \sum_i^{N(\Delta)} n_i$. Ясно, что $\sum_i^{N(\Delta)} p_i^q = 1$. Реньи в работе (Renyi,1961) ввел энтропию $S_q^R = \dfrac{k}{1-q} \ln \sum_i^{N(\Delta)} p_i^q$, как q-момент меры Δ-покрытия. Рассмотрим обобщённую статистическую сумму

$$\Gamma(q, \Delta) \equiv \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta), \tag{56}$$

которая характеризуется показателем степени q, принимающим любые значения в интервале $-\infty < q < +\infty$. Тогда, спектр обобщенных фрактальных размерностей $D(q)$, характеризующих распределение вероятностей $p_i(\Delta)$ в области $\mathcal{G}$, определяется соотношением (Hentschel, Procaccia,1983)

$$D(q) \equiv \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \Gamma(q,\Delta)}{\ln \Delta} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{1}{q-1} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta)}{\ln \Delta} = \tag{57}$$

$$= -\frac{1}{k} \lim_{\Delta \to 0} \frac{S_q^R(p)}{\ln \Delta} = \frac{1}{q-1} \tau(q),$$

где

$$\tau = \tau(q) = -\lim_{\Delta \to 0} \left\{ \frac{1}{\ln \Delta} \ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta) \right\}, \quad \tau(q) = (q-1)D(q). \tag{58}$$

Таким образом, мультифрактал в общем случае характеризуется некоторой нелинейной функцией $\tau(q)$, определяющей поведение статистической суммы $\Gamma(q,\Delta)$ при $\Delta \to 0$: $\Gamma(q,\Delta) \approx \Delta^{\tau(q)}$.

Легко показать, что если $D(q) = D = const$, то данный фрактальный объект представляет собой регулярный монофрактал. Действительно, в случае регулярного фрактала во всех занятых ячейках содержится одинаковое количество элементов $n_i(\Delta) = N / N(\Delta)$, то есть фрактал является *однородным*. Тогда очевидно, что относительные населенности всех ячеек, $p_i(\Delta) = 1 / N(\Delta)$, тоже одинаковы, и обобщенная статистическая сумма (56) принимает вид $\Gamma(q,\Delta) = N^{1-q}(\Delta)$. Поскольку, согласно определению фрактальной размерности D, число занятых ячеек при достаточно малом Δ равно $N(\Delta) \approx \Delta^{-D}$, то $\Gamma(q,\Delta) = \Delta^{(q-1)D} \approx \Delta^{\tau(q)}$. Отсюда следует, что в случае обычного фрактала функция $\tau(q) = (q-1)D$, т. е. является линейной. Тогда все обобщенные фрактальные размерности $D(q) = D$ совпадают при всех значениях q.

Наиболее широкое распространение получили три совершенно разные меры фрактала: хаусдорфова размерность $D_H \equiv D(q \to 0)$, информационная размерность $D(q \to 1)$ и корреляционная размерность $D(q \to 2)$ (Grassberger, 1981,1985; Grassberger, Procaccia, 1984).

Фрактальная и информационная размерности. При $q=0$ из выражения (56) следует, что $\Gamma(0,\Delta)=N(\Delta)$. С другой стороны, в этого случая имеем $\Gamma(0,\Delta)\approx\Delta^{\tau(0)}=\Delta^{D(0)}$. Из сопоставления этих равенств следует, что $N(\Delta)\approx\Delta^{D(0)}$. Это означает, что величина $D(0)$, представляющая собой обычную хаусдорфову размерность D_H множества $\mathcal{G}$, является наиболее грубой характеристикой мультифрактала и не несет информации о его статистических свойствах.

При $q=1$, в силу условия нормировки вероятности p_i, статистическая сумма равна $\Gamma(1,\Delta)=1$, а $\tau(1)=0$. Таким образом, мы имеем неопределенность в выражении (57) для $D(1)$, которая раскрывается с помощью очевидного равенства

$$D(1)=\lim_{q\to1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to0}\left[\ln\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i^q(\Delta)/\ln\Delta\right]\right\}=$$

$$=\lim_{q\to1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to0}\left[\ln\left(\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\,\exp\left[(q-1)\right]\ln p_i\right)/\ln\Delta\right]\right\}=$$

$$=\lim_{q\to1}\left\{\frac{1}{q-1}\lim_{\Delta\to0}\frac{\ln1+(q-1)\sum\limits_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i}{\ln\Delta}\right\}=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{\ln\Delta}\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i. \qquad (59)$$

В результате величина обобщенной фрактальной размерности $D(1)$ связана с энтропией Больцмана–Гиббса[7)] $S(p)=-k\sum\limits_{i=1}^{N(\Delta)}p_i\ln p_i$ соотношением

$$D(1)=-\frac{1}{k}\lim_{\Delta\to0}\frac{S(\Delta)}{\ln\Delta}. \qquad (60)$$

Таким образом, поскольку $S\approx\Delta^{-kD(1)}$, то величина $D(1)$ характеризует информацию, необходимую для определения местоположения элемента фрак-

---

[7)]Энтропия Больцмана–Гиббса является мерой количества информации, необходимой для определения системы в некотором положении i.

тального объекта в некоторой ячейке. В связи с этим обобщенную фрактальную размерность $D(1)$ часто называют *информационной размерностью*. Она показывает, как информация, необходимая для определения местоположения элемента фрактала, возрастает при стремлении размера ячейки в к нулю.

Корреляционная размерность. Важную роль в различных приложениях играет так называемая корреляционная размерность, которая следует из (57) при $q = 2$

$$D(2) = \lim_{\Delta \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^2(\Delta)}{\ln \Delta} \approx \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln I(\Delta)}{\ln \Delta}, \qquad (61)$$

где $I(\Delta) = \lim_{N \to \infty} \frac{1}{N^2} \sum_{i,j=1; i \neq j}^{N} \theta\left(\Delta - \left|\boldsymbol{\Delta}_i - \boldsymbol{\Delta}_j\right|\right)$ – корреляционный интеграл, в котором суммирование проводится по всем парам точек фрактального множества с радиус-векторами $\boldsymbol{\Delta}_i$ и $\boldsymbol{\Delta}_j$; $\theta(x)$ – ступенчатая функция Хевисайда, $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$ и $\theta(x) = 0$, если $x < 0$. Сумма в выражении $I(\Delta)$ определяет относительное число пар точек, расстояние между которыми не больше Δ. Поэтому, поделённая на число N^2, она определяет вероятность того, что две наугад взятые точки разделены расстоянием, меньшим, чем Δ. Эту же вероятность можно определить и по-другому. Величина p_i представляет собой вероятность попадания точки в i-ю ячейку с размером r. Следовательно, величина p_i^2 представляет собой вероятность попадания в эту ячейку двух точек. Суммируя p_i^2 по всем занятым ячейкам, мы получаем вероятность того, что две произвольно выбранные точки из множества $\mathcal{G}$ лежат внутри одной ячейки с размером Δ. Следовательно, расстояние между этими точками будет меньше или порядка Δ. Таким образом, с точностью до численных коэффициентов, принимая во внимание равенство (61), получаем $I(\Delta) \approx \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^2(\Delta) = \Delta^{D(2)}$. Таким образом, обобщенная размерность $D(2)$ определяет зависимость корреляционного интеграла $I(\Delta)$ от Δ в пределе $\Delta \to 0$. Именно по этой причине величину $D(2)$ в литературе называют кор-

реляционной размерностью (Шустер, 1988; Grassberger, Procaccia, 1983, 1984; Moon, Li, 1985).

Заметим, что при q=3,4,… имеют место обобщённые размерности, связанные с корреляционными интегралами I триплетов, квадруплетов и т.д. точек на фрактальном множестве.

Свойства размерностей Реньи. Из свойств энтропии Реньи, приведенных в разд. 1, следует, что для размерностей фракталов Реньи (57) выполняются следующие неравенства:

Во-первых, размерность $D(q)$, согласно свойству неотрицательности (5) энтропии Реньи, удовлетворяет неравенству

$$D(q) = -\frac{1}{k}\lim_{\Delta\to 0}\left\{\frac{1}{\ln\Delta}S_q^R(p)\right\} \geq 0. \tag{62}$$

Во-вторых, размерности Реньи, согласно свойству (15) для S_q^R и определению (57), подчиняются неравенству (Mandelbrot, 1974)

$$D(q') \leq D(q) \quad \text{если} \quad q' > q, \tag{63}$$

из которого следует, что обобщённая фрактальная размерность $D(q)$ всегда монотонно убывает (или в крайнем случае остается постоянной) с ростом q. Знак равенства имеет место, например, для однородных фракталов, в которых вероятность p_i удовлетворяет закону подобия $p_i \approx \Delta^D$, где D – любая размерность. Максимальное значения $D_{max} = D(-\infty)$ величина $D(q)$ достигает при $q \to -\infty$, а минимальное значение $D_{min} = D(\infty)$ при $q \to +\infty$.

В-третьих, вследствие свойства (17) для энтропии Реньи, имеют место общие неравенства

$$\frac{(q'-1)}{q'}D(q') \geq \frac{(q-1)}{q}D(q), \quad \text{если} \quad q' > q,\ q'q > 0, \tag{64}$$

$$(q'-1)D(q') \geq (q-1)D(q), \quad \text{если} \quad q' > q > 0. \tag{65}$$

В случае, когда $q' \to +\infty$ и $q > 1$, из (64) вытекает неравенство

$$D(q) \leq \frac{q}{(q-1)}D(\infty), \quad \text{если} \quad q > 1; \tag{66}$$

аналогично, когда $q \to -\infty$ и $q < 0$, для размерности $D(q)$ справедливо

$$D(q) \geq \frac{q}{q-1} D(-\infty) \quad \text{если} \quad q < 0. \tag{67}$$

Полезными частными случаями выражений (63) и (64) являются неравенства

$$\tfrac{1}{2} D(2) \leq D(\infty) \leq D(2) \quad \text{и} \quad D(-1) \leq D(-\infty) \leq 2D(-1), \tag{68}$$

позволяющие оценить предельные размерности $D(\pm\infty)$ через $D(2)$ и $D(-1)$. Численно намного легче вычислить низкие q-размерности, чем большие q-размерности, поэтому неравенства (68) используются для проверки числовых результатов.

Наконец, согласно неравенству (62) информационная $D(1)$ и корреляционная $D(2)$ размерности мультифрактала ограничивают хаусдорфову размерность D_H снизу, т.е.

$$D(2) \leq D(1) \leq D_H = D(0). \tag{69}$$

Мультифракталы с двумя характерными масштабами длины. В качестве примера рассмотрим неоднородное канторовское множество, где причиной неоднородности является наличие нескольких пространственных масштабов, при том, что все вероятности p_i совпадают.

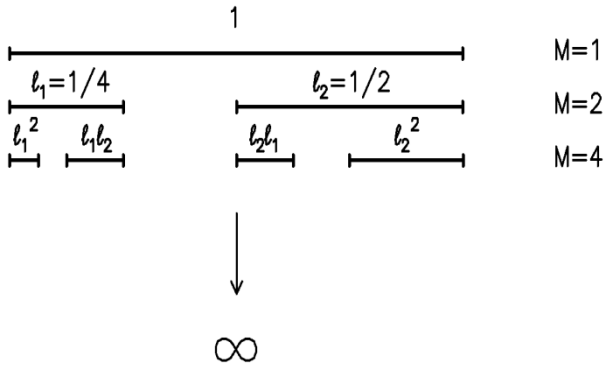

Рис 2. Неоднородное канторовское множество с двумя характерными масштабами длины l_1=1/4, l_2 =1/2 и p_1 = p_2 = 1/2.

Пусть в начале процедуры (нулевой шаг) у нас имеется множество с мерой 1 и размером 1 (например, единичный отрезок, по которому как-то распределены *N* точек нашего фрактального множества. На первом шаге заменим его двумя отрезками с длинами l_1 = 1/4 и l_2 = 1/2, примыкающими соответственно к его левому и правому концам. Обоим отрезкам припишем одинаковую меру p = 1/2.

припишем одинаковую меру p = 1/2. Затем повторим ту же процедуру с каждым из этих двух отрезков. В результате получится уже 4 отрезка с длинами $(l_1)_2$, $l_1\ l_2$, $l_2\ l_1$ и $(l_2)_2$ и одинаковыми мерами, равными 1/4. Продолжая этот процесс до бесконечности, мы получим в конце концов неоднородное канторовское множество, т. е. мультифрактал. Первые шаги этого процесса изображены ниже на Рис. 2. Чтобы определить спектр обобщенных фрактальных размерностей в этом случае, необходимо видоизменить соотношение (58), определяющее функцию $\tau(q)$, так как теперь мультифрактал характеризуется не одним масштабом, а многими.

Введём более общее определение фрактальной размерности $D(q)$. Предположим, что множество S (мультифрактальный объект) покрыто счётным числом N непересекающихся подмножеств S_i (гиперкубов) с диаметрами $\Delta_i < \Delta$ $(\Delta > 0)$. Допустим теперь, что подмножества S_i имеют размерность $(-\tau)$. Пусть вероятность того, что элемент множества S находится в S_i есть p_i. Тогда в теории мультифракталов вводится, так называемая, обобщённая статистическая сумма (Halsey и др., 1986)

$$\Gamma\left(q,\tau,\{S_i\},\Delta\right) = \sum_{i=1}^{N=N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau}, \tag{70}$$

являющаяся обобщением соотношения (56) на случай различных масштабов $\Delta_i \neq \Delta$. Обобщением размерности Хаусдорфа на случай мультифракталов является величина

$$\Gamma\left(q,\tau\right) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau} = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i \left(\frac{p_i}{\Delta_i^{D(q)}}\right)^{q-1}. \tag{71}$$

Для каждого q существует одно значение $\tau = \tau(q)$, и мера (71) имеет конечное значение (порядка единицы) при достаточно большом N лишь в случае выполнения условия $\tau(q) = (q-1)D(q)$ (см. Halsey и др., 1986). Тогда обобщенная размерность Реньи, вводимая соотношением

$$D(q) = \frac{\tau(q)}{q-1} \geq 0, \tag{72}$$

при $\tau = 0$ имеет значение $D(q) = 0$, а при $q = 0$ и $\tau(0) = 1$ совпадает с размерностью Хаусдорфа $D_H = D(0) = -\tau$. В итоге (72) представляет собой обобщённую D_0–мерную размерносъ Хаусдорфа множества

$$\Gamma\left(0,1\right) = \lim_{\Delta \to 0} \sum_{i=1}^{N(\Delta)} \Delta_i^{D(0)}. \tag{73}$$

Расчет мультифрактальных спектров размерностей. Следует заметить, что формула (57) мало пригодна для практических расчётов размерностей мультифракталов в силу ряда трудностей, связанных с предельным переходом к бесконечно малым объёмам $\Delta \to 0$. Однако задача создания алгоритма для определения фрактальной размерности Реньи существенно упрощается, если наложить некоторые ограничения на процедуру выбора иерархии покрытий (Meisel и др.,1992). Точные формулировки этого метода определения фрактальных размерностей − метода подсчёта ячеек, покрывающих фрактальное множество, − можно найти, например, в работах (Малинецкий, Потапов, 1988, 2018; Ершов, Потапов, 1995; Meisel и др.,1992; Шредер, 2001). Размерность фрактальных сред может быть эмпирически получена методом поклеточного счёта (box-counting method). Простой и быстрый алгоритм для оценки корреляционной размерности аттракторов динамической системы предложен в работе (Grassberger, Procaccia, 1983).

Покажем теперь, что между приведенными здесь мультифрактальными мерами и двухпараметрической информацией различия существует глубокая связь (Зарипов, 2010).

5. Двухпараметрическая различающая информация и мультифрактальные меры

Вывод двухпараметрической информации различия. С целью получения двухпараметрического аналога различающей информации Реньи $K_q^R(p||f)$ найдём минимум информации Кульбака−Лейблера

$$K^{KL}(u \,||\, p) \equiv k \sum_i^N u_i \ln\left(\frac{u_i}{p_i}\right) \tag{74}$$

при условии сохранения нормировки $\sum_i^N u_i = 1$ и двух мер статистической неточности (32)

$$H(u\,||\,p) \equiv \sum_i^N u_i \ln p_i\,, \quad H(u\,||\,f) \equiv \sum_i^N u_i \ln f_i\,, \tag{75}$$

а также заданности распределений $p = \{p_1, ..., p_N\}$ и $f = \{f_1, ..., f_N\}$.

Согласно вариационному принципу Джейнса, найдём безусловный экстремум функционала

$$\mathcal{L}(u) = k\sum_i^N p_i \ln\left(\frac{u_i}{p_i}\right) + k(1-q)\sum_i^N u_i \ln p_i - k\tau\sum_i^N u_i \ln f_i + k(\alpha-1)\sum_i^N u_i\,, \tag{76}$$

где $(1-q)$, τ, $(\alpha-1)$ − неопределённые множители Лагранжа. Варьируя $\mathcal{L}(u)$ по распределению u и используя равенство

$$\delta\mathcal{L} = k\sum_i^N \delta u_i \left[\ln\left(\frac{u_i}{p_i}\right) + (1-q)\ln p_i + \tau \ln f_i + \alpha\right] = 0\,, \tag{77}$$

получим искомое распределение

$$u_i = p_i \exp\left[-(1-q)\ln p_i - \tau \ln f_i - \alpha\right], \tag{78}$$

которое после нормировки принимает вид

$$u_i = p_i^q f_i^{-\tau} / \Gamma_{q\tau}(p, f)\,. \tag{79}$$

Здесь введены обобщённая статистическая сумма

$$\Gamma_{q\tau}(p, f) \equiv \sum_i^N p_i^q f_i^{-\tau} = \sum_i^N p_i \left(\frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right)^{q-1} \tag{80}$$

и величина $D(q) = \tau / (q-1)$, в которой действительные числа q и τ меняются в пределах допустимых значений.

Подставляя распределение (79) в выражения для информаций различия Кульбака, получим следующие соотношения (Зарипов, 2002):

$$K^{KL}\left(u\,||\,p\right) = k\sum_i^N u_i \left(\ln\frac{u_i}{p_i}\right) = k\left(q-1\right)\sum_i^N u_i \left(\ln\frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right) - k\ln\Gamma_{q\tau}\,, \tag{81}$$

$$K^{KL}\left(p\,\|\,u\right)=k\sum\nolimits_i^N p_i\left(\ln\frac{p_i}{u_i}\right)=k\left(q-1\right)\sum\nolimits_i^N p_i\left(\ln\frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right)+k\ln\Gamma_{q\tau}, \qquad (82)$$

из которых после простых преобразований следуют равенства

$$\frac{q}{q-1}K^{KL}\left(u\,\|\,p\right)=K_{D_q}\left(u\,\|\,f\right)-K_{q,\tau}\left(p\,\|\,f\right), \qquad (83)$$

$$\frac{1}{q-1}K^{KL}\left(p\,\|\,u\right)=K_{q,\tau}\left(p\,\|\,f\right)-K_{D_q}\left(p\,\|\,f\right). \qquad (84)$$

В выражениях (83)–(84) введены специфические различающие информации

$$K_{D_q}(u\,\|\,f)=k\sum\nolimits_i^N u_i\ln\left(\frac{u_i}{f_i^{D_q}}\right) \text{ и } K_{D_q}\left(p\|f\right)=k\sum\nolimits_i^N p_i\ln\left(\frac{p_i}{f_i^{D_q}}\right), \qquad (85)$$

а также искомый двухпараметрический аналог информации различия Реньи

$$K_{q\tau}(p\|f)=\frac{k}{q-1}\ln\Gamma_{q\tau}=\frac{k}{q-1}\ln\left(\sum\nolimits_i^N p_i^q f_i^{-\tau}\right)=$$

$$=\frac{k}{q-1}\ln\left\{\sum\nolimits_i^N p_i\left(\frac{p_i}{f_i^{D(q)}}\right)^{q-1}\right\}. \qquad (86)$$

Заметим, что при $D(q)=1$ функционалы (85) и (86) совпадают с различающими информациями Кульбака−Лейблера и Реньи:

$$K_1(u\,\|\,f)=K^{KL}(u\,\|\,f)\equiv k\sum\nolimits_i^N u_i\ln\left(\frac{u_i}{f_i}\right) \qquad (87)$$

$$K_{q,1}\left(p\,\|\,f\right)=K_q^R\left(p\,\|\,f\right)\equiv\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q f_i^{1-q}. \qquad (88)$$

Основные свойства двухпараметрической информации различия можно найти в монографии Зарипова (2010). В частности, там показано, что величи-

на $K_{q\tau}(p||f)$ является выпуклым аддитивным функционалом для независимых объектов,

$$K_{q,\tau}\left(p_{12}\,||\,f_{12}\right)=K_{q,\tau}\left(p_1\,||\,f_1\right)+K_{q,\tau}\left(p_2\,||\,f_2\right), \tag{89}$$

который при $D(q)=(q-1)^{-1}\tau(q)>1$ и $q>0$ ($D(q)<1$ и $q<0$) принимает положительные (отрицательные) значения. В равновероятном состоянии с $f_i=1/N$ формула (86) принимает вид

$$K_{q,\tau}\left(p||f\right)=\frac{k}{q-1}\ln\sum\nolimits_i^N p_i^q f_i^{D_q(1-q)}=S_N-S_q\left(p\right), \tag{90}$$

из которого следует, что энтропия Реньи меньше (больше), чем энтропия равновероятного состояния $S_N=kD_q\ln N$ при $q>0$ ($q<0$).

Связь с мультифрактальными размерностями. Покажем теперь, что полученные здесь результаты позволяют по-новому переосмыслить и интерпретировать сведения о мультифрактальных спектрах размерностей, приведенные в разд. 4.

Во-первых, из формул (71) и (80) следует, что обобщённая размерность Хаусдорфа $\Gamma\left(q,\tau\right)$ связана с обобщённой статистической суммой $\Gamma_{q\tau}(p,f)$, записанной при $f_i\equiv\Delta_i/\Delta$, следующим соотношением

$$\Gamma\left(q,\tau\right)\equiv\lim_{\Delta\to 0}\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i^q\Delta_i^{-\tau}=$$

$$=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-\tau}\sum_{i=1}^{N(\Delta)}p_i^q\left(\frac{\Delta_i}{\Delta}\right)^{-\tau}=\lim_{\Delta\to 0}\Delta^{-\tau}\Gamma_{q\tau}(p,\Delta_i/\Delta). \tag{91}$$

Во-вторых, в случае равновозможного распределения $f_i=1/\Delta$ из (86) вытекает соотношение:

$$K_{q\tau}(p||f)=\frac{k}{q-1}\ln\Delta^{\tau}\left(\sum\nolimits_i^N p_i^q\right)=\frac{k\tau}{q-1}\ln\Delta\ -S_q^R(p). \tag{92}$$

Тогда так называемая информационная размерность мультифракталов, определяемая соотношением (Halsey и др. 1986)

$$D_K = \frac{1}{k} \lim_{\Delta \to 0} \frac{K_{q\tau}(p||f)}{\ln \Delta}, \tag{93}$$

принимает, при учёте формул (91) и (57), вид

$$D_K = \frac{\tau}{q-1} - \frac{1}{k} \lim_{\Delta \to 0} \frac{S_q^R(p)}{\ln \Delta} = D(q) + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q(\Delta)}{(q-1)\ln \Delta} = D(q) + D^{HP}. \tag{94}$$

Здесь второе слагаемое совпадает с размерностью мультифракталов D^{HP}, впервые введённой в рассмотрение в работе (Hentschel, Procaccia, 1983).

При $f_i \equiv \Delta_i / \Delta$ имеет место обобщение формулы (94)

$$D_K = D(q) + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln \sum_{i=1}^{N(\Delta)} p_i^q \Delta_i^{-\tau}}{(q-1)\ln \Delta} = D(q) + \lim_{\Delta \to 0} \frac{\ln \Gamma\left(q, \tau, \{S_i\}, \Delta\right)}{(q-1)\ln \Delta}, \tag{95}$$

где статистическая сумма $\Gamma\left(q, \tau, \{S_i\}, \Delta\right)$ определяется формулой (70).

Заключение

Работа посвящена конструированию (на основе параметрических энтропии и различающей информации Реньи) статистической термодинамики неэкстенсивных систем и разработке техники получения мультифрактальных размерностей (с определением их свойств), проведённых в их взаимосвязи и взаимодополняемости. Развитый здесь подход позволяет, в частности, с единых позиций моделировать (на основе системы обобщённых гидродинамических уравнений с производными дробного порядка и замыкающих её термодинамических соотношений для фрактальных сред) сложные космологические и космогонические среды (от галактик и газопылевых астрофизических дисков до космической пыли), отличительной чертой которых является наличие динамических структур (фракталов) с нецелой топологической размерностью, степенная пространственная нелокальность силовых взаимодействий, а также эридитальность и немарковость эволюционных процессов. Дальнейшие изыскания в области вышеупомянутых приложений будут представлены в после-

дующих публикациях.

Работа выполнена при поддержке Программы Президиума РАН № 28 и грантов РФФИ № 17-02-00507 и № 18-01-00064.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

Башкиров А.Г. Энтропия Реньи как статистическая энтропия для сложных систем // Теор. и мат. физика. 2006. Т.149. №2. С. 299–317.

Бадии Р., Полити А. Численное исследование неоднородных фракталов // В сб. «Фракталы в физике»/ Пер. с анг., Под ред. Я.Г. Синая и И.М. Халатникова. - М.: Мир. 1988. С. 632-637.

Божокин С.В., Паршин Д.А. Фракталы и мультифракталы. Москва - Ижевск, РХД. 2001.128 с.

Ершов С.В., Потапов А.Б. Размерность реконструкции аттракторов и упорядочение ближайших СОСЕДЕЙ // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 1995. № 8.

Зарипов Р.Г. Самоорганизация и необратимость в неэкстенсивных системах. Казань: Фэн. 2002. 251 с.

Зарипов Р.Г. Тригонометрические энтропии в термодинамике неэкстенсивных систем // Физика. 2006. № 6. С.60-66. (Изв. высш. учебн. заведений). (Translation: Russian Physics Journal. 2006. V. 49. № 6. P. 633–641).

Зарипов Р.Г. Принципы неэкстенсивной статистической механики и геометрия мер беспорядка и порядка. Казань: Изд-во Казан. Гос. техн. ун-та. 2010. 404 с.

Зубарев Д.П. Неравновесная статистическая механика. - М.: Наука, 1971. 416 с.

Климонтович Ю.Л. Турбулентное движение и структура хаоса. Новый подход к статистической теории открытых систем. - М.: Наука, 1990. 320 с.

Колесниченко А.В., Четверушкин Б.Н. Вывод гидродинамических и квазигидродинамических уравнений для автотранспортных систем на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014. № 8. 32 с.

Колесниченко А.В. К построению неаддитивной термодинамики сложных систем на основе статистики Курадо-Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018a. № 25. 40 с.

Колесниченко А.В. К конструированию термодинамики неаддитивных сред на основе статистики Тсаллиса−Мендеса−Пластино // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018b. № 23. 28 с.

Колесниченко А.В. Модификация фундаментального уравнения Гиббса классической термодинамики на основе различающей информации Кульбака-

Лейблера // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2018с. № 36. 32 с.

Колесниченко А. В. Конструирование энтропийной транспортной модели на основе статистики Тсаллиса // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша, 2013, № 33. 23 с.

Колесниченко А.В., Маров М.Я. Моделирование процессов образования пылевых фрактальных кластеров как основы рыхлых протопланетезималей в Солнечном допланетном облаке // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2014. № 75. 44 с.

Колесниченко А.В. Критерий термической устойчивости и закон распределения частиц для самогравитирующих астро-физических систем в рамках статистики Тсаллиса // Mathematica Montisnigri. 2016. Т. 37. С. 45-75.

Кроновер Р.М. Фракталы и хаос в динамических системах.- М.: Лостмаркет. 2000. 352 с.

Кульбак С. Теория информации и статистика. - М.: Наука. 1967. 408 с.

Малинецкий Г.Г., Потапов А.В. О вычислении размерности странных аттракторов // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 1988. Т.28. № 7. С.1021–1037; U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys. 1988. V. 28. № 4. P. 39–49.

Малинецкий Г.Г., Потапов А.В. Нелинейная динамика и хаос. Основные понятия. Сер. Синергетика: от прошлого к будущему.- М.: URSS. 2018. 240 с.

Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. - М.: Институт компьютерных исследований. 2002. 656 с.

Могилевский Э.И. Фракталы на Солнце. - М.: Физматлит. 2001. 152 с.

Пиблс Ф. Дж. Э. Структура Вселенной в больших масштабах. - М.: Мир. 1983. 408 с.

Потапов А.А. Фракталы в радиотехнике и радиолокации: Топология выборки. - М.: Университетская книга. 2002. 848 с.

Потапов А.Б. Программы вычисления корреляционного показателя и оценки обобщенной энтропии по временному ряду // - М.: Изд. ИПМ АНСССР. 1991. Препринт № 27. 31 с.

Рудой Ю.Г. Обобщенная информационная энтропия и неканоническое распределение в равновесной статистической механике // Теор. и мат. физика. 2003. Т. 135. №1. С. 3–54.

Смирнов Б. М. Физика фрактальных кластеров. - М.: Наука. 1991.136 с.

Фадеев Д.К. К понятию энтропии конечной вероятностной схемы // Усп. мат. Наук. 1956. Т.11. Вып.1 (67). С. 227-231.

Федер Е. Фракталы. - М.: Мир. 1991. 260 с.

Харди Г. Г., Литтльвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. - М.: Ин.-Лит. 1948. 456 с.

Хинчин А.Я. Понятие энтропии в теории вероятностей // УМН. 1953. Т. 8. вып. 3. С. 3-20.

Чумак О.В. Энтропии и фракталы в анализе данных. Москва–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2012.168 с.

Шредингер Э. Что такое жизнь с точки зрения физики? - М.: Ин. Лит. 1947. 147 с.

Шредер М. Фракталы, хаос, степенные законы. Миниатюры из бесконечного рая; пер. с англ. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». 2001. 527 с.

Шустер Г. Детерминированный хаос. - М.: Мир. 1988. 240 с.

Abe S. Remark on the escort distribution representation of nonextensive statistical mechanics // Physics Letters A. 2000. V. 275. № 4. P. 250-253.

Beck C Upper and lower bounds on the Renyi dimensions and the uniformity of multifractals // Physica D. 1990. V. 41. P. 67-78.

Beck C., Schlogl F. Thermodynamics of chaotic systems: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press. 1993. 286 p.

Besicovitch A.S. On the Sum of Digits of Real Numbers Represented in the Dyadic System // Math. Annal. 1934. B.110. № 3. S. 321-330.

Bialas A., Czyz W. Renyi entropies of a black hole from Hawking radiation // EPL (Europhysics Letters). 2008. V. 83. № 6. P. 60009.

Daroczy Z. Generalized information function // Inform. Control. 1970. V.16. P. 36-51.

Frank T.D., Plastino A.R. Generalized thermostatics based on the Sharma-Mittal entropy and escort mean value // Eur. Phys. J. B. 2002. V. 30. P. 543–549.

Grassberger P. On the Hausdorff dimension of fractal attractors // J. Statist. Phys. 1981. V. 26. № 1. P. 173-179.

Grassberger P. Generalizations of the Hausdorff dimension of fractal measures // Physics Letters A. 1985. V. 107. № 3. P. 101-105.

Grassberger P., Procaccia I. Characterization of strange attractors // Phys. Review letters. 1983. V. 50. № 5. P. 346-349.

Grassberger P., Procaccia I. Dimensions and entropies of strange attractors from a fluctuating dynamics approach **//** Physica D: Nonlinear Phenomena. 1984. V. 13. № 1-2. P. 34-54.

Halsey T.C., Jensen M.H., Kadanoff L.P., Procaccia I., Shraiman B.I. Fractal measures and their singularities: The characterization of strange sets // Phys. Rev. A. 1986. V. 33. P. 1141–1151.

Hausdorff F. Dimension und Ausseres Mass // Math. Annal. 1919. B. 79. S. 157-179.

Havrda J., Charvat F. Quantification Method of Classification Processes // Kybernetika. 1967. V. 3. P. 30-35.

Hentschel H.G.E., Procaccia I. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors // Physica D: Nonlinear Phenomena. 1983. V. 8. № 3. P. 435-444.

Jaynes E.T. Information theory and statistical mechanics // В сб. «Statistical Physics». Brandeis Ltctures. 1963. V. 3. P.160.

Jizba P., Arimitsu T. Observability of Renyi's entropy // Physical Review E. 2004. V. 69. № 2. id. 026128.

Johal R.S., Rai R. Nonextensive thermodynamic formalism for chaotic dynamical systems // Physica A. 2000. V. 282. P. 525-535.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modeling of aggregation of fractal dust clusters in a laminar protoplanetary disk // Solar System Research. 2013. V. 47. № 2. P. 80-98.

Kolesnichenko A.V., Marov M.Ya. Modification of the jeans instability criterion for fractal-structure astrophysical objects in the framework of nonextensive statistics **//** Solar System Research. 2014. V. 48. № 5. P 354–365.

Kropivnitskaya A.,Rostovtsev A. R'enyi statistics in high energy particle production // 2003. /eprint arXiv:hep-ph/0309287.

Kullback S., Leibler R.A. On information and sufficiency // Ann. Math. Statist. 1951. V. 22. P. 79-86.

Landsberg P.T. Entropies Galove! // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 46–49.

Landsberg P.T., Tranah D. Thermodynamics of non-extensive entropies I. // Collective Phenomena. 1980. V. 3. P. 73-80.

Landsberg P.T., Vedral V. Distributions and channel capacities in generalized statistical mechanics // Phys. Lett. A. 1998. V. 247. P. 211–216.

Lenzi E. K., Mendes R. S., Silva L. R. Statistical mechanics based on Renyi entropy // Physica. A. 2000. V. 280. P. 337-345.

Lorenz E.N. Deterministic Nonperiodic Flow // Journal of Atmospheric Sciences. 1963. V. 20. № 2. P.130-148.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid. Mech. 1974. V. 62. P. 331-358.

Mandelbrot B.B. Les Objects Fractals. Forms, Hazard et Dimension. Paris: Flammarion. 1975. 195 p.

Mandelbrot B.B. Fractals: Form, Change and Dimension. San Francisco: Freeman. 1977. 365 p.

Mandelbrot B.B. The Fractals Geometry of Nature. New York: Freeman, 1982. 460 p.

Mandelbrot B.B. Intermittent turbulence in self-similar cascades: divergence of high moments and dimension of the carrier // J. Fluid Mech.1974. V. 62. P. 331-

358

Martinez S., Nicolas F., Pennini F., Plastino A. Tsallis'entropy maximization procedure revisited // Physica A. 2000. V. 286. P. 489-502.

Meisel L., Johnson M., Cote P.J. Box-counting multifractal analysis // Phys. Rev. A 45. 1992. P. 6989-6996.

Moon F.C., Li G.-X. The fractal dimension of the two-well potential strange attractors // Physica D. 1985. V. 17. № 1. P. 99-108.

Nagy Á., Romera E. Maximum Rényi entropy principle and the generalized Thomas-Fermi model // Physics Letters A. 2009. V. 373. № 8-9. P. 844-846.

Nath P. On Measures of Error in Information // J. Math. Sci. 1968. V. 3. P. 1-16.

Nath P. On Coding Theorem Connected with Rényi's Entropy // Inform.and Contr. 1975. V. 29. P. 234-242.

Nonextensive statistical mechanics and thermodynamics: Bibliography / http:// tsallis.cat.cbpf.br/biblio.htm.

Parvan A. S., Biro T. S. Thermodynamical limit in non-extensive Renyi statistics // Physics Letters A. 2005. V. 340. № 5-6. P. 375-387.

Peebles P.J.E.The Large-Scale Structure of the Universe. – Princeton: Princeton University Press.1980. 435 p.

Rathie P.N., Kannappan Pl. A Directed-Divergence Function of Type β // Inform. and Contr. 1972. V. 20. P. 38-45.

Renyi A. On Measures of Entropy and Information, in Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. Prob. 1960. V. 1. University of California Press. Berkeley, Los Angeles. 1961. P. 547-561.

Renyi A. Probability Theory. Amsterdam: North-Holland Publ. Co., 1970. 573 p.

Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence//Communications in Mathematical Physics. 1971. V. 20. № 3. P. 167-192.

Sharma B.D., Mittal D.P. New Nonadditive Measures of Relative Information // J. Comb. Inform. and Syst. Sci. 1977. V.2. P.122–133.

Taneja I.J. On Generalized Information Measures and Their Applications. Chapter in: Adv. Elect. and Elect. Physics, Ed. P.W. Hawkes. 1989. V. 76. P. 327-413.

Taneja I.J. New Developments in Generalized Information Measures // Chapter in: Advances in Imaging and Electron Physics. Ed. P.W. Hawkes. London: Academic Press. 1995. V. 91. P. 37-135.

Tarasov V.E. Fractional hydrodynamic equations for fractal media // Annls of Physics. 2005. V. 318. № 2. P. 286-307.

Tarasov V.E. Fractional dynamics: Applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media // Springer. Higher Education Press. 2010. 516 p.

Tsallis C. Possible Generalization of Boltzmann-Gibbs-Statistics // J. Stat. Phys. 1988. V. 52. № 1/2. P. 479–487.

Tsallis C. Nonextensive thermostatistics and fractal // Fractals. 1995. V. 3. P. 541-554.

Tsallis C. Nonextensive Statistic: Theoretical, Experimental and Computational Evidences and Connections // Brazilian J. Phys. 1999. V. 29. № 1. P. 1-35.

Tsallis C. Nonextensive Statistical Mechanics and Thermodynamics: Historical Backgroud and Present Status // Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications, ed. S. Abe and Y.Okamoto, Series Lecture Notes in Physics. Berlin, New York, Heidelberg: 2001. Springer-Verlag. P. 3-99.

Tsallis C. Classical and Quantum Complexity and Nonextensive Thermodynamics // Chaos, Solitons and Fractals. 2002. V. 13. P. 371-391.

Tsallis C. Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics. Approaching a Complex World. New York: Springer. 2009. 382 p.

Tsallis C., Mendes R.S., Plastino A.R. The role of containts within generalized nonextensive statistics // Physica A. 1998. V. 261. P. 534–554.

Zaripov R. Evolution of the Entropy and Renyi Difference Information during Self-Organization of Open Additive Systems // Russian Physics Journal. 2005. V. 48. № 3. P. 267-274.

Оглавление

Введение 3

1. Некоторые статистические характеристики энтропии и различающей информации Реньи 7
2. Экстремум энтропии Реньи и негиббсовое равновесное распределение. Термодинамические соотношения 17
3. Определения фрактала и фрактальной размерности 25
4. Континуум мультифрактальных размерностей Реньи 26
5. Двухпараметрическая различающая информация и мультифрактальные меры 34

Заключение 38

Список литературы 39