ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 259 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Марков М.Б., Подоляко С.В.

Моделирование переноса
протонов в приближении
непрерывного замедления

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Марков М.Б., Подоляко С.В. Моделирование переноса протонов в приближении непрерывного замедления // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 259. 20 с. doi:[10.20948/prepr-2018-259](https://doi.org/10.20948/prepr-2018-259)
URL: <http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-259>

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.Б. Марков, С.В. Подоляко

**Моделирование переноса протонов
в приближении
непрерывного замедления**

Москва – 2018

Марков М.Б., Подоляко С.В.

Моделирование переноса протонов в приближении непрерывного замедления

Представлен алгоритм моделирования переноса протонов в веществе в приближении непрерывного торможения. Рассмотрены способы представления объектов и алгоритмы трассировок, основанные на поверхностном и воксельном геометрических описаниях рассеивающей среды. Рассмотрены результаты модельных расчетов, представляющие кривые Брэгга для различных рассеивающих объектов.

Ключевые слова: протон, ионизационное торможение, трассировка, кривая Брэгга

Mikhail Borisovich Markov, Sergey Viktorovich Podolyako

The modelling of protons transport in the approximation of continuous slowing down

An algorithm for modeling the proton transfer in matter in the approximation of continuous slowing is presented. Methods for scattering objects representing and tracing algorithms based on surface and voxel geometrical descriptions of the scattering medium are considered. The results of model calculations, representing Bragg curves for various scattering objects, are considered.

Key words: proton, continuous slowing down approximation, Bragg peak

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты №17-01-00301 и №18-01-00582.

Оглавление

Введение	3
1 Непрерывное замедление в однородной среде	4
2 Непрерывное замедление в кусочно-однородной среде	8
3 Программная реализация алгоритма	11
4 Модельные расчеты	15
Заключение.....	20
Библиографический список.....	20

Введение

Исследование взаимодействия протонов и других тяжелых заряженных частиц с веществом является актуальной задачей в ряде областей науки и техники. К ним относятся, например, защита искусственных спутников от потоков протонов солнечного ветра и тяжелых заряженных частиц галактического происхождения [1] и создание эффективных методов лечения злокачественных опухолей [2 – 5].

Перенос протонов в веществе сопровождается рассеянием. Оно обусловлено взаимодействием протонов с ядрами и с электронными подсистемами атомов рассеивающей среды [6 – 12].

Проблема радиационной защиты требует рассмотрения протонов относительно низкой энергии. Наибольшую опасность представляют протоны радиационных поясов Земли с энергиями 1-30 МэВ, плотности потоков которых могут превышать $10^7 \text{ см}^{-2} \text{ с}^{-1}$. Такие частицы способны эффективно провзаимодействовать с активной зоной изделия микроэлектроники. Данная зона имеет малый размер и высокую чувствительность. Поэтому даже маловероятные ядерные реакции, но сопровождающиеся передачей рассеивающей среде энергии, сопоставимой с энергией падающего протона, могут привести к значительным повреждениям микроэлектроники.

Протонная томография основана на источниках протонов с энергиями 80-200 МэВ. Это связано с тем, что брэгговский пик протонного энергосвечения должен локализоваться в пораженном участке ткани, который обычно расположен на расстоянии порядка 10 см от источника протонов. При энергиях протонов, используемых в компьютерной томографии, ионизационное рассеяние на атомарных электронах существенно превалирует над ядерными взаимодействиями.

Сечение взаимодействия протонов с атомарными электронами обратно пропорционально квадрату энергии [9]. Энергии протонов, очевидно, существенно превосходят энергии связи электронов в атомах. Поэтому при ударной ионизации среды протонами наиболее вероятны столкновения с малой передачей импульса. В результате протоны теряют энергию непрерывно, «небольшими порциями», практически не меняя направления движения. Ядерные взаимодействия имеют относительно небольшие сечения, но могут сопровождаться не только большими изменениями импульса протона, но и ядерными реакциями.

Данная работа рассматривает трехмерную математическую модель переноса протонов для кусочно-однородных сред, основанную на методе Монте-Карло. Используется приближение непрерывного замедления – ядерными реакциями и угловым рассеянием протонов при рассмотрении их столкновений с атомами рассеивающей среды пренебрегается. Под детекторами, регистрирующими пара-

метры распределений протонов, понимаются заданные геометрические под области рассеивающей среды, в которых вычисляются и сохраняются величины энергии, теряемой проходящими через них частицами.

1 Непрерывное замедление в однородной среде

Удельные ионизационные потери тяжелых заряженных частиц в веществе описываются формулой Бете-Блоха [13]:

$$S(\varepsilon) = \frac{1}{\rho} \left(-\frac{d\varepsilon}{dx} \right)_{\text{ион}} = \frac{4\pi z^2 e^4 N_A}{m_e v^2} Z \cdot n \left[\ln \left(\frac{2m_e v^2}{I_{\text{ион}}(1-\beta^2)} \right) - \beta^2 - \frac{\sum C_i}{Z} - \delta(\varepsilon) \right], \quad (1)$$

где z – заряд частицы, $\beta = v/c$ – относительная скорость частицы, c – скорость света в вакууме, Z – заряд ядра атомов рассеивающей среды, n – концентрация атомов среды N_A – число Авогадро; $I_{\text{ион}} = I_0 Z$ – средний потенциал ионизации атома среды ($I_0 \cong 12.69$ эВ – постоянная Ридберга); δ , U – параметры, учитывающие релятивистский эффект поляризации среды и энергию связи электронов на оболочках. Параметры δ и U определяются экспериментально.

Величина тормозной способности может определяться по формуле (1) с учетом данных работы [12] или извлекаться из табулированных данных ресурсов NIST (*The National Institute of Standards and Technology*, NIST, <http://physics.nist.gov/>), график 1, или SR-NIEL (*The Screened Relativistic (SR) Non-Ionizing Energy Loss (NIEL)r*, <http://www.sr-niel.org/>), графики 2.

Рис.1. Тормозные способности протонов для алюминия по версии ресурса NIST

Зависимость от энергии тормозной способности алюминия для протонов показана на графиках 1 и 2. Данные подтверждают, что влиянием ядерного рассеяния на поглощенную веществом энергию протонов в большом диапазоне энергий можно пренебречь.

Рис. 2. Тормозные способности протонов для алюминия по версии ресурса SR-NIEL

Вышеуказанные сервисы предлагают данные как для отдельных химических элементов, так и для наиболее распространенных сложных веществ. Целесообразно использовать данные для элементарных веществ, а тормозную способность для сложных веществ рассчитывать по формуле:

$$\hat{S}(\varepsilon) = \sum_{i=1}^M p_i S_i(\varepsilon), \quad (2)$$

где p_i – массовая доля, $S_i(\varepsilon)$ – тормозная способность, M – число компонентов в композитном веществе.

Так, на графике 3 изображены тормозные способности протонов для эпоксидной смолы с плотностью 1,13 г/см³.

В приближении непрерывного замедления направление движения протонов не меняется. Для моделирования рассеяния достаточно вычислить энергетические потери протонов $d\varepsilon$ при прохождении в веществе пути длиной dx .

Рис. 3. Тормозные способности протонов для эпоксидной смолы

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{d\varepsilon}{dx} = \rho S(\varepsilon) \equiv -\kappa(\varepsilon). \quad (3)$$

Уравнение с условием, задающим начальную энергию протона, определяет зависимость текущей энергии протона ε от глубины его проникновения в вещество x . Рассмотрим следствие уравнения (3), связывающее глубину его проникновения в вещество:

$$\int_{\varepsilon_0 - \varepsilon}^{\varepsilon_0} d\varepsilon' / \kappa(\varepsilon') \equiv L(\varepsilon) = x, \quad (4)$$

где ε_0 – начальная энергия протона. Обратив выражение $L(\varepsilon) = x$, получим зависимость $\varepsilon = L^{-1}(x)$, удобную для вычисления зависимости потери энергии протоном от глубины проникновения в вещество.

Рис. 4. Зависимость от энергии глубины проникновения в эпоксидную смолу протона с начальной энергией $\varepsilon_0 = 200$ МэВ

Рис. 5. Зависимость энергии протона с начальной энергией $\varepsilon_0 = 200$ МэВ от глубины проникновения в эпоксидную смолу

По графику на 5 можно определить энергию протона в зависимости от глубины проникновения протона в вещество.

Таким образом, можно предложить следующий алгоритм расчета потерь энергии протоном, который влетает в вещество с энергией ε^* .

По графику для заданной ε^* определяем глубину $x^*(\varepsilon^*)$. Чтобы определить энергию протона $\varepsilon(l)$ на глубине l , надо по графику найти энергию, которая соответствует $x^* + l$. Тогда потеря энергии будет равна $\varepsilon^* - \varepsilon(x^*(\varepsilon^*) + l)$.

$$\Delta\varepsilon(l) = \varepsilon^* - \varepsilon(x^*(\varepsilon^*) + l). \quad (5)$$

Более наглядно данная процедура представлена на 6.

Рис. 6. Схема расчета ионизационных потерь энергии протона от величины пробега на примере алюминия

На основе графика 5 можно получить зависимость тормозной способности протона энергии 200 МэВ от глубины проникновения (кривую Брэгга), которая изображена на Рис. 7.

Рис. 7. Кривая Брэгга для протона с энергией $\varepsilon_0 = 200$ МэВ в эпоксидной смоле

2 Непрерывное замедление в кусочно-однородной среде

Рассмотрим принципиальную схему переноса протонов в среде, составленной из двух материалов с разными рассеивающими свойствами (8).

Рис. 8. Схема переноса протона в кусочно-однородной среде в приближении непрерывного торможения с учетом детектирующей системы

Алгоритм вычисления энерговыделения и потока энергии построен в приближении непрерывного замедления – угловым рассеянием и ядерными взаимодействиями протонов пренебрегается.

Пусть заданы начальные параметры протона: энергия ε_0 и направление распространения Ω_0 (8).

Используя процедуру трассировки, находим точки P_0 и P_1 пересечения луча траектории с оболочкой материала «А» и расстояние $[P_0, P_1]$.

Используя процедуру, проиллюстрированную 6, находим энергию протона $\varepsilon(P_1)$ в точке P_1 .

Далее, используя модуль трассировки, находим точки $P_2, \dots, P_7$ пересечения луча траектории с оболочкой материала «Б» и системой детекторов, а также расстояния между ними.

По формуле (5) вычисляем энергию протона в этих точках и заносим величины $\varepsilon(P_3) - \varepsilon(P_2)$, $\varepsilon(P_4) - \varepsilon(P_5)$, $\varepsilon(P_6)$ в соответствующие детекторы.

Расчет траектории заканчивается, если частица вылетает за пределы рассеивающей среды или теряет критическое количество энергии $\varepsilon < \varepsilon_{min}$.

Блок-схема модуля приведена на 9.

Рис. 9. Блок-схема вычислительного модуля, реализующего алгоритм «непрерывного торможения»

3 Программная реализация алгоритма

Общая схема программных блоков модуля подготовки данных для моделирования переноса тяжелых заряженных частиц в веществе изображена на 10. Модуль состоит из блока подготовки констант, описывающих рассеивающие свойства среды, и решателя, реализующего вычисление кривой Брэгга и трассировку.

Рис. 10. Схема подготовки библиотеки констант для моделирования взаимодействия тяжелых заряженных частиц со сложными веществами

Большинство актуальных материалов представляют собой химические и/или механические смеси разных химических элементов. В таких материалах рассеяние протонов характеризуют средними величинами. Это позволяет упростить анализ, уменьшить объем хранимой информации и ускорить вычисления. В данной реализации алгоритма для сложных веществ использовалась формула (2), а для расчетов процедура – выражение (4).

Геометрия рассеивающей среды описывается двумя основными способами. Поверхностно-ориентированное описание многокомпонентных объектов основано на точном определении границ гомогенных составляющих внутренней структуры объекта и задании соответствующих разделяющих замкнутых триангуляционных оболочек. Кусочно-однородные объекты при таком описании задаются парой $(\mathcal{X}, U)$. Здесь $\mathcal{X} = \{\mathcal{X}_i\}$ – тормозные способности среды в i -ой однородной части объекта, $U = \{u_q\}$ – множество разделяющих оболочек u_q , задающих границы между однородными частями объекта [14].

Применяется также описание объектов при помощи сетки вокселей. Каждый из них «заполнен» однородным веществом, свойства которого не меняются в пределах данного вокселя.

Рис. 11. Существующие подходы к геометрическому описанию объектов

Рис. 12. Схема трассировки

Пересечение луча траектории с плоскостью треугольника определяется следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot t \\ (\mathbf{r}(t) - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}) = 0 \end{cases}$$

В воксельном подходе обычно воксели являются и детекторной сеткой. При поверхностно-ориентированном подходе построение детекторной системы является самостоятельной задачей.

Подход к заданию объекта определяет и способ его трассировки при построении траекторий частиц.

Исключение рассмотрения углового рассеяния дает возможность использовать алгоритм трассировки, разработанный для нерассеянного гамма-излучения [14], [15]. Для трассировки также используется метод бариецентрических координат, описанный ниже.

Каждый треугольник в геометрическом описании определяется координатами вершин $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ и индексом принадлежности к определенному слою (Рис. 12). Луч траектории задается формулой $\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot t$, где $\mathbf{r}_0$ – текущее положение частицы в лабораторной системе координат, $\boldsymbol{\omega}$ – направляющий вектор. Нормаль к плоскости треугольника вычисляется по формуле $\mathbf{n} = [(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) \times (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0)]$. Тогда плоскость, на которой лежит треугольник, определяется скалярным произведением $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}) = 0$, или $(\mathbf{L}, \mathbf{p}) = 0$, где $\mathbf{L} = (n_x, n_y, n_z, -\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0) = (\mathbf{n}, -\mathbf{n} \cdot \mathbf{p}_0)$ в 4-мерном представлении.

Отсюда $(\mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot t - \mathbf{p}_0, \mathbf{n}) = 0$. Далее

$$(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) + (\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n}) \cdot t - (\mathbf{p}_0, \mathbf{n}) = 0 \Rightarrow t^* = -\frac{(\mathbf{r}_0, \mathbf{n}) - (\mathbf{p}_0, \mathbf{n})}{(\boldsymbol{\omega}, \mathbf{n})} \Rightarrow t^* = -\frac{\mathbf{L} \cdot \mathbf{R}_0}{\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\Omega}},$$

где $\mathbf{R}_0 = (\mathbf{r}_0, 1)$, $\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\omega}, 0)$ (4-мерные вектора).

Для установления, лежит ли точка пересечения траектории с плоскостью треугольника $\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \boldsymbol{\omega} \cdot t^*$ внутри треугольника, используются барицентрические координаты b_1 , b_2 и b_0 , так что $\mathbf{p} = b_0 \cdot \mathbf{p}_0 + b_1 \cdot \mathbf{p}_1 + b_2 \cdot \mathbf{p}_2$. Используя условие, $b_0 + b_1 + b_2 = 1$, получим

$$\mathbf{p} = (1 - b_1 - b_2) \cdot \mathbf{p}_0 + b_1 \cdot \mathbf{p}_1 + b_2 \cdot \mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_0 + b_1 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0) + b_2 (\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0).$$

Введя переменные $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_0$, $\mathbf{Q}_2 = \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0$, $\mathbf{R} = \mathbf{p} - \mathbf{p}_0$, получим равенство $\mathbf{R} = b_1 \cdot \mathbf{Q}_1 + b_2 \cdot \mathbf{Q}_2$. Умножив скалярно данное равенство последовательно на $\mathbf{Q}_1$ и $\mathbf{Q}_2$, получим систему уравнений для вычисления b_1 и b_2 :

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_1) \\ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_2) \end{bmatrix}, \text{ где } t_{ik} = (\mathbf{Q}_i, \mathbf{Q}_k).$$

Решая вышеприведенную систему относительно b , получим:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{12} & t_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_1) \\ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_2) \end{bmatrix} = (D)^{-1} \begin{bmatrix} t_{22} & -t_{12} \\ -t_{12} & t_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_1) \\ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{Q}_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{R} \cdot \mathbf{W}_1) \\ (\mathbf{R} \cdot \mathbf{W}_2) \end{bmatrix},$$

где $\mathbf{W}_1 = q_{22}\mathbf{Q}_1 - q_{12}\mathbf{Q}_2$; $\mathbf{W}_2 = q_{11}\mathbf{Q}_2 - q_{12}\mathbf{Q}_1$; $q_{ik} = t_{ik} \cdot D^{-1}$; $D = t_{11} t_{22} - t_{12} t_{12}$.

Если b_1 , b_2 , b_0 больше 0, то точка пересечения находится внутри треугольника. Если одна из координат равна 0, то точка пересечения лежит на ребре треугольника. Такой подход позволяет регулировать соотношения между хранимой информацией о треугольниках и объемом вычислений – количеством операций, требуемых для определения треугольников и точек пересечения с ними траектории частицы.

Блок-схема модуля трассировки, использующего барицентрические координаты, приведена на 13.

Рис. 13. Блок-схема модуля трассировки

Выбор алгоритма трассировки осуществляется в зависимости от постановки задачи и имеющейся вычислительной техники. Методы трассировки воксельных объектов также зависят от имеющихся в наличии реализованных алгоритмов и наличия высокопроизводительной вычислительной техники.

4 Модельные расчеты

Рассмотрим примеры расчетов.

В модели «А», на 14, рассматривалось рассеяние коллимированного пучка протонов с начальной энергией 100 МэВ в алюминиевой пластине. Толщина пластины выбрана так, чтобы протоны полностью поглотились.

Рис. 14. Схема модели «А»

Рис. 15. Кривая Брэгга для модели «А»

Результат расчета приведен на графике 15. Результаты совпадают с известными данными. Отчетливо выделяется пик Брэгга.

Рис. 16. Схема модели «Б»

В качестве модели «Б», изображенной на 16, рассмотрена пластина из эпоксидной смолы и коллимированный пучок протонов.

На графиках 17 и 18 приведены результаты для моделирования переноса протонов в эпоксидной смоле с разными первоначальными энергиями.

Рис. 17. Кривая Брэгга для модели «Б»
с $\varepsilon_0 = 80$ МэВ

Рис. 18. Кривая Брэгга для модели
«Б» с $\varepsilon_0 = 120$ МэВ

Рассеивающая преграда модели «В» представляет собой смолу, покрытую с двух сторон алюминиевыми пластинами.

Рис. 19. Модель «В»,
 $\varepsilon_0 = 100$ МэВ

Рис. 20. Кривая Брэгга для модели «В»,
 $\varepsilon_0 = 100$ МэВ

На графике 20 видны разрывы кривой Брэгга на границах материалов. Разрывы возникают вследствие разной тормозной способности веществ.

Модели «Г» и «Д» представляют собой усложнение предыдущих моделей путем вставок в смолу кремниевых пластин разной толщины.

Рис. 21. Модель «Г», $\varepsilon_0 = 100$ МэВ

На графиках 22 и 23 отчетливо выделяются положения кремниевых пластин на фоне эпоксидной смолы.

Рис. 22. Кривая Брэгга для модели «Г»,
 $\varepsilon_0 = 100$ МэВ

Рис. 23. Кривая Брэгга для модели «Д»,
 $\varepsilon_0 = 100$ МэВ

На 24 – 26 изображены результаты моделирования переноса протонов с источниками, имеющими линейчатый спектр. Такие источники используются для протонной терапии [2 – 5].

Рис. 24. Кривые Брэгга в эпоксидной смоле. Линейчатый спектр протонов в диапазоне $\varepsilon_0 = 80 \div 120$ МэВ, шаг спектра 4 МэВ

Рис. 25. Кривые Брэгга в лавсане. Линейчатый спектр протонов в диапазоне $\varepsilon_0 = 80 \div 120$ МэВ, шаг спектра 4 МэВ

Рис. 26. Кривые Брэгга в эпоксидной смоле. Линейчатый спектр протонов в диапазоне $\varepsilon_0 = 80 \div 120$ МэВ, шаг спектра 1 МэВ

Ниже представлен результат из области протонной компьютерной томографии [5]. 27 демонстрирует результат моделирования распространения плоского

потока протонов с энергией $\varepsilon_0 = 120$ МэВ через тор из лавсана. Плотность лавсана составляет 0.35 г/см^3 . Поток исходно направлен вдоль оси x .

Рис. 27. Энергия протонов, прошедших сквозь лавсановый тор

Для других ТЗЧ данный подход также применим, главное иметь необходимые данные о тормозных способностях материалов. Анализ полученных результатов на 28 подтверждает справедливость вывода о том, что тормозная способность пропорциональна квадрату заряда частицы.

Протоны, $\varepsilon_0 = 150$ МэВ

α -частицы, $\varepsilon_0 = 150$ МэВ

α -частицы, $\varepsilon_0 = 600$ МэВ

α -частицы, $\varepsilon_0 = 450$ МэВ

Рис. 28. Результаты моделирования переноса протонов и альфа-частиц сквозь лавсан (4 см) и эпоксидную смолу (8 см)

Заключение

Ускорители протонов и тяжелых ионов являются эффективными техническими средствами для создания в рассеивающей среде объемного энерговыделения с управляемым распределением плотности. Предлагаемый алгоритм с достаточно высокой точностью позволяет выбирать энергию частицы и направление облучения для получения максимального энерговыделения в заданной области рассеивающего объекта. Подход применим для протонов с энергиями порядка сотен МэВ, применяемых для протонной томографии.

Рассеяние других тяжелых заряженных частиц – ионов атомов, более тяжелых, чем водород, также можно моделировать в рамках рассмотренного подхода. Для практической реализации необходимы данные о тормозных способностях материалов. Так, ресурс NIST предоставляет сведения о тормозных способностях альфа-частиц для отдельных химических элементов.

Ресурс SR-NIEL (<http://www.sr-niel.org>) предоставляет больше возможностей для получения табличных данных по тормозным способностям материалов.

Дальнейшее развитие модели и алгоритмов планируется в направлении моделирования учета ядерного рассеяния. Это позволит применять модель для оценки радиационной стойкости изделий микроэлектроники.

Библиографический список

- 1 Радиационная стойкость изделий ЭКБ. Научное издание / Под ред. Чумакова А.И. М.: НИЯУ МИФИ, 2015, 512 с.
- 2 Лосев Д.В., Ломанов М.Ф., Черняев А.П. Аналитический расчет модифицированной кривой Брэгга. // Препринт НИИЯФ МГУ. 2003. №16/729.

3 Мороз Е.М., Ванина Е.А. Применение программных пакетов GEANT4 и FLUKA для исследования взаимодействия потока заряженных частиц с биологическими тканями. // Вестник АмГУ. 2013. №61. с. 22-25.

4 Кавригин П.С., Мерц С.П., Немнюгин С.А., Толушкин С.Г.. Использование программных пакетов FLUKA и GEANT4 для решения задач адронной терапии. Вестник СПбГУ. Сер. 4, 2010, вып. 4.

5 Ющенко О.П. Протонная томография в ИФВЭ. 1. Томографическая задача и методы решения: Препринт ИФВЭ 2012-14. – Протвино, 2012. – 20 с.

6 Калашников Н.П., Ремизович В.С., Рязанов М.И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.: Атомиздат. 1980.

7 Росси Б. Частицы больших энергий: Пер. с англ. М.: Гостехиздат. 1955.

8 Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. Флуктуации пробега заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат. 1988.

9 Черняев А.П. Взаимодействие ионизирующего излучения с веществом. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004.

10 Molière G. (1947). «Theorie der Streuung schneller geladener Teilchen I: Einzelstreuung am abgeschirmten Coulomb-Feld» Z. f. Naturforsch. A2, 133.

11 Барашенков В.С. Сечения взаимодействия частиц и ядер с ядрами. Дубна, ОИЯИ, 1993, 346 с.

12 Janni J.I. // Atom Data and Nucl. Data Tabl. 1982. Vol. 27. P. 147-339.

13 Егорова В.А., Жуковский М. Е., Подоляко С.В., Тараканов И.А. Математическая модель взаимодействия протонов с веществом // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2017. № 138. 24 с. doi:10.20948/prepr-2017-138, http://keldysh.ru/papers/2017/prep2017_138.pdf.

14 Загонов В.П., Жуковский М.Е., Подоляко С.В., Скачков М.В., Тиллак Г.-Р., Беллон К. Применение поверхностно ориентированного описания объектов для моделирования трансформации рентгеновского излучения в задачах вычислительной диагностики // Математическое моделирование. 2004, т.16, №5, с.103-116.

15 Загонов В.П., Подоляко С. В. О подходе с описанием границ в задачах неразрушающего контроля и диагностики // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша. 2000. № 3.