ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 266 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Ахметшин Р.З.

Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Ахметшин Р.З. Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 266. 31 с. doi:10.20948/prepr-2018-266
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-266

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

Р.З. Ахметшин

Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли

Москва — 2018

Ахметшин Р.З.

Многовитковые траектории с учетом пауз в работе ЭРД малой тяги при попадании КА в тень Земли

Рассматриваются многовитковые траектории космического аппарата (КА) с электроракетными двигателями (ЭРД) малой тяги с питанием от солнечных батарей. Предполагается, что при попадании КА в тень Земли тяга обнуляется. Решается т.н. «неполная» краевая задача, без учета условий оптимального пересечения границ тени. На нескольких примерах перелетов на геостационарную орбиту (ГСО) показано, как сильно могут влиять паузы в работе ЭРД на затраты рабочего вещества, продолжительность и угловую дальность перелета.

Ключевые слова: многовитковые траектории, космический аппарат, малая тяга, геостационарная орбита, тень Земли

Rauf Zulfarovich Akhmetshin

Multi-orbital trajectories with zero low thrust when spacecraft gets into the Earth shadow

Multi-orbital trajectories of spacecraft with electro-rocket engines of low thrust and solar batteries are considered. It is supposed that low thrust become zero when spacecraft gets into the Earth shadow. On some examples of flight to geostationary orbit it is analyzed how large may be the influence of pauses in the low thrust.

Key words: multi-orbital trajectories, spacecraft, low thrust, geostationary orbit, Earth shadow

Оглавление

Модель тени 3
Номинальные траектории 4
Параметры задачи 5
Портрет траекторий с тенью 6
t_0-портреты с тенью для «средней» траектории 7
Ω_0-портреты с тенью для «средней» траектории 11
Портреты с тенью для других траекторий 15
Положение участков тени на витках 19
Пересечение «цилиндра» тени космическим аппаратом 22
Краевые задачи 26
Примеры решения «неполной» краевой задачи с тенью 27
Основные результаты 29
Литература 30

Вопрос учета влияния тени при проектировании многовитковых перелетов с малой тягой так или иначе затрагивался в различных публикациях. Одной из самых ранних работ, по-видимому, является [1], из более поздних – работы [2-8]. С целью получить хорошие по затратам рабочего вещества траектории используются как прямые методы – с параметрическим заданием функций управления и градиентным спуском в пространстве параметров [8], так и непрямые – с решением краевых задач. Из-за сложности последних обычно применяются какие-либо упрощения – используются локально-оптимальные или "квазиоптимальные" законы управления [5], численное осреднение уравнений движения [1,3,6]. В работе [5] предлагается управление с обратной связью, которое способно нивелировать различные возмущения, в том числе влияние тени.

В данной работе решается краевая задача без использования упомянутых выше упрощений, но в ней не учитываются условия оптимального пересечения космическим аппаратом границ тени.

Будем рассматривать движение в центральном ньютоновом поле Земли космического аппарата с электроракетными двигателями малой тяги, с питанием от солнечных батарей. На направление тяги не накладывается ограничений. Если не учитывать гравитационное влияние Солнца и Луны и другие возмущающие факторы, то уравнения оптимального движения КА будут вида [9]:

$$d\mathbf{x} / dt = \boldsymbol{F}\,(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) , \quad d\boldsymbol{\lambda} / dt = \boldsymbol{\Phi}\,(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}) ,$$

где t – время, $\mathbf{x} = < \varphi, m, h, y, z, v, w >$ – вектор фазовых переменных, $\boldsymbol{\lambda} = < \lambda_\varphi, \lambda_m, \lambda_h, \lambda_y, \lambda_z, \lambda_v, \lambda_w >$ – вектор сопряженных переменных. Здесь m – масса КА, а φ, h, y, z, v, w – равноденственные переменные, которые определяются через гравитационную постоянную Земли μ_E и оскулирующие переменные p, e, θ, ω, Ω, i формулами:

$$\mathrm{h} = (\mu_E / \mathrm{p})^{1/2} , \; y = e \cdot \cos(\omega + \Omega) , \; v = \cos\Omega \cdot \tan(i / 2) ,$$
$$\varphi = \theta + \omega + \Omega , \; z = e \cdot \sin(\omega + \Omega) , \; w = \sin\Omega \cdot \tan(i / 2) .$$

Будем предполагать, что если КА попадает в тень Земли, то тяга обнуляется, но вне участков тени ЭРД работают без выключений и величина тяги постоянна.

Модель тени

Будем использовать модель “цилиндрической” тени.

На рис. 1 в небесной системе координат с началом O в центре Земли обозначено: C – Солнце, $\mathbf{R}_S$ – радиус-вектор Солнца; A, A' – положения КА; B, B' – проекции тт. A, A' на направление OC; $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ – радиус-векторы КА; R_E = 6378.14 км – радиус Земли.

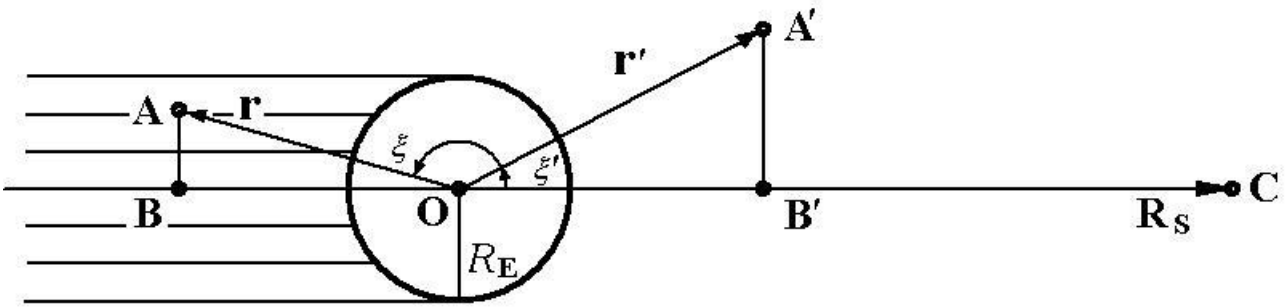

Рис. 1. Модель “цилиндрической” тени.

При $(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{R}_S) = r' \cdot R_S \cdot \cos \xi' > 0$ – КА однозначно вне тени Земли.

При $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) = r \cdot R_S \cdot \cos \xi < 0$ – КА может быть в тени Земли.

Здесь обозначено $r' = |\mathbf{r}'|$, $r = |\mathbf{r}|$, $R_S = |\mathbf{R}_S|$.

Из рис. 1 следует:

$$|OB| = |r \cdot \cos \xi|, \quad OB^2 = |r \cdot \cos \xi|^2 = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2 .$$

$$AB^2 = r^2 - OB^2 = r^2 - (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2 ,$$

Тень будет, если $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) < 0$ и $AB^2 < R_E^2$, или

$$1 - (R_E^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2) / r^2 < 0 .$$

Определим функцию тени Sh следующим образом:

при $R_E + h_{\min} < r$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) < 0$: $\quad Sh = 1 - (R_E^2 + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S)^2 / R_S^2) / r^2$,

при $R_E + h_{\min} < r$, $(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}_S) \geq 0$: $\quad Sh = 1 - R_E^2 / r^2$.

Условие $R_E + h_{\min} < r$, где можно взять, например, $h_{\min} = 100$ км, – естественное, само собой разумеющееся. Если еще доопределить Sh:

при $R_E + h_{\min} \geq r$: $\quad Sh = 1 - R_E^2 / (R_E + h_{\min})^2$,

то функция тени будет определена во всем пространстве, будет непрерывной, и ее можно будет использовать для определения областей тени и их границ.

Критерий того, что КА находится в тени Земли: $Sh < 0$. В результате для КА с ЭРД и солнечными батареями имеем: если $Sh < 0$ – тяга нулевая, иначе тяга максимальная.

Номинальные траектории

Анализ влияния тени будем проводить сравнением многовитковых траекторий перелета на геостационарную орбиту с тенью и траекторий «номинальных», т.е. оптимальных траекторий перелета без выключения тяги в тени. В качестве таковых возьмем траектории перелета с начальных орбит, представленных в табл. *1*, – тех же, что и в работе [10]. Характеристики соответствующих номинальных траекторий приведены в табл. *2*.

Таблица 1

Примеры начальных орбит, с которых осуществляется перелет на ГСО с помощью малой тяги

	H_π [тыс. км]	H_α [тыс. км]	R_π [тыс. км]	R_α [тыс. км]	e	i [град]	T [сут]
1	23	55.6	29.371	61.971	0.3569	4	1.124
2	9.2	76.8	15.571	83.171	0.6846	13	1.264
3	2.793	78.8	9.164	85.171	0.8057	26	1.180
4	0.793	79.8	7.164	86.171	0.8465	41	1.161
5	0.793	68.94	7.164	75.311	0.8263	46.5	0.965

H_π, R_π – высота и радиус перигея, H_α, R_α – высота и радиус апогея, e – эксцентриситет, i – наклонение, T – период.

Таблица 2

«Номинальные» траектории перелета на ГСО (в отсутствие возмущений)

	1	2	3	4	5
Δi [град]	4	13	26	41	46.5
N [витки]	65	157	232	281	103
T [сут]	69.1	180	269.7	343.9	120.3
$M_{КА}$[кг]	4287	5548	6397	7074	2325
$M_{РВ}$ [кг]	186.3	485.3	727.2	927.3	324.2

Δi – изменение наклонения, N – количество витков, T – продолжительность перелета, $M_{КА}$ – масса КА, $M_{РВ}$ – затраты рабочего вещества.

Первые четыре траектории по продолжительности перелета можно условно назвать так: 1) «короткая» – 2.3 месяца, 2) «средняя» – 6 месяцев, 3) «длинная» – 9 месяцев, и 4) «очень длинная» – почти год (11.5 месяцев). Последнюю (4 месяца) можно назвать траекторией перелета «легкого» КА.

Параметры задачи

Семейство траекторий с тенью зависит от ряда параметров, часть из которых мы зафиксируем. Во-первых, оно зависит от положения Солнца на орбите (над или под экватором в небесной системе координат), т.е. от начального момента времени t_0 (измеряется в сутках от 0^h00^m 01.01.2018 г). Во-вторых, от положения начальной орбиты в пространстве, которое задается двумя параметрами: долготой восходящего узла Ω_0 и угловым расстоянием

перицентра от узла ω_0. Параметр ω_0 мы положим равным нулю (см. [3]). В-третьих, от положения КА на начальной орбите в момент старта с нее, т.е. от угла θ_0 – истинной аномалии. Параметр θ_0 мы также положим равным нулю, т.е. будем считать, что в начальный момент времени КА находится в перигее орбиты. Еще один параметр – количество витков N – мы либо будем фиксировать, либо выбирать оптимальным. В результате, семейство траекторий с тенью будет зависеть от двух параметров: t_0 и Ω_0.

«Портрет» траекторий с тенью

Номинальные траектории из табл. 2 довольно существенно различаются как по характеристикам начальной орбиты, так и по продолжительности перелета и по угловой дальности (количеству витков). В первую очередь возникают следующие вопросы: как много участков с тенью может быть на траектории, на каких витках эти участки имеются, в какой именно части витка, как конкретно и за какое время КА пересекает «цилиндр» тени? Возможны различные способы представления участков тени.

Простейший из них – отметить витки с тенью, например, черными квадратиками, как это сделано на рис. 2. По оси ординат у нас отсчитываются номера витков, по оси абсцисс – либо параметр t_0 (при заданном значении Ω_0), либо параметр Ω_0 (при заданном значении t_0). Назовем рис. 2 «t_0-портретом» траекторий с тенью. Причем такой портрет можно представить и для траектории, на которой в области тени тяга обнуляется, и на траектории, которая проходит область тени без выключения тяги, другими словами, – на номинальной траектории.

Все портреты в этом препринте представлены для номинальных траекторий. Напомним, что с изменением параметра t_0 номинальная траектория и ее положение в небесной системе координат не меняются, но меняется положение Солнца. С изменением Ω_0 изменяется положение номинальной траектории в пространстве, но конфигурация самой траектории полностью сохраняется (в том числе и затраты рабочего вещества на перелет). При этом и в первом и во втором случае участки тени на траектории смещаются.

На рис. 2 дан портрет для короткой траектории (траектория 1 из табл. 2) с фиксированным значением параметра $\Omega_0 = 0^0$ и меняющимся на интервале в один год с шагом в 5 суток параметром t_0. Для значений $t_0 \in$ [97-173] и $t_0 \in$ [304-353] участков с тенью на траектории нет вообще. Для остальных значений t_0 участки с тенью есть, причем их количество может меняться от 1 (для t_0 = 96, 174, 354 сут) до 59 (224, 225, 226 сут). Видно, что во всех случаях витки с тенью представляют собой группу, или серию с последовательными номерами.

На рис. 3 дан портрет для той же траектории с фиксированным значением параметра t_0 = 0 сут (0^h00^m 01.01.2018 г) и меняющимся в диапазоне 0^0-360^0 с шагом в 5^0 параметром Ω_0 . Как видно, эти портреты очень сильно различаются. Назовем рис. 3 «Ω_0-портретом» траекторий с тенью.

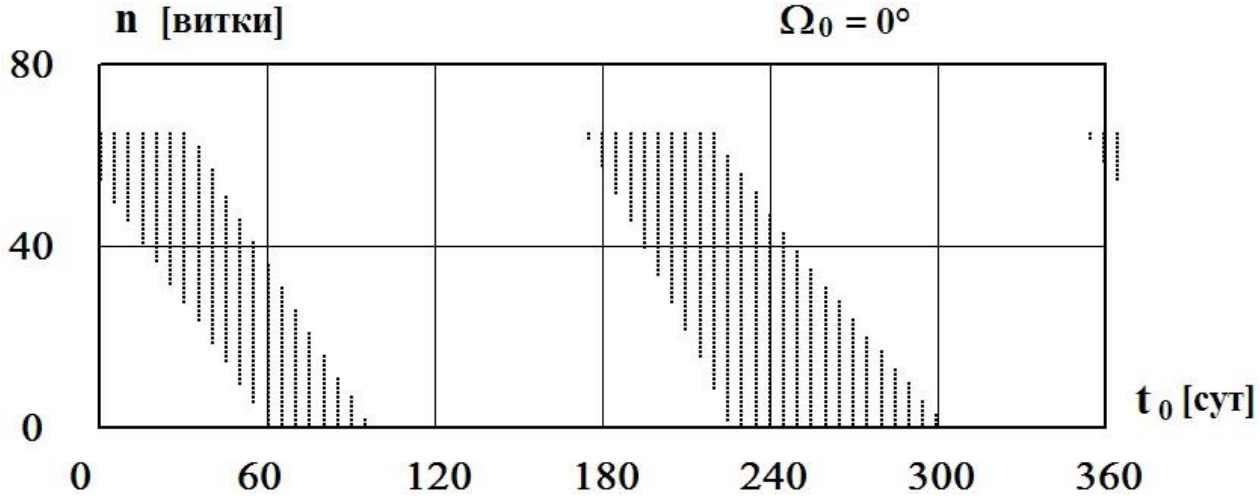

Рис. 2. t_0-портрет номинальной «короткой» (65 витков) траектории с тенью при изменении даты старта t_0 на интервале в один год; параметр $\Omega_0 = 0^0$.

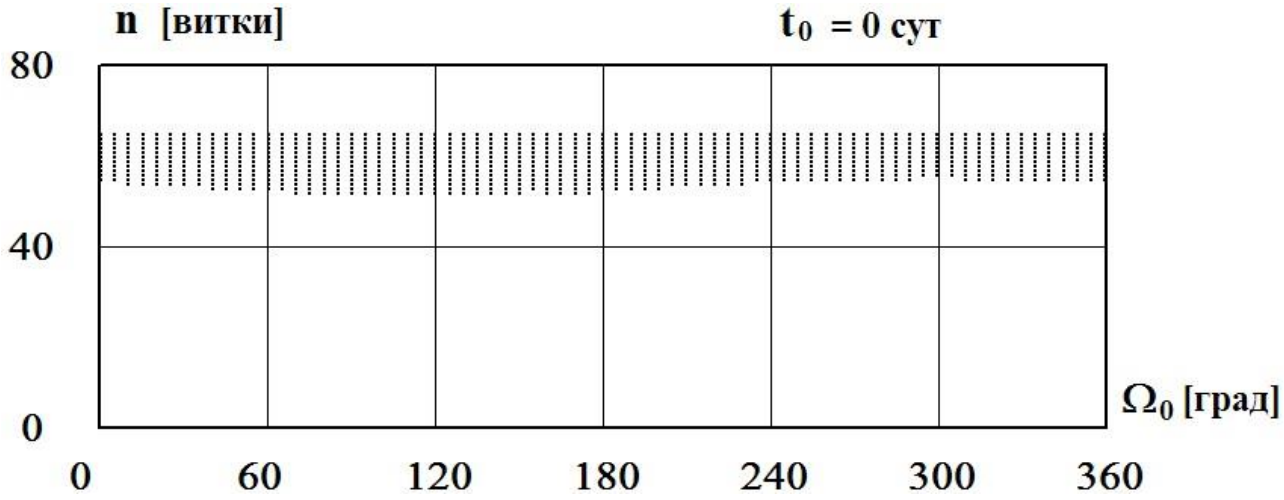

Рис. 3. Ω_0-портрет номинальной «короткой» траектории с тенью при изменении параметра Ω_0 в диапазоне 0^0-360^0; дата старта $t_0 = 0$ сут.

t_0-портреты с тенью для средней траектории

На рис. 4-9 даны t_0-портреты с тенью для средней траектории (157 витков).

Портреты приведены для $\Omega_0 = 0^0$, 45^0, 90^0, 180^0, 270^0, 315^0 и позволяют проследить, как меняется картина с изменением параметра Ω_0.

Как видно, картины на этих портретах качественно схожи, хотя различие есть. В отличие от портретов для короткой траектории, на средней всегда есть витки с тенью. При этом может быть либо одна группа витков с тенью, либо две. Одна группа может быть и в начале траектории, и в середине, и в конце. Если группы две, то одна может быть в начале, а вторая в конце, либо одна в середине, а вторая – либо в начале, либо в конце. Двух групп в середине траектории либо трех групп витков с тенью нет.

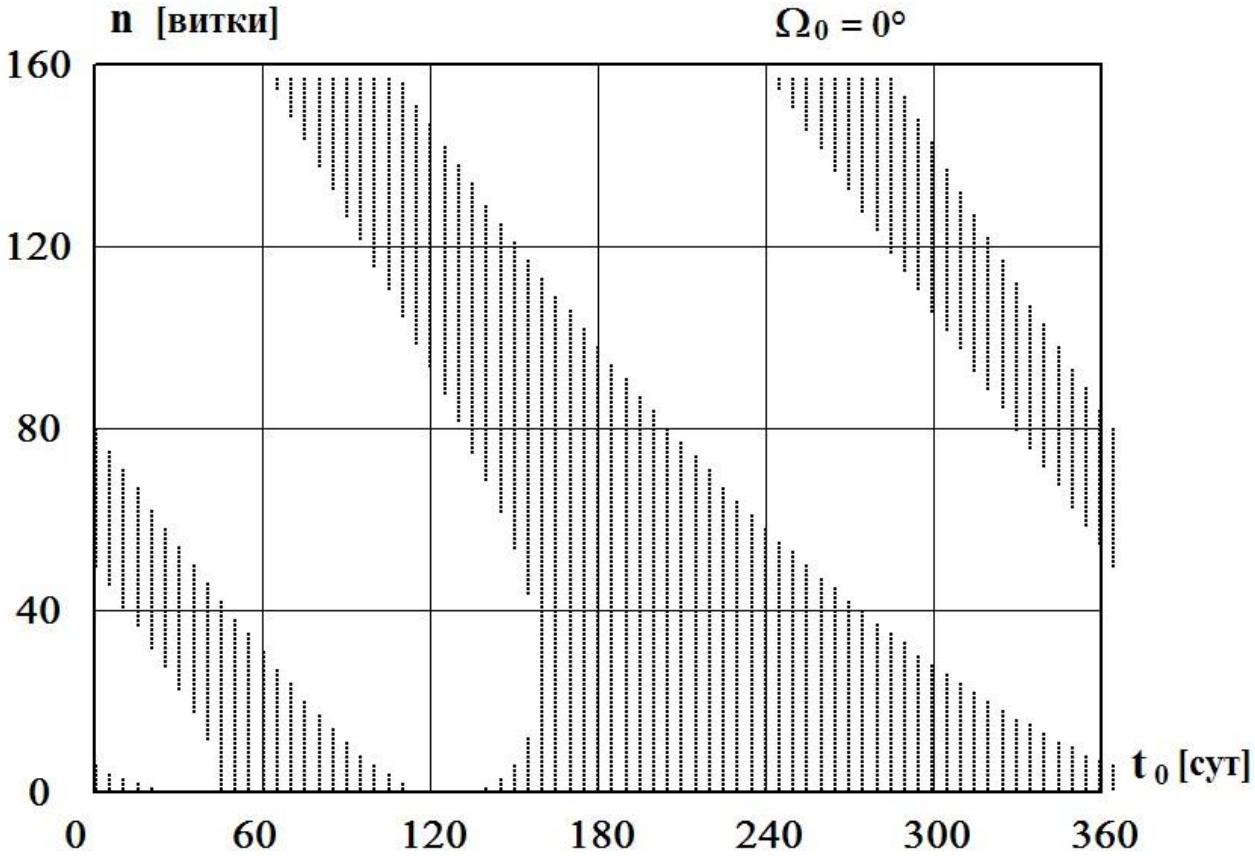

Рис. 4. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 0^0$.

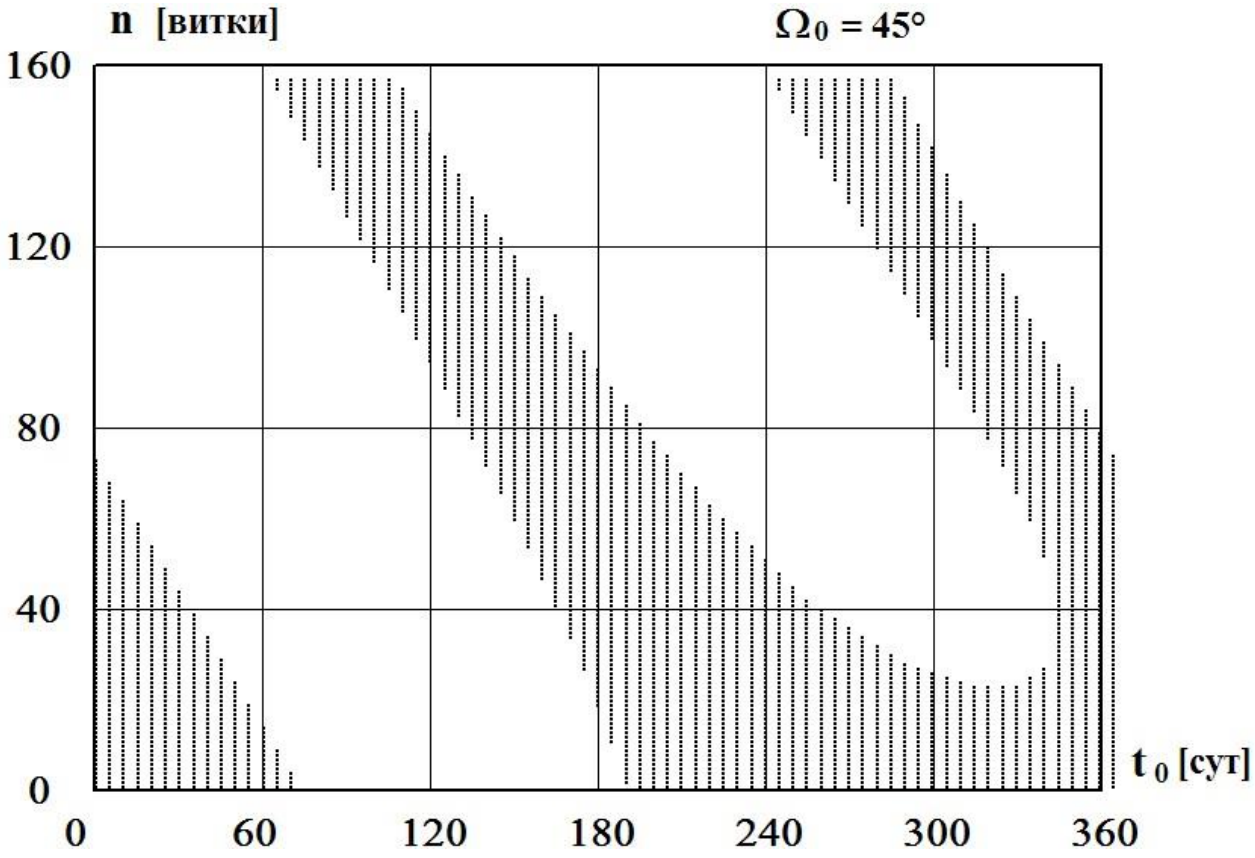

Рис. 5. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 45^0$.

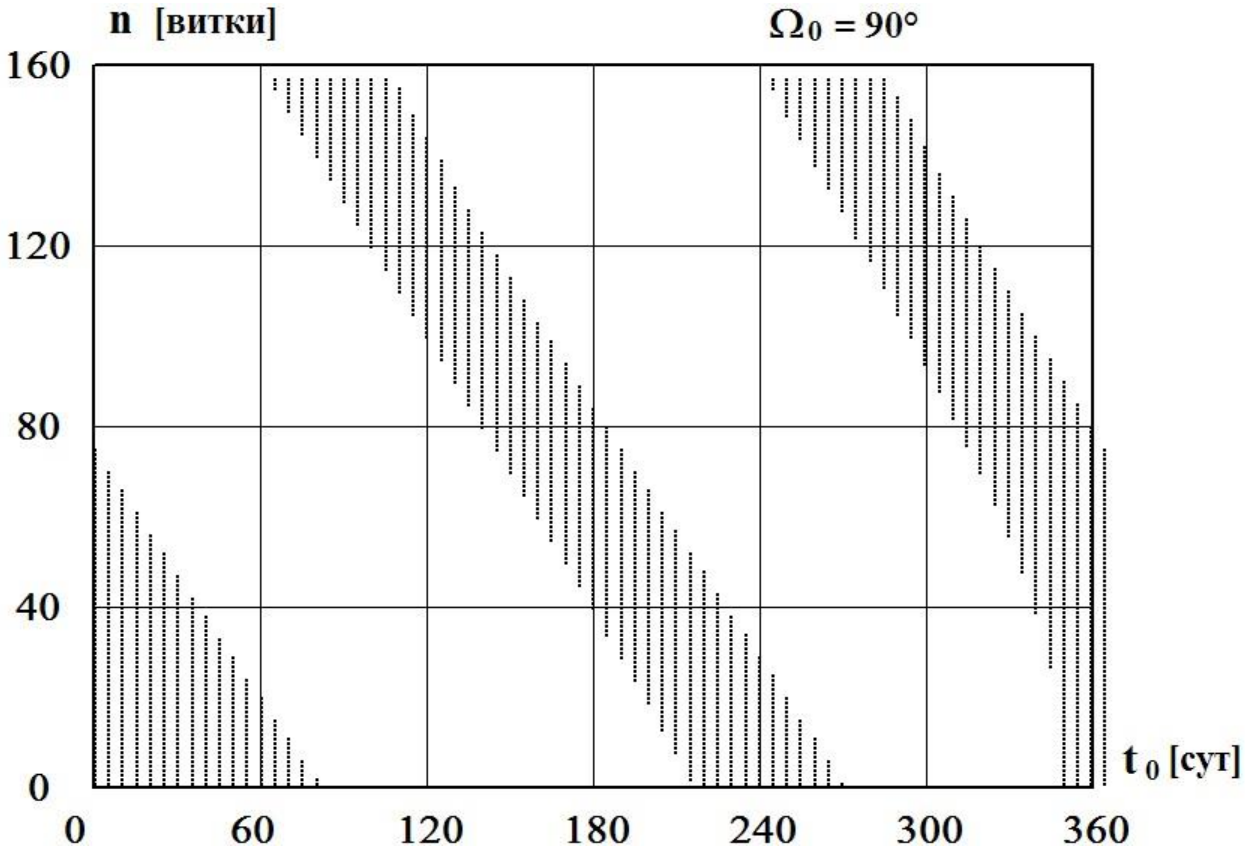

Рис. 6. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 90^0$.

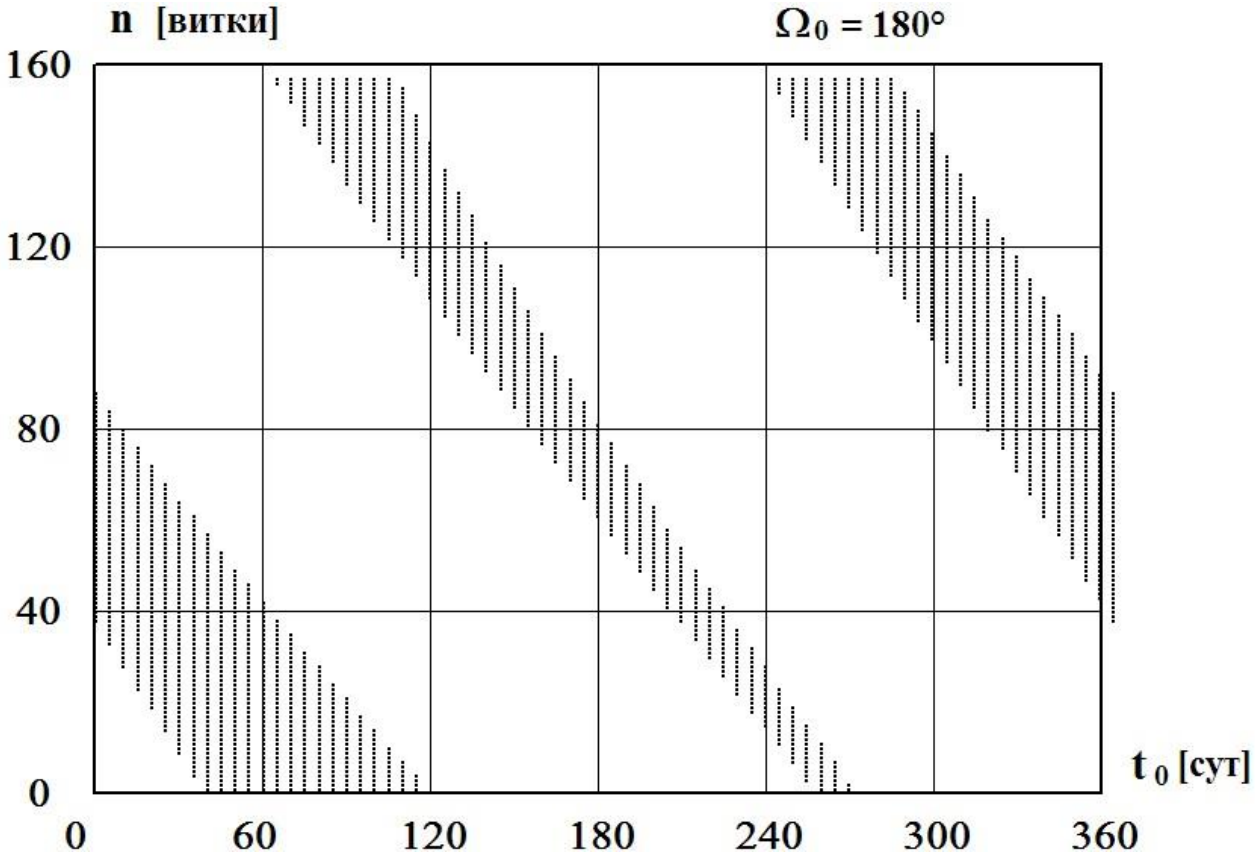

Рис. 7. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 180^0$.

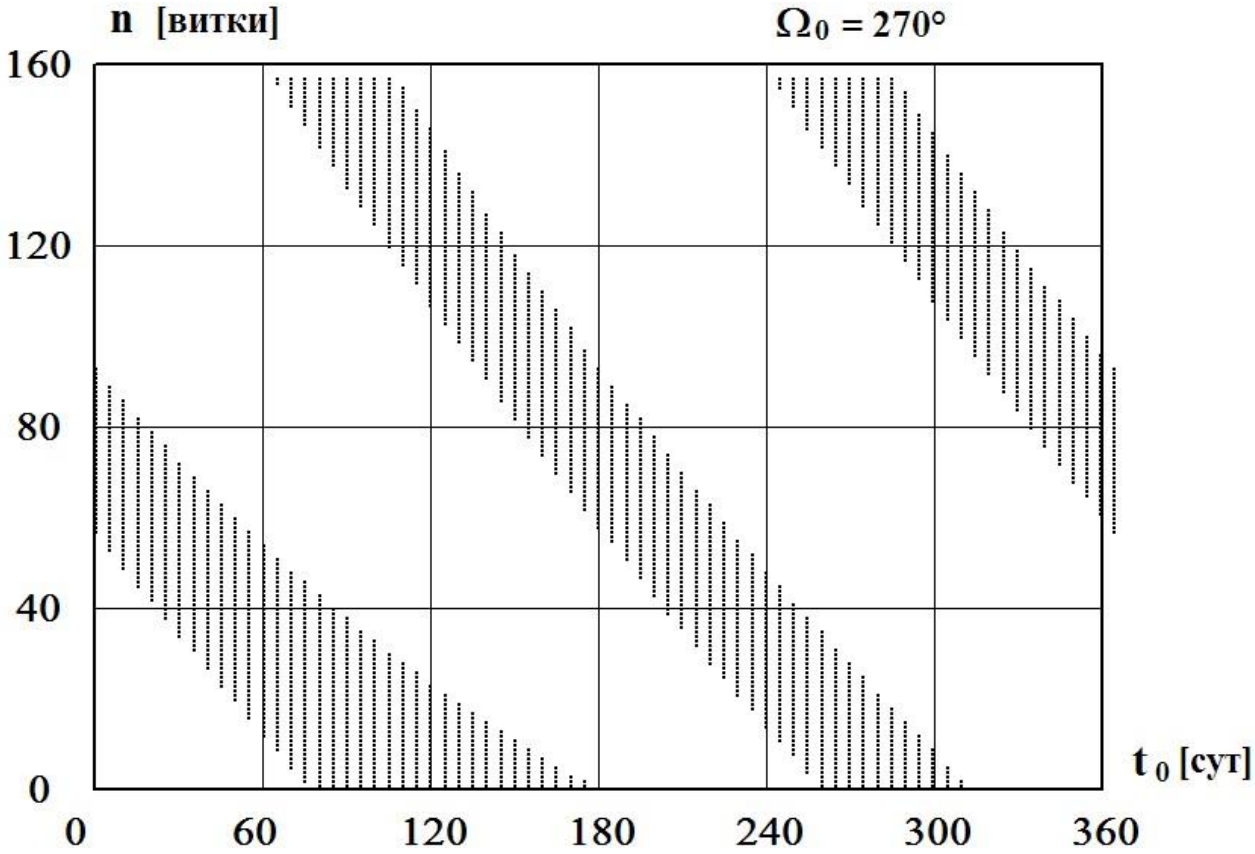

Рис. 8. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 270^0$.

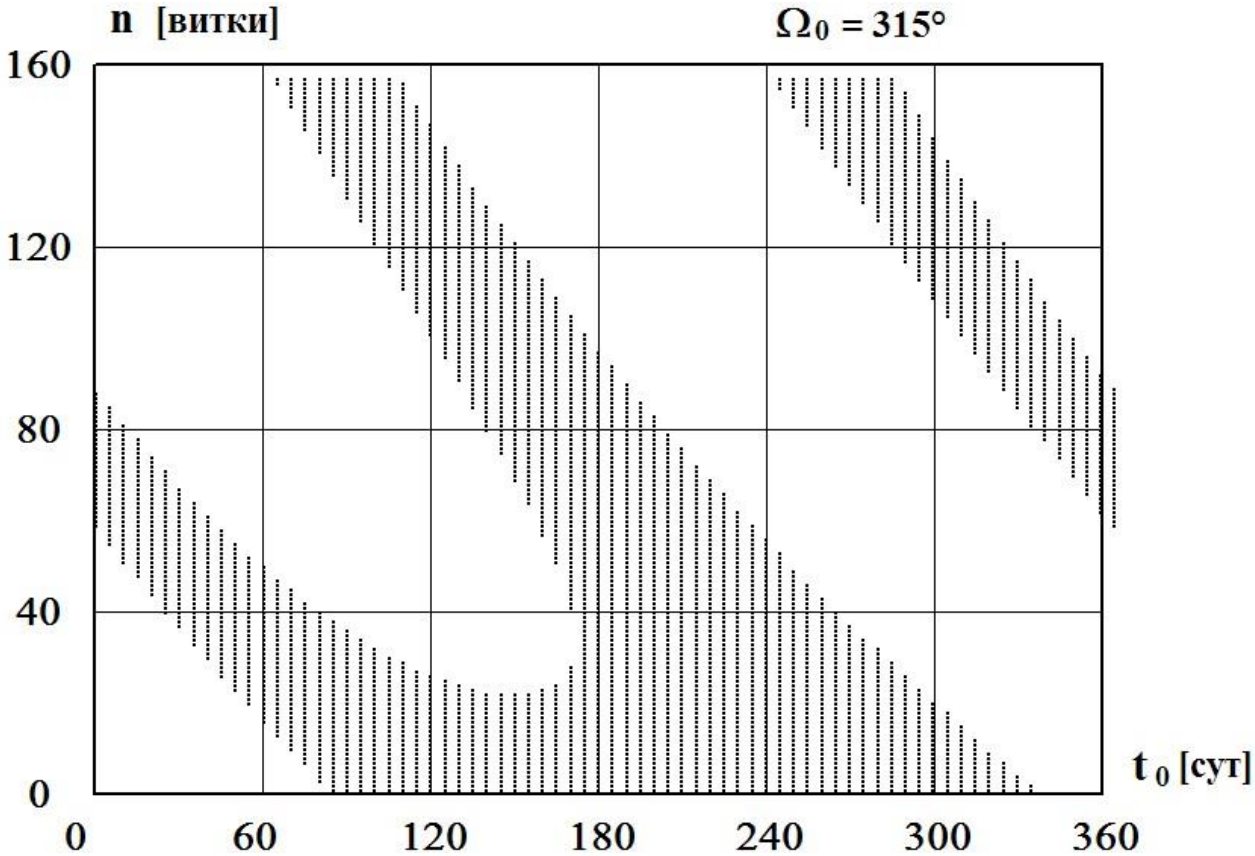

Рис. 9. t_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; $\Omega_0 = 315^0$.

Ω_0-портреты с тенью для средней траектории

На следующих семи рисунках (рис. 10-16) для той же траектории даны Ω_0-портреты с тенью, для t_0 = 0, 46 (≈ 1/8 года), 91 (≈ четверть года), 120, 150, 183 (≈ полгода), 274 (≈ три четверти года) суток. Они позволяют проследить, как меняется картина с изменением начального времени t_0. Как видно, от портрета к портрету картина меняется более существенно, чем в предыдущем случае.

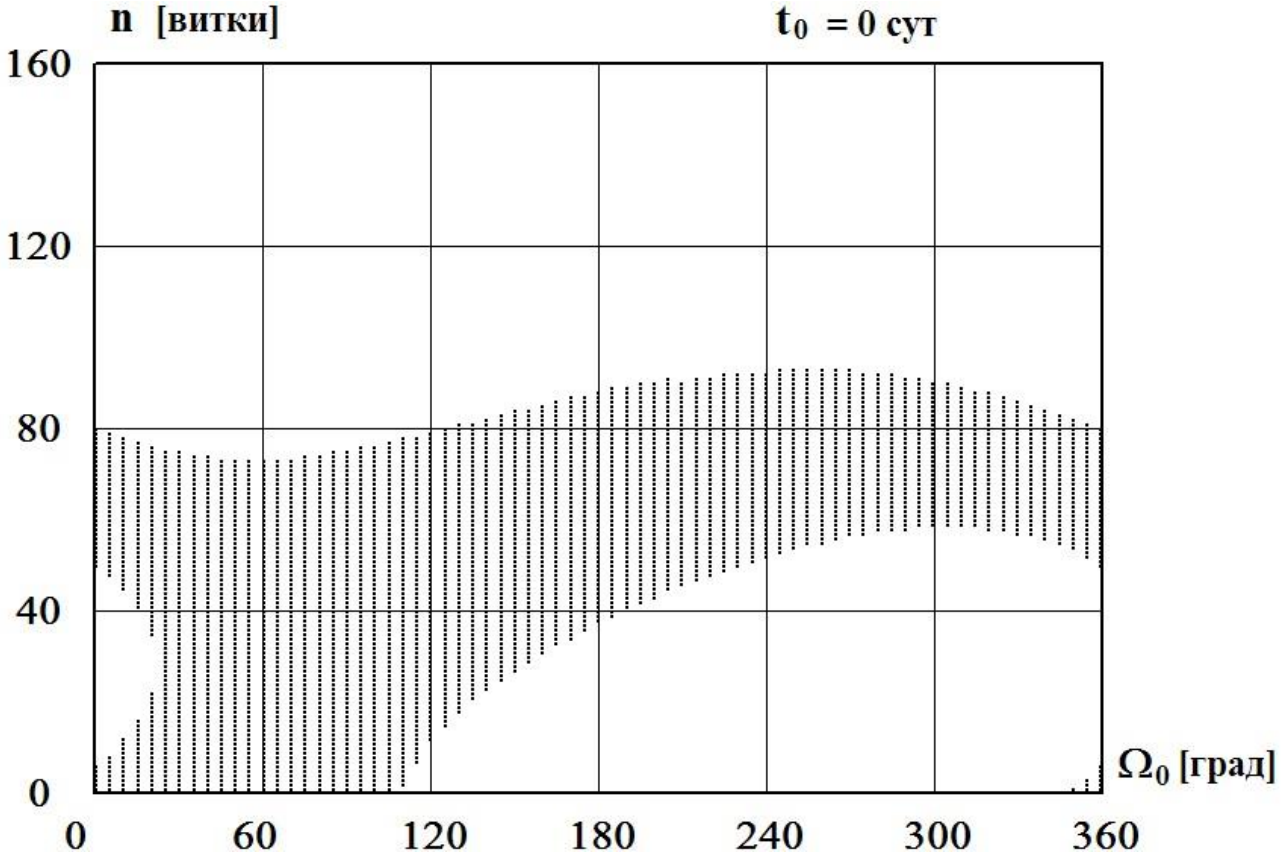

Рис. 10. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 0 сут.

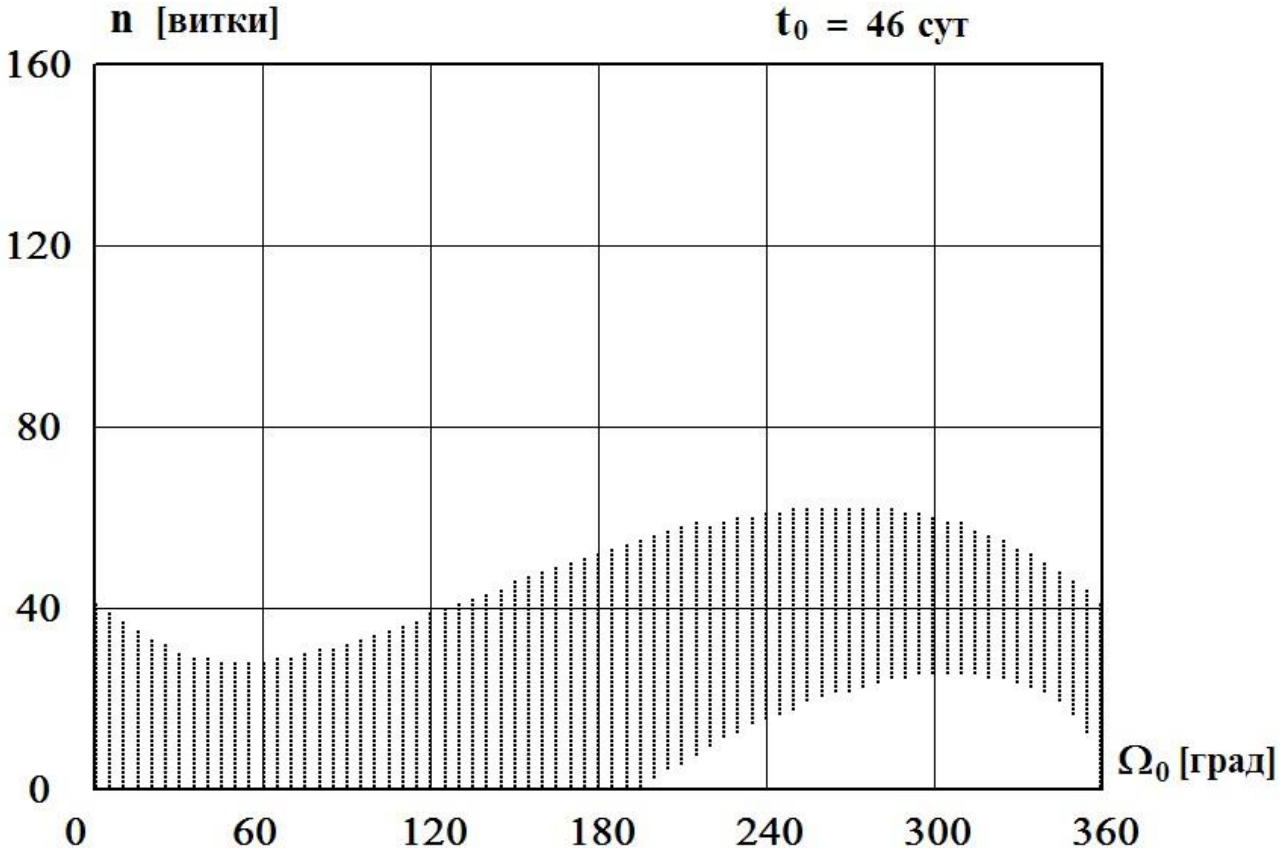

Рис. 11. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 46 сут.

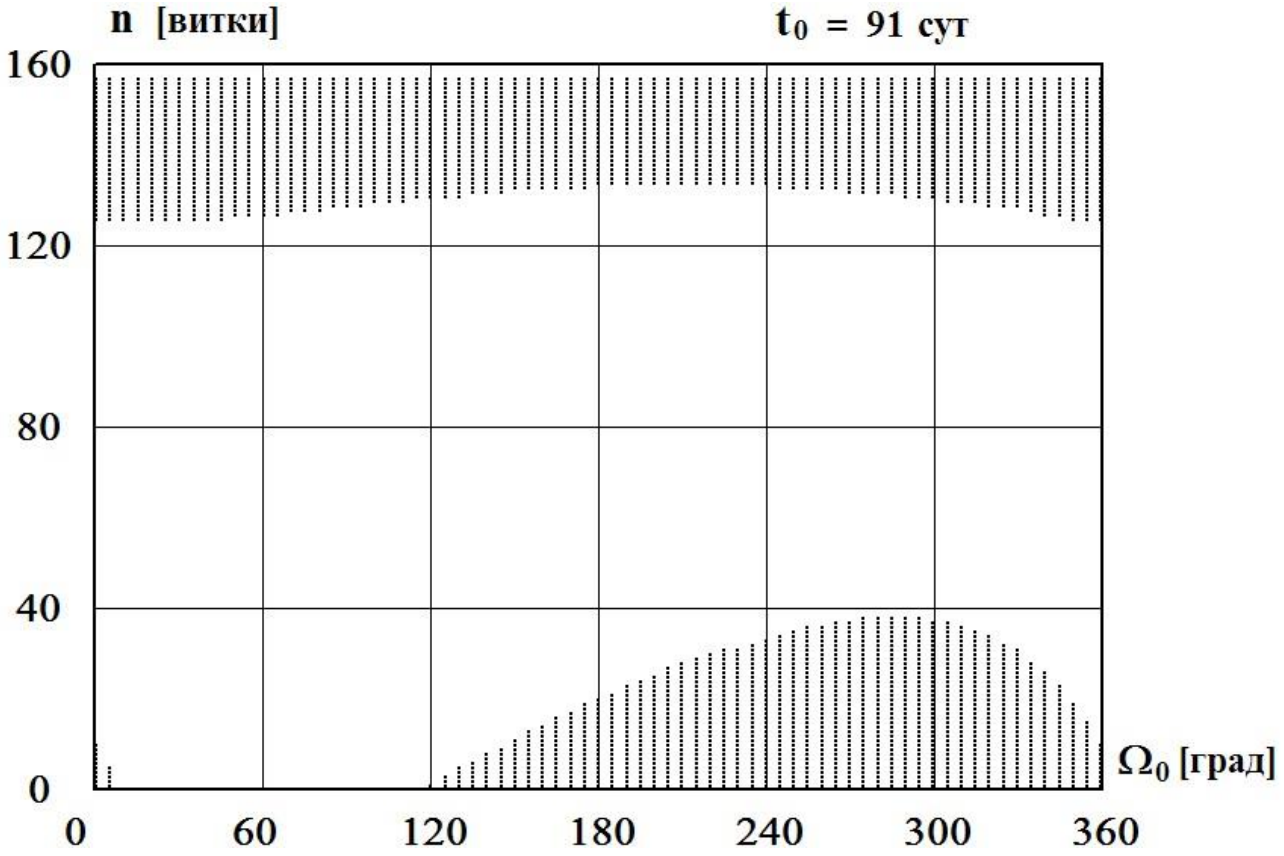

Рис. 12. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 91 сут.

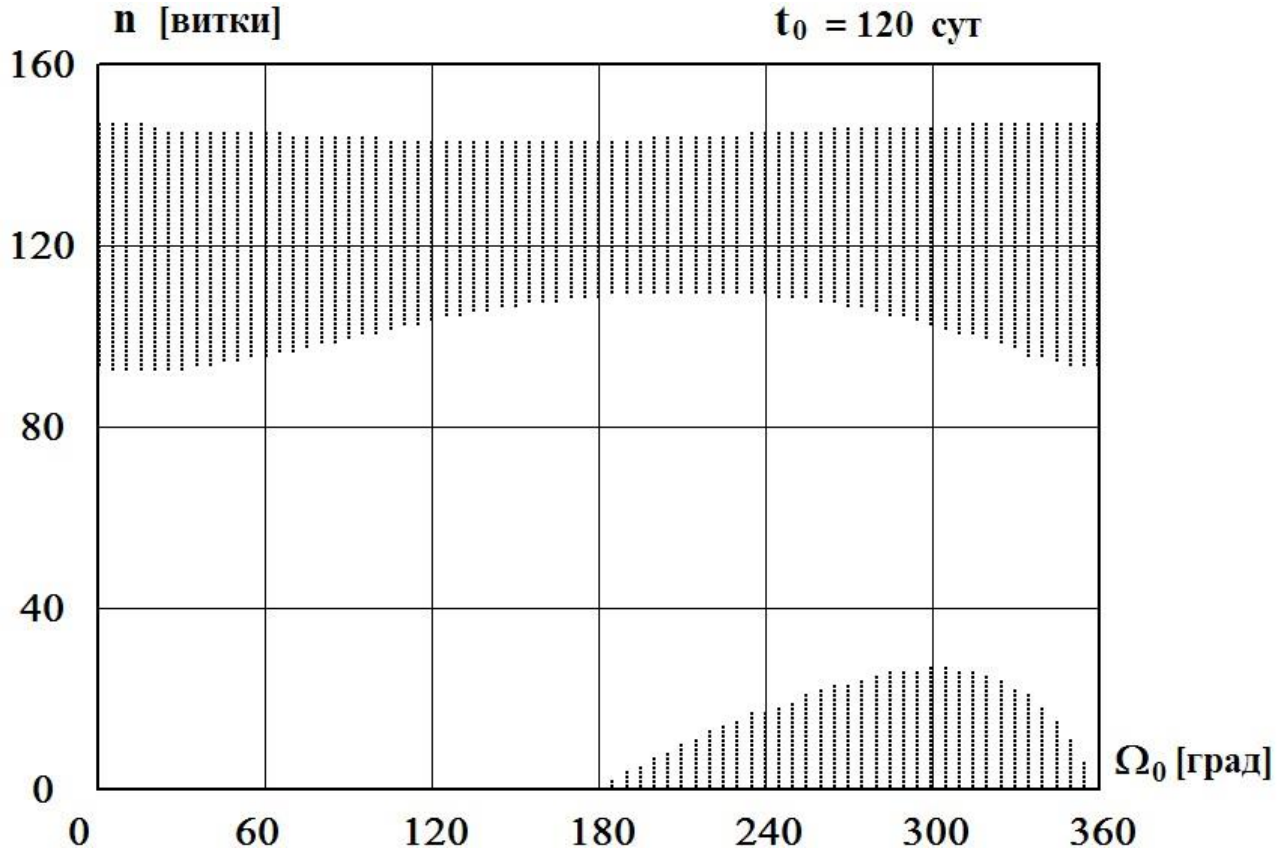

Рис. 13. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 120 сут.

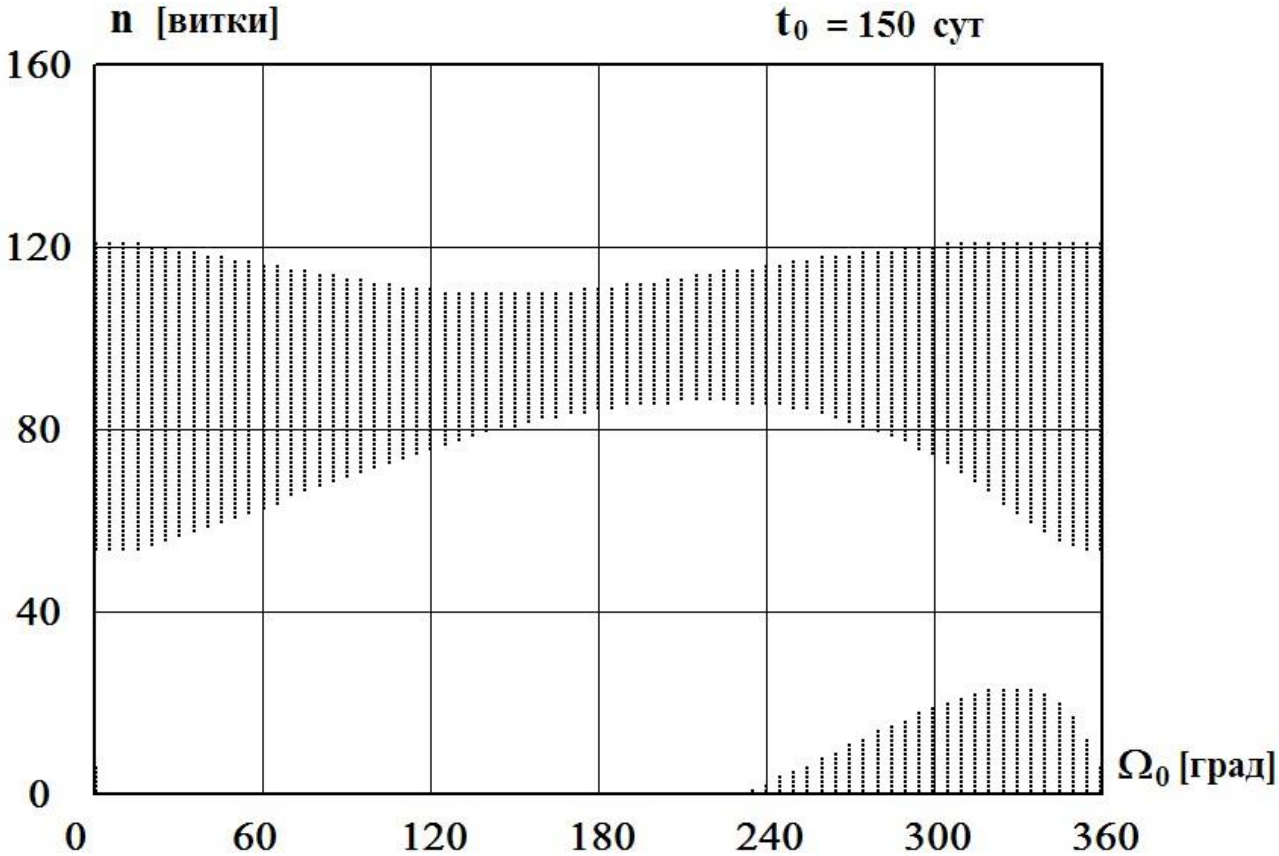

Рис. 14. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 150 сут.

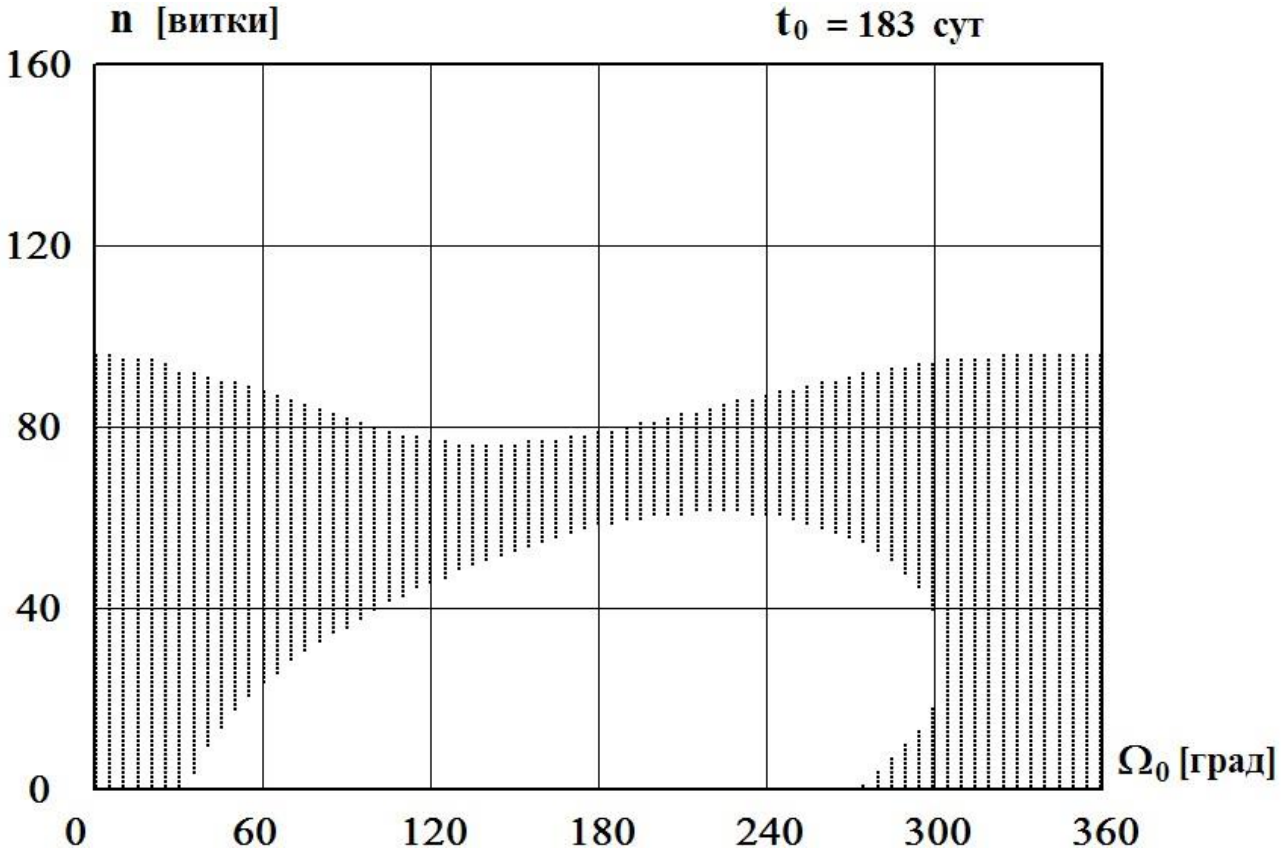

Рис. 15. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 183 сут.

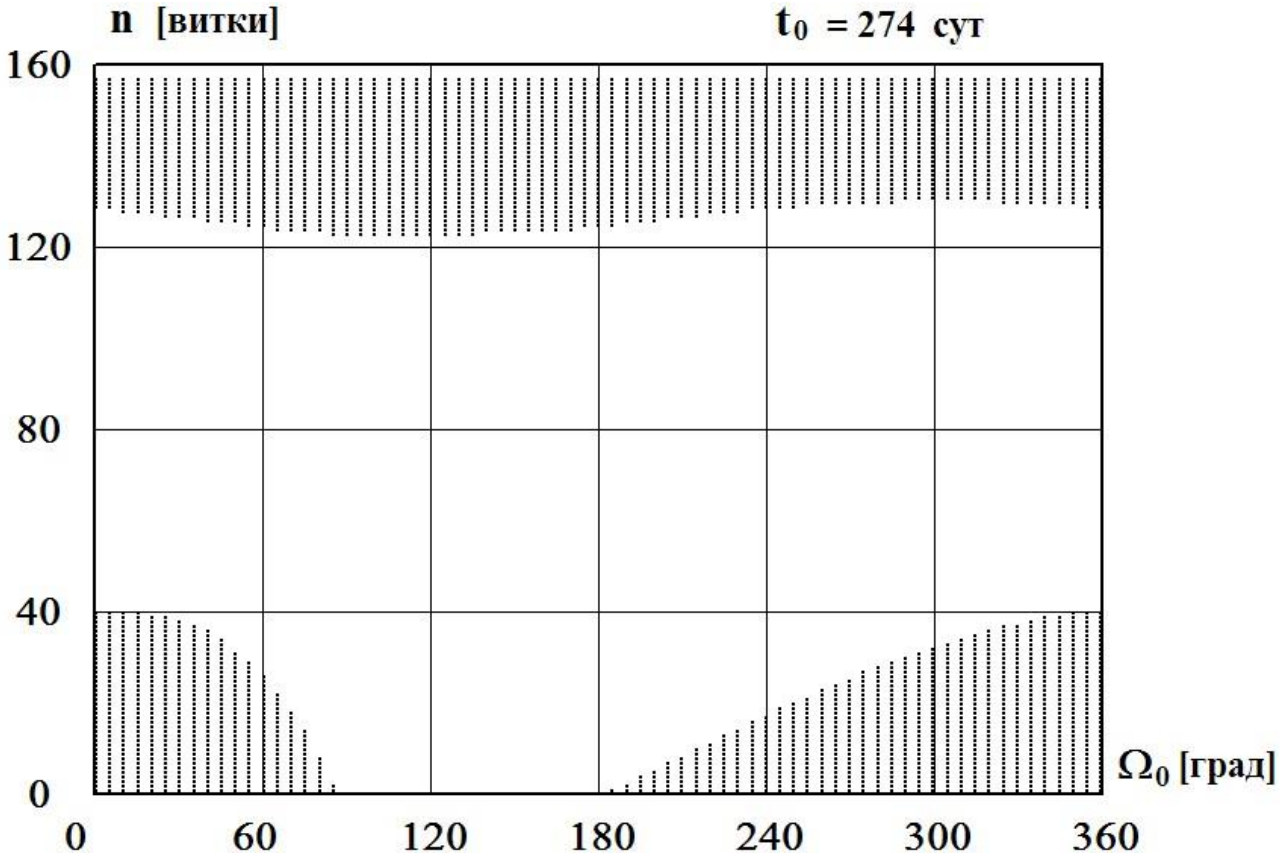

Рис. 16. Ω_0-портрет номинальной «средней» траектории с тенью; t_0 = 274 сут.

Портреты с тенью для других траектории

На рис. 17-20 даны портреты с тенью для остальных траекторий из табл. 2.

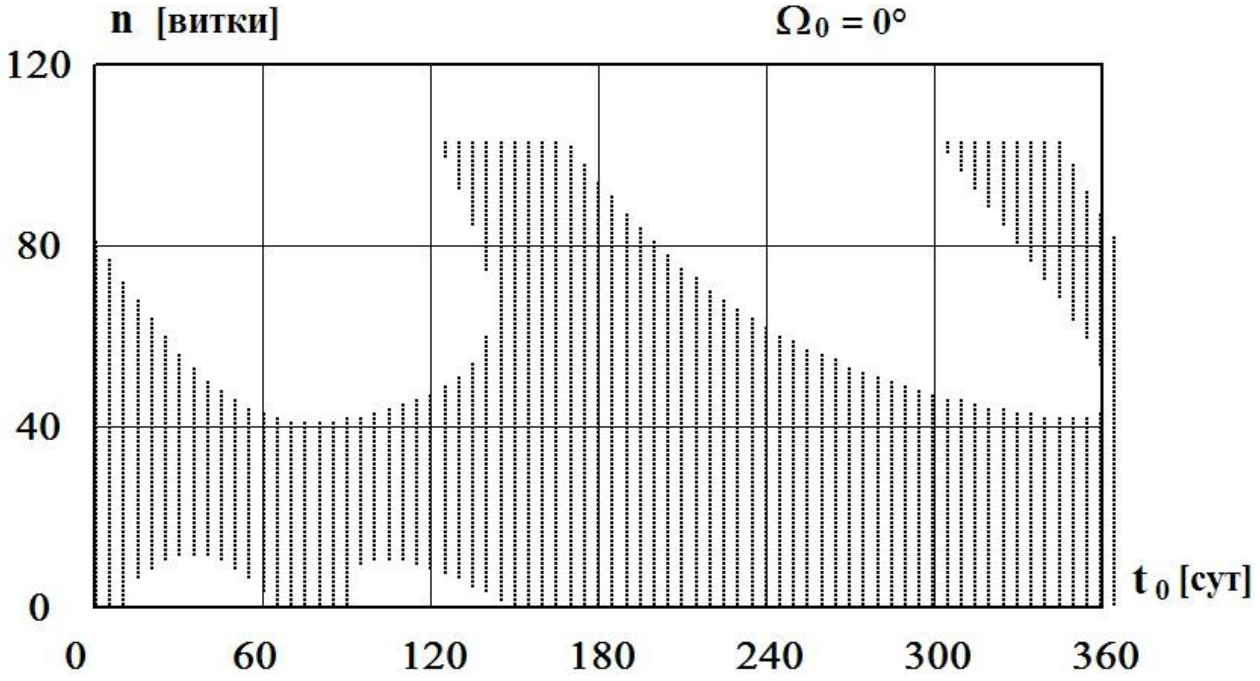

Рис. 17. t_0-портрет траектории «легкого КА» с тенью (N=103 витка); $\Omega_0 = 0^0$.

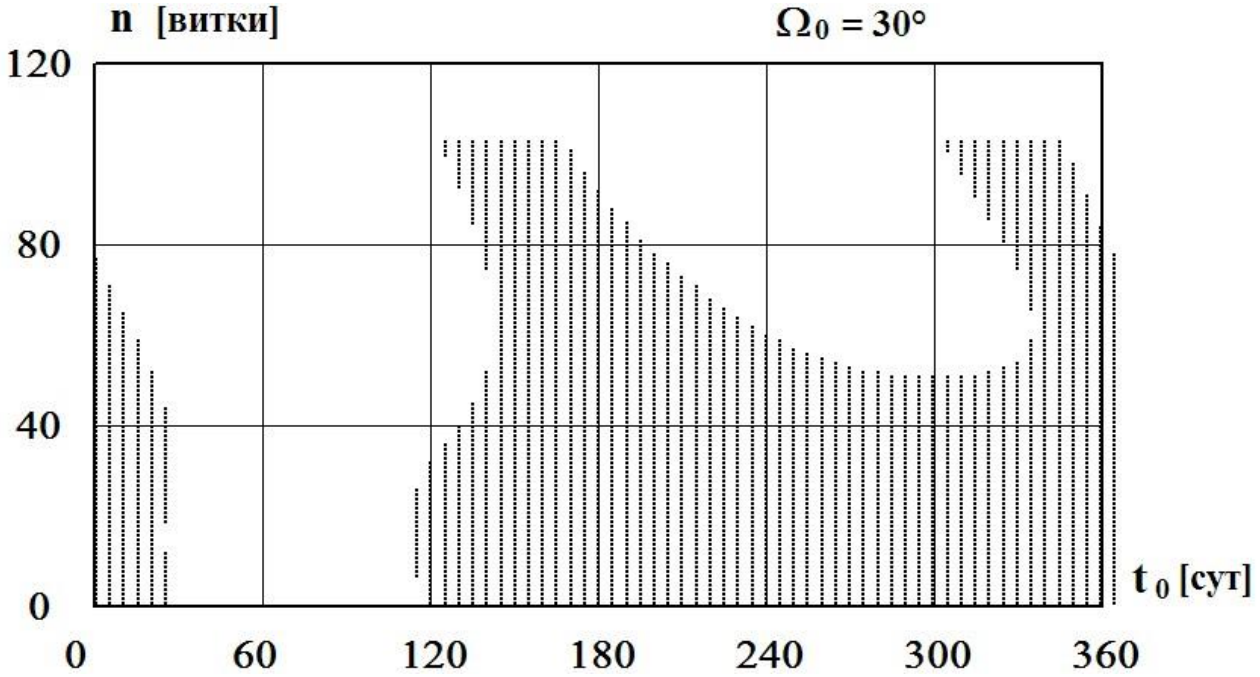

Рис. 18. t_0-портрет траектории «легкого КА» с тенью (N=103 витка); $\Omega_0 = 30^0$.

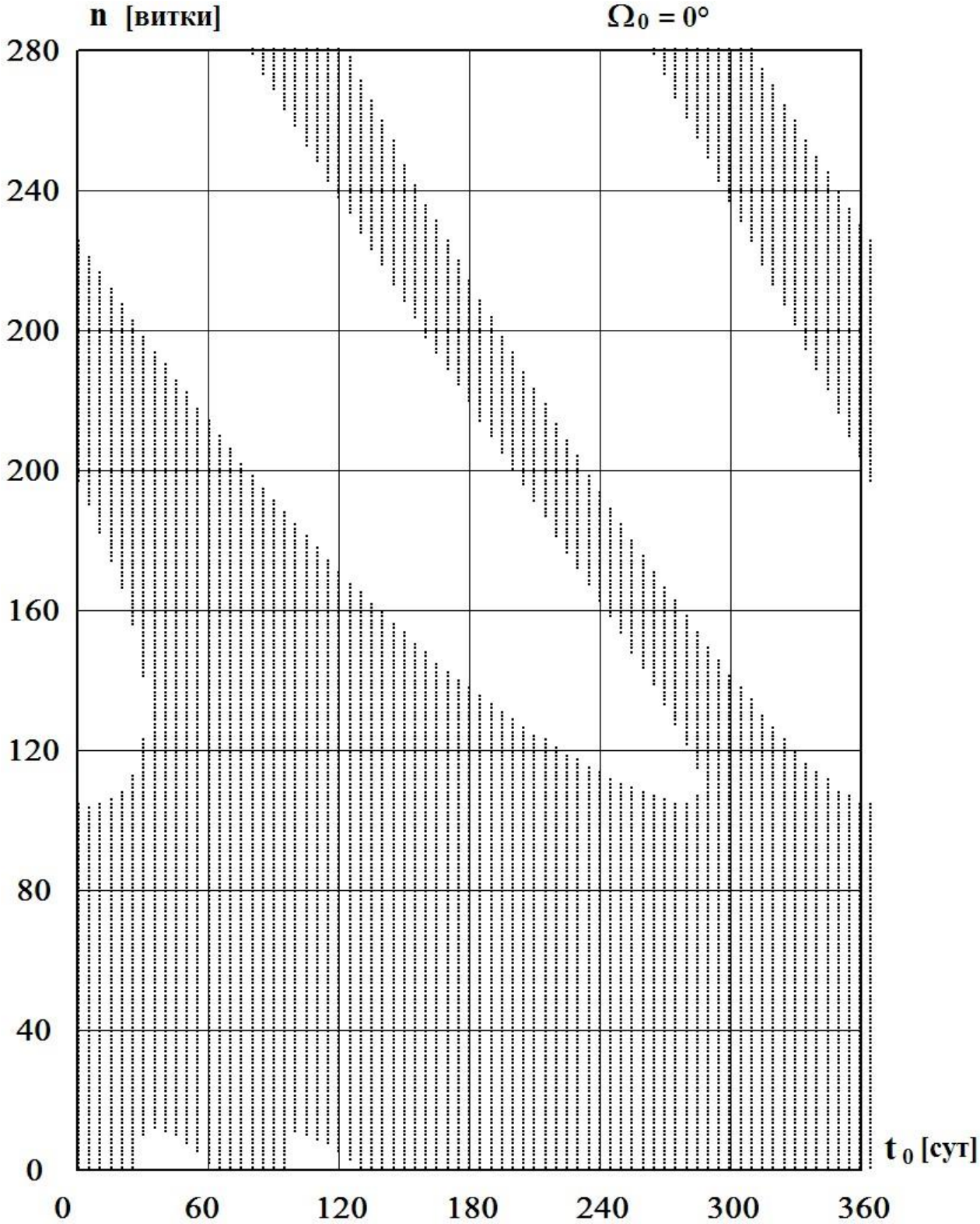

Рис. 19. t_0-портрет номинальной «очень длинной» траектории с тенью (количество витков N = 281); параметр $\Omega_0 = 0^0$.

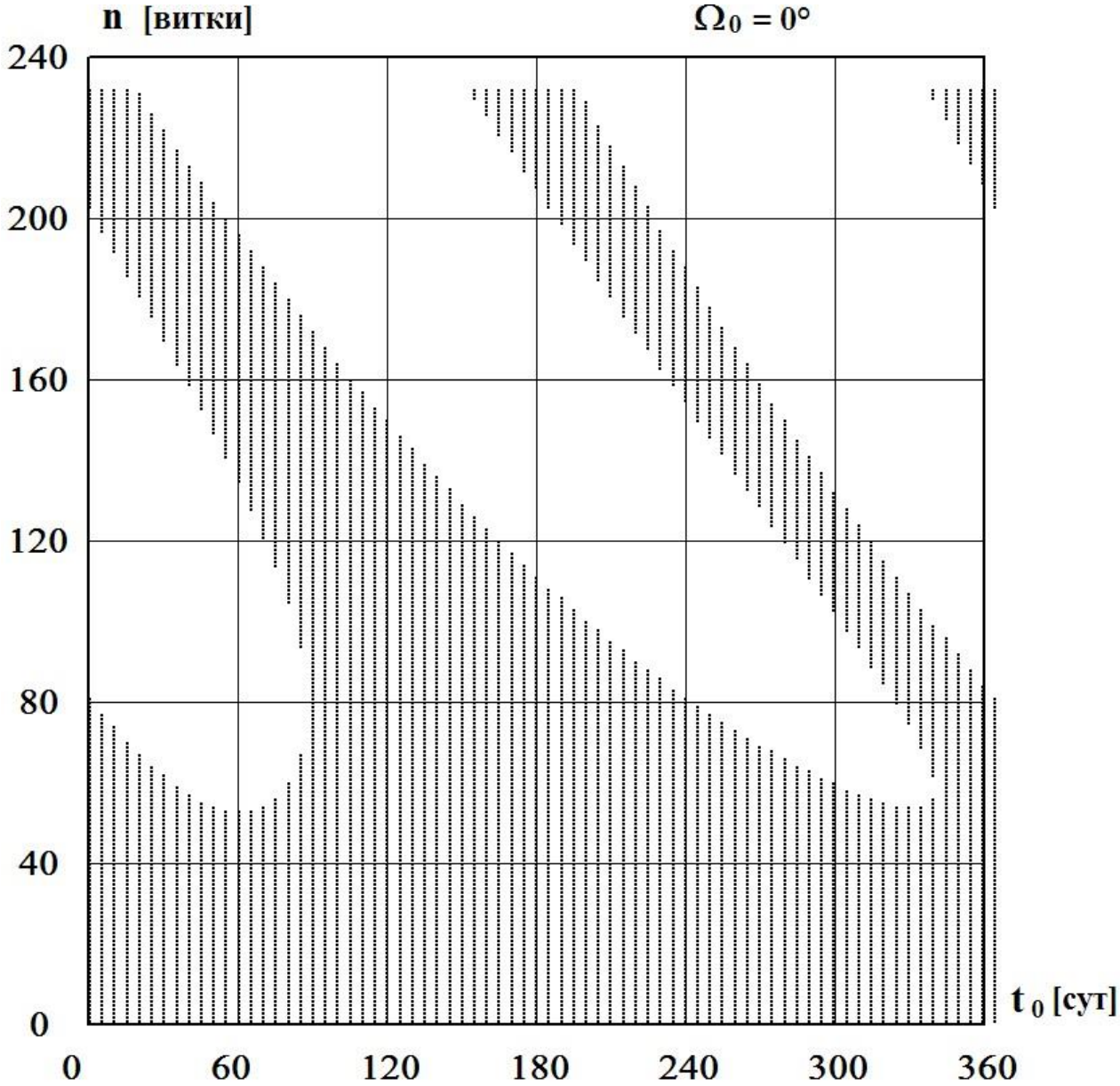

Рис. 20. t_0-портрет номинальной «длинной» траектории с тенью (количество витков N = 232); параметр $\Omega_0 = 0^0$.

Отметим, что для «легкого» КА есть примеры, когда участки тени есть на всех витках: для $\Omega_0 = 0^0$ это траектории с $t_0 \in [148..168]$ сут (рис. 17).

А из рис. 18 следует, что для «легкого» КА существуют ситуации, когда на траектории вообще нет участков с тенью.

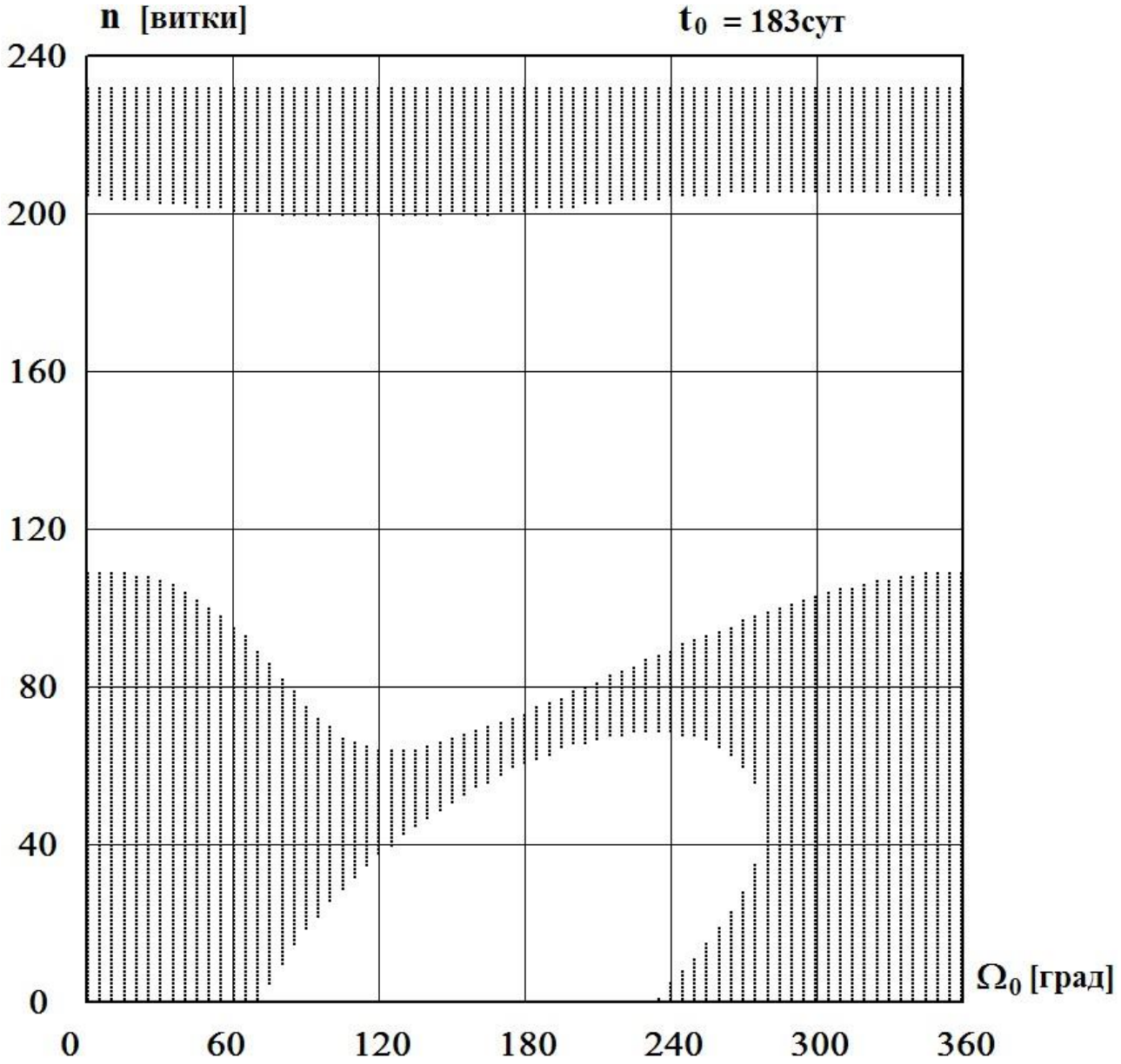

Рис. 21. Ω_0-портрет номинальной «длинной» траектории с тенью (количество витков N = 232); параметр t_0 = 183 сут.

На основе рис. 19, 20 нельзя сделать вывод, могут ли на «длинной» и «очень длинной» траекториях быть три группы участков тени. Но из рис. 21 ($\Omega_0 \in [235^0..275^0]$) следует, что на этих траекториях три группы участков тени могут быть.

Положение участков тени на витках

Более подробную информацию о тени дают графики, на которых для конкретных траекторий участки тени представлены (выделены черным) в координатах виток n - истинная аномалия θ. Несколько примеров с двумя и тремя группами витков с тенью для «легкого КА», «средней» и «длинной» траекторий представлено на рис. 22-25. На рис. 26 дан пример траектории, на которой участки тени есть на всех витках.

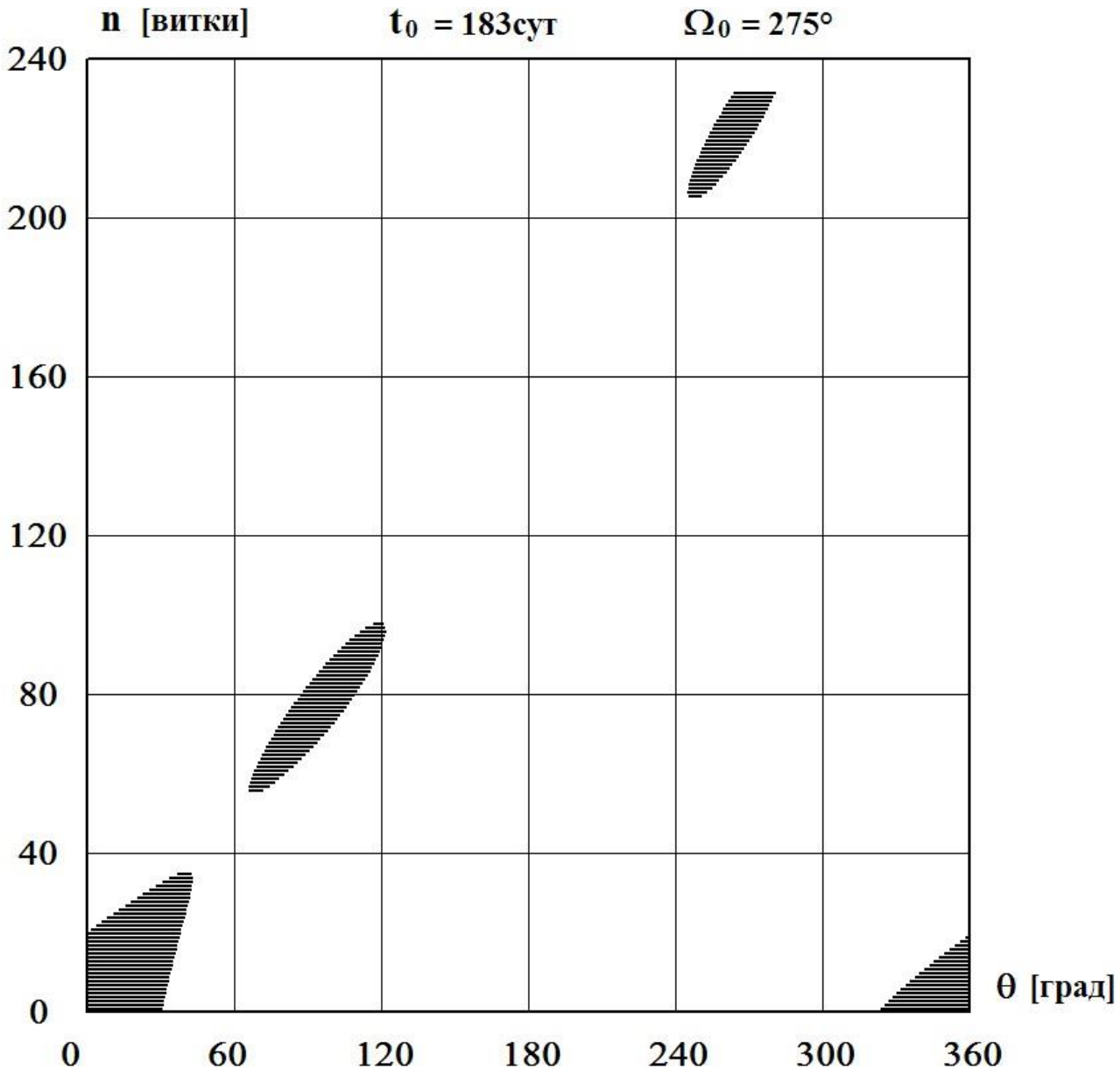

Рис. 22. Участки тени на «длинной» траектории, t_0 = 183 сут, $\Omega_0 = 275^0$.

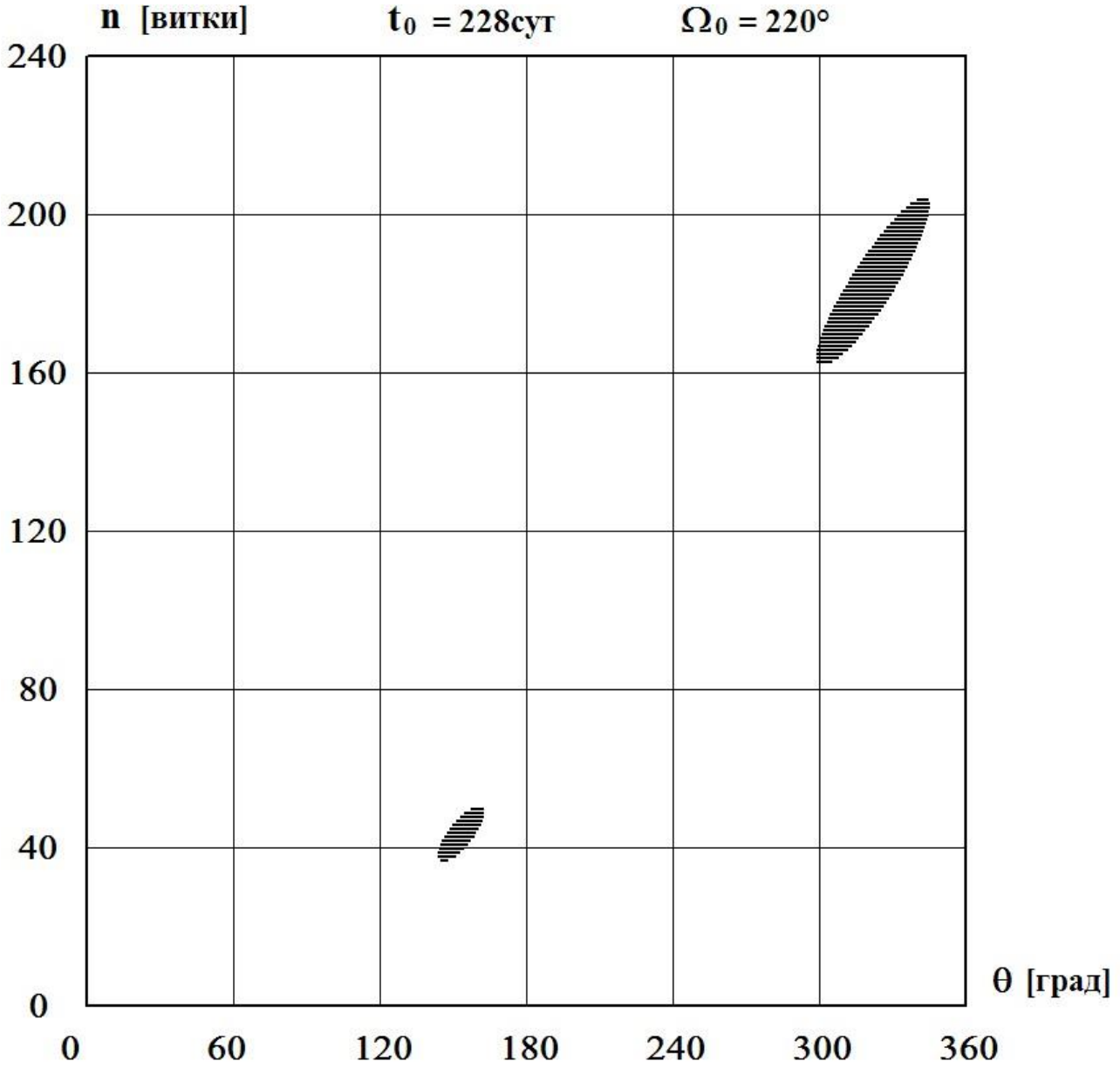

Рис. 23. Участки тени на «длинной» траектории, t_0 = 228 сут, $\Omega_0 = 220^0$.

Замечание. Строго говоря, по оси абсцисс откладывается величина $\varphi - \Omega_0$, т.к. интегрирование траектории ведется в равноденственных переменных, причем независимой переменной считается $\varphi = \theta + \omega + \Omega$, и потому и витки отсчитываются в переменной φ, и границы тени определяются в переменной φ. В начальный момент времени t_0 имеем $\theta = 0^0$ (начало траектории в перигее), и поскольку было принято $\omega_0 = 0^0$, то $\varphi_0 = \Omega_0$. Поэтому в начале $\theta = \varphi - \Omega_0$. В дальнейшем $\omega + \Omega \neq \Omega_0$, но различие невелико (на всех пяти траекториях на всех витках, кроме последнего, оно меньше 0.1^0), поэтому $\theta = \varphi - \omega - \Omega \approx \varphi - \Omega_0$.

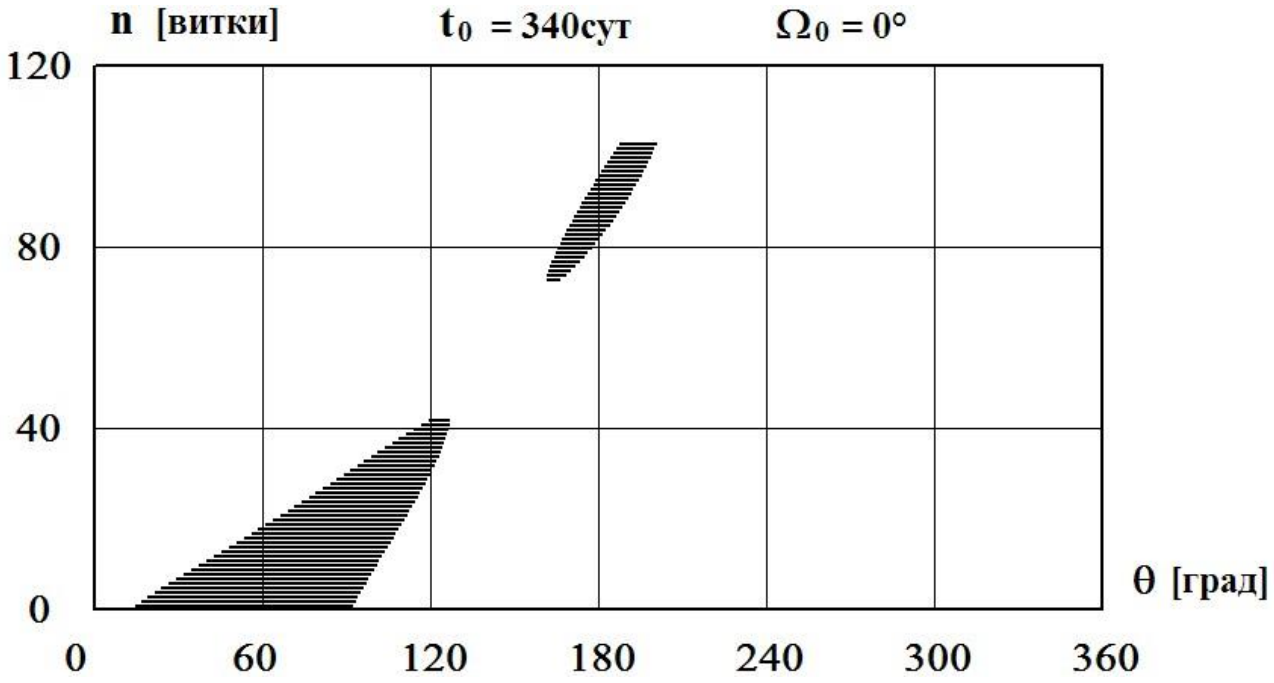

Рис. 24. Участки тени на траектории «легкого КА», t_0 = 340 сут, $\Omega_0 = 0^0$.

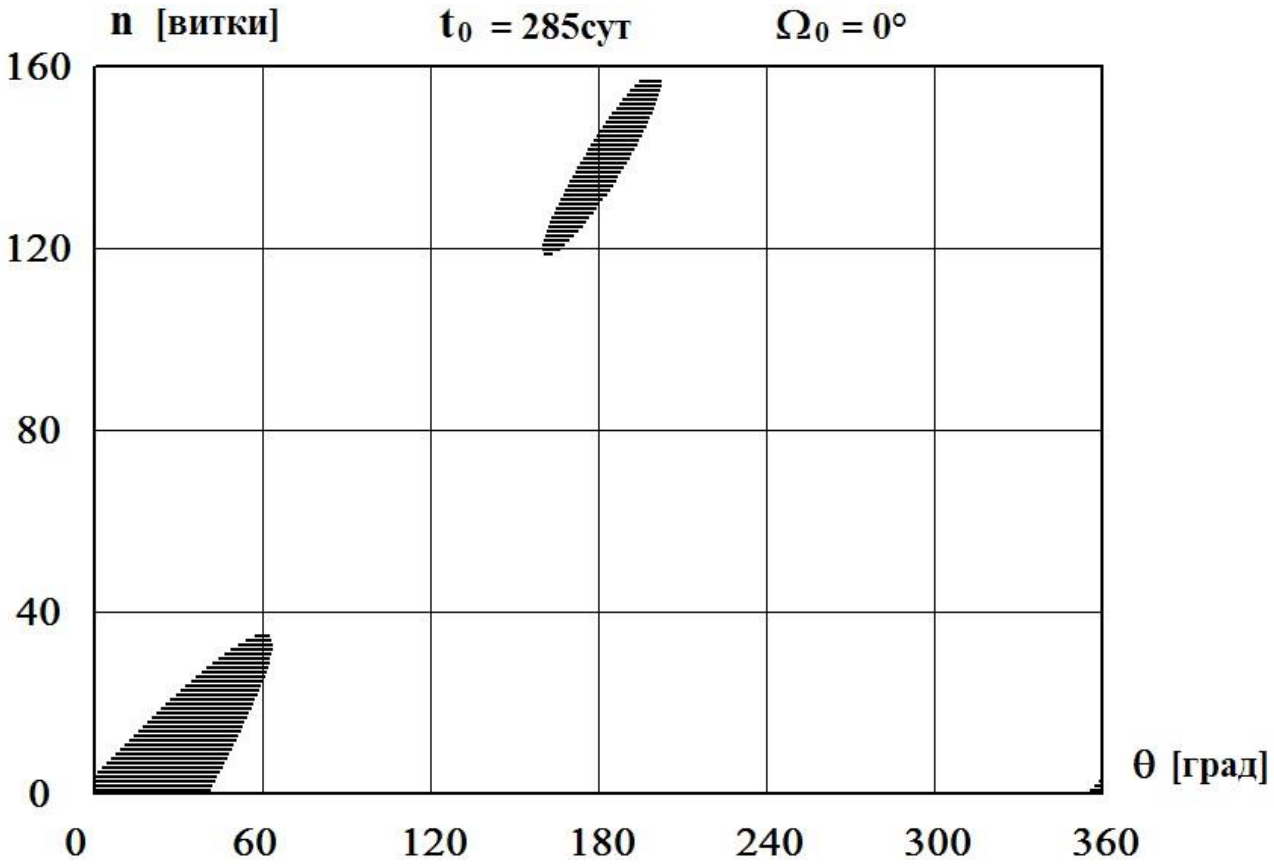

Рис. 25. Участки тени на «средней» траектории, t_0 = 285 сут, $\Omega_0 = 0^0$.

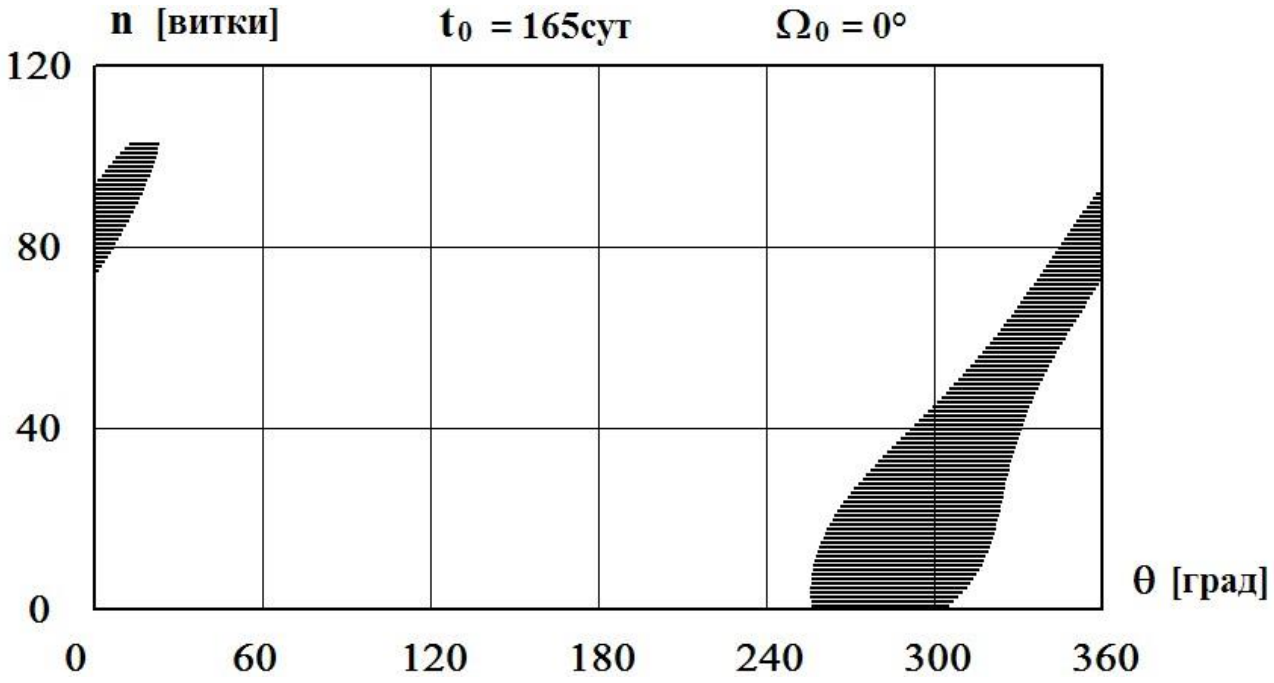

Рис. 26. Участки тени на траектории «легкого КА», t_0 = 165 сут, $\Omega_0 = 0^0$.

Пересечение «цилиндра» тени космическим аппаратом

Рассмотрим в небесной системе координат, начало которой O совпадает с центром Земли, цилиндр тени, внутри или на поверхности которого в момент времени t находится космический аппарат (отмечен точкой КА на рис. 27, стр. 23). Имеем радиус-вектор КА $\mathbf{r}_{KA}$ и радиус-вектор Солнца $\mathbf{R}_S$. Единичный вектор направления на Солнце $\mathbf{e}_{Rs} = \mathbf{R}_S / R_S$. Вектор - $\mathbf{e}_{Rs}$ задает направление оси цилиндра тени. Сечение цилиндра плоскостью, перпендикулярной его оси и проходящей через т. КА, представляет собой круг радиуса R_E с центром в точке D, со своими направлениями горизонтали “G” и вертикали “V”. Определим координаты КА в «местной» системе координат этого круга.

Расстояние $R_D = \mathbf{r}_{KA} \cdot \mathbf{e}_D$ (здесь и далее «·», «×» – скалярное и векторное произведения векторов), где $\mathbf{e}_D = -\mathbf{e}_{Rc}$, радиус-вектор $\mathbf{R}_D = R_D\, \mathbf{e}_D$. Единичный вектор вдоль оси “Z” небесной системы координат $\mathbf{e}_Z = <0, 0, 1>$. Через него определяем единичные вектора «местных» горизонтали “G” $\mathbf{e}_G = \mathbf{e}_D \times \mathbf{e}_Z$ и вертикали “V” $\mathbf{e}_V = \mathbf{e}_G \times \mathbf{e}_D$. Вектор $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{R}_{KA} - \mathbf{R}_D$ задает положение КА в круге относительно т. D, его «местные» координаты $\Delta r_G = \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_G$, $\Delta r_V = \Delta\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_V$.

Отметим, что координаты $\Delta r_G, \Delta r_V$ в разные моменты времени определяются в разных «местных» координатах, т.к. меняются и направление цилиндра тени, и расстояние КА от Земли (см. табл. 3). «Траектория» КА $<\Delta r_G(t)\ ,\ \Delta r_V(t)>$ показывает, как наблюдатель с Земли видел бы пересечение аппаратом «движущейся» тени Земли.

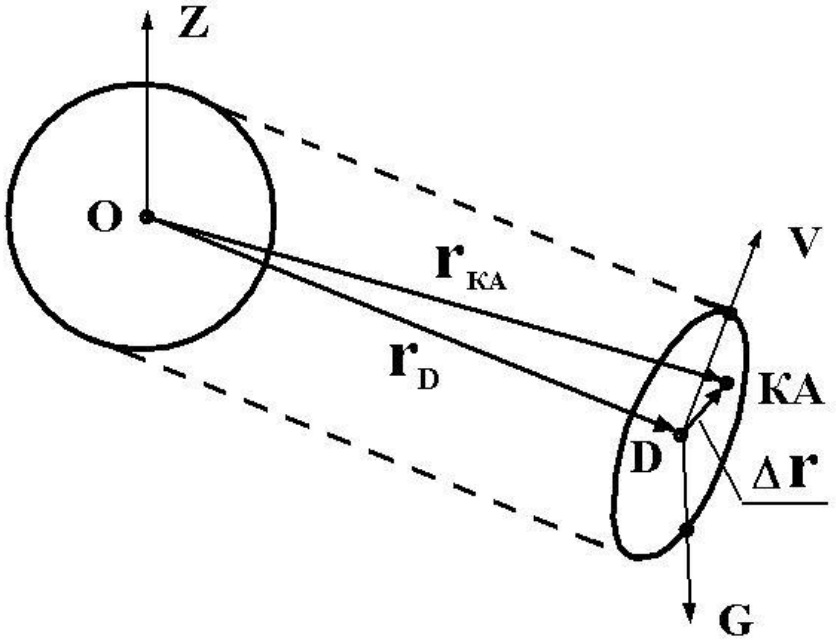

Рис. 27. Схема пересечения космическим аппаратом «цилиндра» тени.

На рис. 28, 29 показано пересечение цилиндра тени для средней траектории с t_0 = 285 сут, $\Omega_0 = 0^0$, для которой приведены участки тени на рис. 25. Для нее есть две группы витков с тенью: n∈[1..35] и n∈[119..157]. Из рис. 25 видно, что в начальный момент времени, на первом витке, КА находится в тени. Пересечение цилиндра тени для первой группы витков дано на рис. 28. На нем начало траектории отмечено черной стрелкой (треугольником). Этим же значком отмечен выход из тени на последнем в группе 35-м витке. Движение КА происходит справа налево. Кружочками показаны положения КА для целых значений равноденственной переменной φ (напомним, что $\varphi - \Omega_0 \approx \theta$, в данном случае $\varphi \approx \theta$), а также положения КА на границе тени. Для наглядности на двух витках пересечение цилиндра тени прочерчено жирной линией.

На рис. 29 показано пересечение цилиндра тени для второй группы витков. Последний виток в группе есть последний виток на траектории. На четырех витках пересечение цилиндра тени также прочерчено жирной линией. Отметим, что если в первой группе пересечение цилиндра на последующих витках «ниже», чем на предыдущих, то во второй группе, наоборот – пересечение цилиндра тени на последующих витках «выше».

На рис. 30, 31 приведен еще один пример пересечения цилиндра тени – для длинной траектории с t_0 = 228 сут, $\Omega_0 = 220^0$, для которой участки тени показаны на рис. 23. Для нее есть также две группы витков с тенью: n∈[37..50] и n∈[163..204]. В отличие от предыдущего примера, обе группы витков «внутренние» – они не включают в себя ни начальный, ни конечный витки.

Эти примеры наглядно показывают, почему витки с тенью «объединены» в группы.

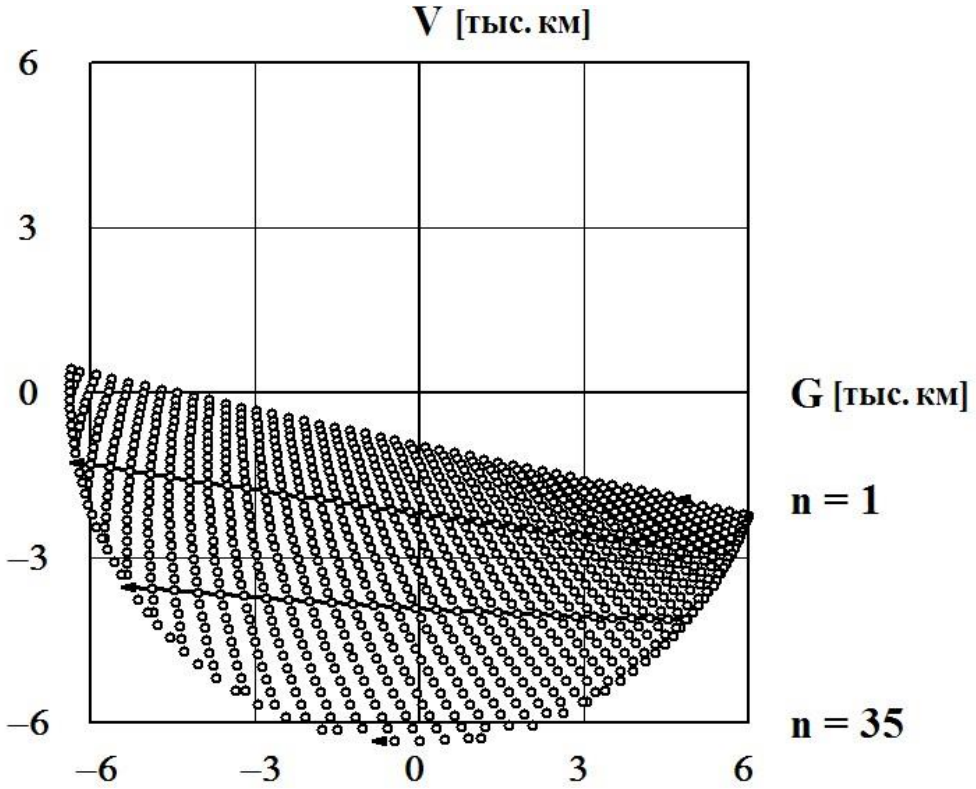

Рис. 28. Пересечение космическим аппаратом «цилиндра» тени, витки 1-35 (средняя траектория с t_0 = 285 сут, $\Omega_0 = 0^0$).

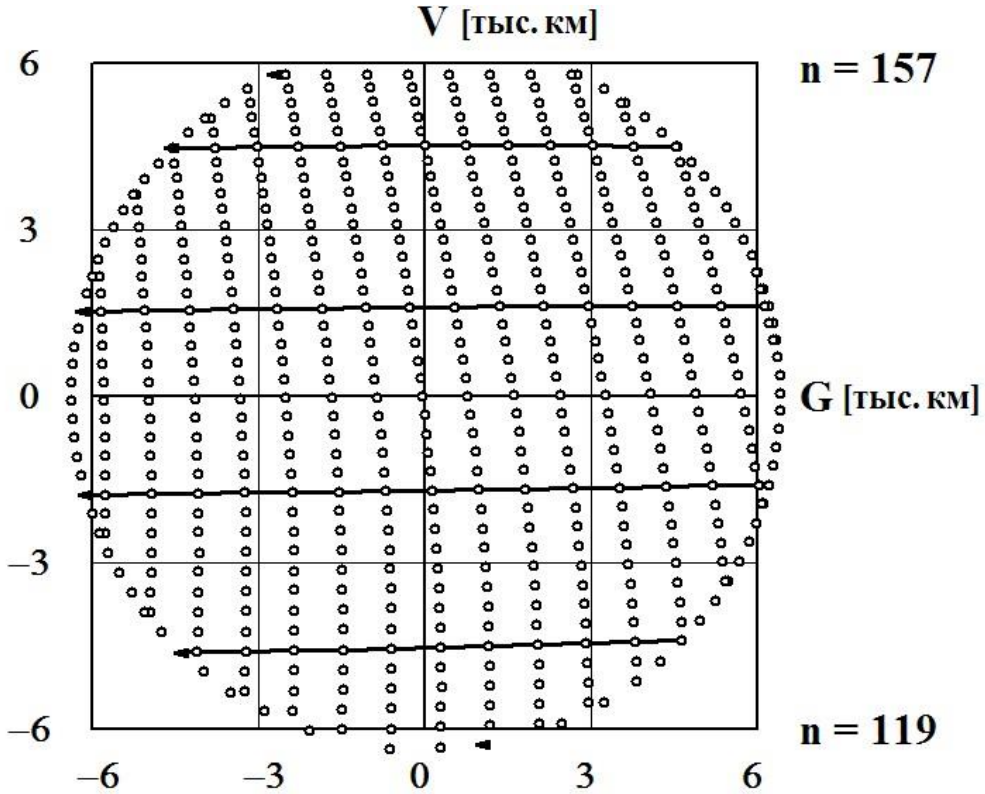

Рис. 29. Пересечение космическим аппаратом «цилиндра» тени, витки 119-157.

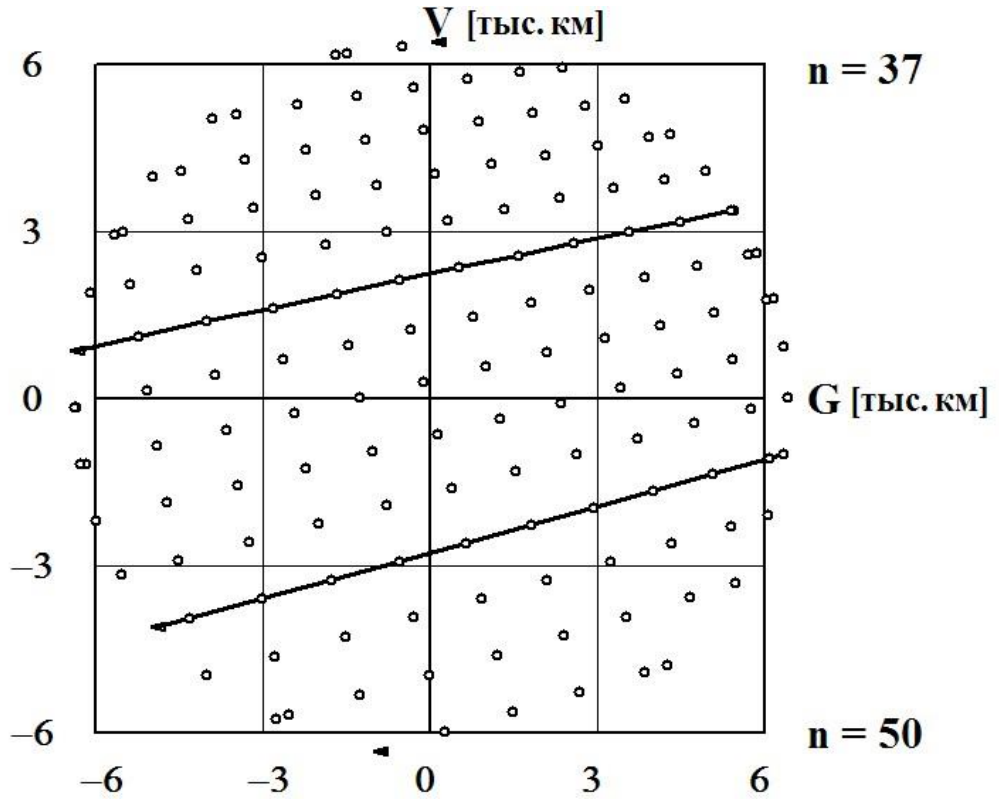

Рис. 30. Пересечение космическим аппаратом «цилиндра» тени, витки 37-50 (длинная траектория с t_0 = 228 сут, $\Omega_0 = 220^0$).

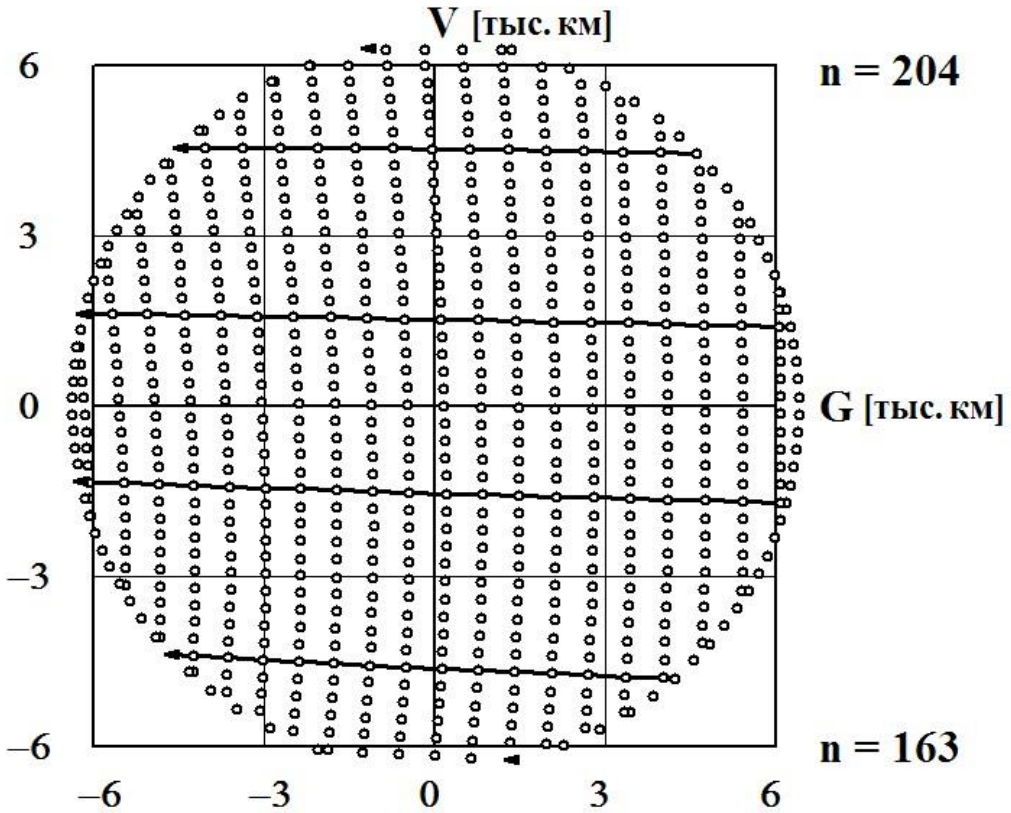

Рис. 31. Пересечение космическим аппаратом «цилиндра» тени, витки 163-204.

Для последнего примера в табл. 3 приведены подробные данные по пересечению «цилиндра» тени для двух витков – 37-го и 50-го (см. рис. 30). В двух последних столбцах дано время: часы и минуты. На 37-м витке дугу в 1^0 по θ КА пролетает за ≈10 минут, а весь участок тени – за 19 минут. На 50-м витке – за ≈15 минут и 1 час 6 минут соответственно. На 37-м витке дальность R_D увеличивается с 56.5 до 58.5 тыс. км, на 50-м – с 70.6 до 74.5 тыс. км.

Таблица 3

Пересечение космическим аппаратом «цилиндра» тени на двух витках

n [витки]	θ [град]	Δr_G [тыс.км]	Δr_V [тыс.км]	$\lvert\Delta\mathbf{r}\rvert$ [тыс.км]	R_D [тыс.км]	t [часы]	t [мин]
37	145.34	0.13	6.38	6.378	56.514	15	41
	146	-0.51	6.30	6.318	57.229	15	48
	147	-1.51	6.17	6.351	58.308	15	58
	147.21	-1.72	6.14	6.378	58.532	16	0
50	157.64	4.23	-4.77	6.378	70.592	2	14
	158	3.82	-4.90	6.214	70.947	2	20
	159	2.66	-5.26	5.891	71.911	2	35
	160	1.46	-5.62	5.806	72.837	2	50
	161	0.24	-5.98	5.989	73.720	3	6
	161.90	-0.89	-6.32	6.378	74.474	3	20

Краевые задачи

В работе [9] рассматривалась задача оптимального многовиткового перелета КА с электроракетными двигателями малой тяги в центральном ньютоновом поле без учета тени. Управление КА осуществлялось с помощью вектора малой тяги. С использованием принципа максимума Понтрягина задача сводилась к двухточечной краевой задаче. Для этого вводились сопряженные переменные, формировался гамильтониан задачи, с его помощью находились выражения для оптимального направления вектора тяги, как функции фазовых и сопряженных переменных, и дифференциальные уравнения для фазовых и сопряженных переменных. Задача сводилась к поиску начальных значений сопряженных переменных, которые обеспечили бы выполнение краевых условий в конечный момент времени.

Таким образом краевая задача получается для случая, когда тяга работает постоянно, без выключений. Назовем ее ***Краевая задача 1.***

Наряду с ней рассматривался вариант, когда тяга может выключаться и снова включаться и необходимо определить оптимальные моменты включения/ выключения тяги. В этом случае, вдобавок к выражениям для оптимального

направления тяги, была получена, также с помощью принципа максимума, т.н. функция переключения Sw, которая дает критерий для включения и выключения тяги: при Sw<0 тяга нулевая, при Sw>0 тяга максимальная (особые случаи здесь обсуждать не будем).

Таким образом краевая задача получается для варианта, когда тяга может включаться и выключаться. Назовем ее ***Краевая задача 2.***

Формально она сложнее, чем ***Краевая задача 1***, так как необходимо достаточно точно находить нули функции переключения Sw.

Добавим к условиям ***задач 1*** и ***2*** условие, обусловленное тенью, в которой тяга обнуляется. Очевидно, з***адача 2*** станет еще сложнее, т.к. надо будет определять нули двух функций – функции переключения и функции тени.

А ***задача 1*** станет очень похожей на ***задачу 2,*** в которой вместо функции переключения используется функция тени. И, на первый взгляд, она сводится к ***Краевой задаче 3***, которая эквивалентна ***Краевой задаче 2***, с заменой функции Sw на Sh. Аналогично ***задача 2*** с тенью сводится к ***Краевой задаче 4***, которая эквивалентна ***Краевой задаче 2*** с заменой функции Sw на комбинированную функцию Sw·Sh. Однако в действительности это не так.

Дело в том, что в задачах с тенью должны выполняться дополнительные условия – условия оптимального пересечения границ тени, на которых сопряженные переменные претерпевают скачок. Это т.н. «условия скачка» [11]. И поэтому ***Краевые задачи 3*** и ***4*** оказываются более сложными, чем если бы мы просто заменили функцию Sw на Sh или на Sw·Sh.

Тем не менее, можно рассмотреть «***Краевую***» ***задачу,*** получающуюся из ***Краевой задачи 2*** заменой функции Sw на Sh. Поскольку от «полноценной» ***Краевой задачи 3*** она отличается отсутствием условий оптимального пересечения границ тени, назовем ее «***Неполной***» (двухточечной) ***Краевой задачей 3.*** Очевидно, что решения этой «***Краевой***» ***задачи*** не будут оптимальными траекториями. Тем не менее, можно такую задачу решать, рассматривая ее как предварительный (или промежуточный) этап исследования на пути к решению «полноценной» ***Краевой задачи 3***. А если получаемые решения по функционалу (расходу рабочего вещества) окажутся близки к номинальным траекториям – их можно будет рассматривать как приближенно-оптимальные и, возможно, использовать вместо оптимальных решений.

Примеры решения «неполной» краевой задачи с тенью

В табл. 4 приведено несколько примеров перелета на ГСО с нулевой тягой на участках тени. Для каждого перелета приведены характеристики номинальной траектории и данные по двум траекториям с нулевой тягой на участках тени. Одна траектория – с тем же количеством витков, что и на номинальной траектории, вторая – с оптимальным количеством витков.

Таблица 4

Примеры траекторий перелета на ГСО, полученных в результате решения «неполной» краевой задачи

	t_0 [сут]	Ω_0 [град]	N/ ΔN	T/ ΔT [сут]	T_{Sh} [сут]	n_{Sh} [витки]	k_{Sh}	M_{PB}/ ΔM_{PB} [кг]	ΔM_{PB} [%]
1	285	0^0	157	179.99		1-35,119-157	74	485.3	
			0	2.85	2.398	1-35,118-156	74	1.22	0.251
			1	2.86	2.414	1-35,118-157	75	**1.20**	**0.247**
2	91	100^0	157	179.99		130-157	28	485.3	
			0	0.84	1.224	129-157	29	-1.03	-0.213
			1	0.78	1.222	130-158	29	**-1.18**	**-0.243**
3	0	260^0	157	179.99		55-93	39	485.3	
			0	16.77	0.746	48-69	22	97.13	20.013
			-8	14.83	0.694	48-66	19	**92.03**	**18.963**

t_0 – начальное время, Ω_0 – долгота восходящего узла начальной орбиты; N, T, M_{PB} – количество витков, продолжительность перелета и затраты рабочего вещества на номинальной траектории (постоянная ненулевая тяга, в т.ч. в тени); ΔN, ΔT, ΔM_{PB} – разница в количестве витков, продолжительности перелета и затратах рабочего вещества (в кг и % от M_{PB}) траектории с нулевой тягой в тени и номинальной траектории; T_{Sh} – суммарная продолжительность участков с нулевой тягой; n_{Sh}, k_{Sh} – номера витков с тенью и их количество (как на номинальной траектории, так и на траекториях с нулевой тягой в тени).

Главный вывод, который можно сделать на основе этих примеров – что решение «неполной» краевой задачи может быть очень близким по функционалу (затратам рабочего вещества) к номинальной траектории (перелет 1: превышение ΔM_{PB} всего на четверть процента) и даже может быть лучше по функционалу (перелет 2), но может быть и значительно хуже (перелет 3: превышение $\Delta M_{PB} \approx 19$ %).

Из таблицы также видно, что ни количество витков с тенью k_{Sh}, ни суммарная продолжительность T_{Sh} участков с нулевой тягой сами по себе, в общем случае, никак однозначно не связаны с тем, каковы будут дополнительные затраты рабочего вещества из-за обнуления тяги на участках тени. Наряду с ними, по-видимому, играют роль и другие факторы. В частности, на «хороших» перелетах (примеры 1 и 2) группы витков с тенью находятся в конце траектории или в ее начале. А в «плохом» случае (пример 3) – в середине траектории. Причем из сравнения всех трех траекторий примера 3 наблюдается стремление к уменьшению количества витков с тенью.

Основные результаты

Препринт состоит из 2 частей.

В первой части рассматриваются траектории перелета на ГСО с нескольких высокоэллиптических орбит (с разным эксцентриситетом и наклонением), на которых влияние тени отсутствует: на участках тени тяга не обнуляется, т.е. на всей траектории тяга постоянна по величине. Но подробно рассматривается вопрос, как много участков с тенью может быть на траектории, на каких витках эти участки имеются, в какой именно части витка, как конкретно и за какое время КА пересекает «цилиндр» тени. Прослеживается, как участки тени смещаются вдоль траектории с изменением параметров задачи: даты старта t_0, от которой зависит начальное положение Солнца (над/под/вблизи плоскости экватора), и долготы восходящего узла начальной орбиты Ω_0, от которой зависит положение в пространстве траектории перелета. Используются различные способы представления участков тени: витки с тенью в зависимости от параметра t_0 (при фиксированном .Ω_0), витки с тенью в зависимости от Ω_0 (при фиксированном t_0), диапазоны углов истинной аномалии с тенью на разных витках конкретной траектории, пересечение космическим аппаратом области тени в локальных координатах цилиндра тени.

Во второй части препринта рассматривается вопрос о том, как может быть сформирована краевая задача для нахождения траекторий перелета с нулевой тягой в области тени. Проводится аналогия перелетов с тенью и перелетов с возможностью многократного включения и выключения малой тяги: только в первом случае величина тяги зависит от т.н. функции тени, во втором случае - от функции переключения. Заменяя функцию переключения на функцию тени, получим новую "краевую" задачу, которая позволяет получать траектории перелета с нулевой тягой в области тени. Приведены отдельные примеры решения этой задачи. Они показали, что получаемые траектории могут быть очень близки по функционалу – затратам рабочего вещества – к перелетам без учета тени, могут быть лучше них, но могут быть и существенно хуже. Последнее объясняется тем, что в случае с тенью, как следует из принципа максимума Понтрягина, должны дополнительно выполняться условия оптимального пересечения границ тени. В их отсутствие краевая задача получается "неполной", а траектории – неоптимальными. Встает вопрос: когда (при каких значениях параметров задачи) траектории оказываются приближенно-оптимальными? Предполагается продолжить изучение этого вопроса.

Литература

1. Sackett L. L., Malchow H. L. and Edelbaum T. N. (1975) Solar Electric Geocentric Transfer with Attitude Constraints: Analysis, NASA CR 134927, Washington, DC.
2. Салмин В.В. Оптимизация космических перелетов с малой тягой. М.: Машиностроение, 1987, 208 с.
3. Petukhov V. G. Optimization of multi-orbit transfers between noncoplanar elliptic orbits // Cosmic Research. 2004, Vol. 42, No. 3, pp. 250–268; Петухов В. Г. Оптимизация многовитковых перелетов между некомпланарными эллиптическими орбитами // Космические исследования. 2004, т. 42. № 3, с. 260-279.
4. Lundberg B. N. (2010) An Adjoint Jump Shooting Method for Parametric Low Thrust Orbit Transfer Problems with Eclipsing, Proceedings of the Fourth International Conference on Astrodynamics Tools and Techniques (WPP-308), ESAC, Madrid, Spain.
5. Petukhov V. G. Quasioptimal control with feedback for multiorbit low-thrust transfer between noncoplanar elliptic and circular orbits // Cosmic Research. 2011, Vol. 49, No. 2, pp. 121–130; Петухов В. Г. Квазиоптимальное управление с обратной связью для многовиткового перелета с малой тягой между некомпланарными эллиптической и круговой орбитами // Космические исследования. 2011, т. 49. № 2, с. 128-137.
6. Tarzi Z., Speyer J. and Wirz R. (2013) Fuel Optimum Low-Thrust Elliptic Transfer Using Numerical Averaging, Acta Astronautica, 86, 95–118.
7. Mazzini L. (2014) Finite Thrust Orbital Transfers, Acta Astronautica, Vol. 100, 107–128.
8. Graham K. F. and Rao A. V. (2016) Minimum-Time Trajectory Optimization of Low-Thrust Earth-Orbit Transfers with Eclipsing, Journal of Spacecraft and Rockets, Vol. 53, 289–303.
9. Ахметшин Р.З. Плоская задача оптимального перелета космического аппарата с малой тягой с высокоэллиптической орбиты на геостационар // Космические исследования. 2004, т.42, №3, с.248-259; Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2002. — № 37. — 32 с. — URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2002-37

10. Ахметшин Р.З. Возмущения от Луны при многовитковых перелетах на геостационарную орбиту космического аппарата с малой тягой // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. — 2015. — № 107. — 32 с. — URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2015-107
11. Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В., Мищенко Е.Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1976.