ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 246 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Галанин М.П., Сорокин Д.Л.

Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Галанин М.П., Сорокин Д.Л. Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 246. 24 с. doi:10.20948/prepr-2018-246
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-246

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В. Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

М.П. Галанин, Д.Л. Сорокин

Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина

Москва — 2018

Галанин М.П., Сорокин Д.Л.

Разработка и применение численных методов решения задач в неограниченной области на основе третьей формулы Грина

Проанализирован двухэтапный алгоритм для решения задач с линейным эллиптическим оператором, для которого известно фундаментальное решение. Предложены новые методы решения задач в неограниченной области с оператором смешанного типа: метод расширения области, метод задания интегральных граничных условий и трёхэтапный итерационный метод. Область применимости построенных методов ограничивается случаями, когда вне некоторой финитной области операторы имеют известное фундаментальное решение, а их правая часть однородна. Для решения конкретных задач на основе предложенных методов созданы вычислительные алгоритмы, реализованные в виде программного обеспечения для ЭВМ. Проведены серии вычислительных экспериментов, подтверждающие корректность методов. Представлены результаты расчётов электромагнитного поля вокруг рельсов электродинамического ускорителя типа рельсотрон в двумерном случае.

Ключевые слова: неограниченная область, оператор смешанного типа, электромагнитное поле.

Mikhail Pavlovich Galanin, Dmitry Leonidovich Sorokin

Development and application of numerical methods for solving tasks in unlimited regions based on the third Green formula

The two-step algorithm for solving problems with a linear elliptic operator, for which the fundamental solution is known, is analyzed. New methods for solving problems in an unbounded areas with a mixed type operator are proposed: a method for expanding a domain, a method for specifying of integral boundary conditions and a three-step iterative method. The range of applicability of the constructed methods is limited by cases where outside a certain finite area the operators have a known fundamental solution and their right-hand side is homogeneous. To solve specific problems on the basis of the proposed methods, computational algorithms have been created, implemented in the form of computer software. A series of computational experiments confirming the correctness of the methods carried out. The results of calculations of the electromagnetic field around the rails of an electrodynamic rail-type accelerator in the two-dimensional case are presented.

Key words: unlimited area, mixed operator, electromagnetic field.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00252).

1. Введение и постановка задачи

При исследовании физических явлений часто возникает необходимость проводить численное моделирование в неограниченной области. В случае, когда явление можно описать с помощью простейших линейных эллиптических операторов, проблема решена и описана, например, в [1, 2]. Постановка неотражающих граничных условий для волновых уравнений подробно рассмотрена в [3].

Целью данной работы является разработка численных методов моделирования процессов в неограниченной области для более широкого класса задач, для которых оператор задачи может иметь смешанный тип, но вне некоторой финитной области фундаментальное решение оператора известно и легко вычисляется.

В частности, задачи с операторами такого вида возникают при моделировании электромагнитного поля в электродинамических ускорителях рельсового типа. Характерное время протекания электродинамических процессов в ускорителях много больше времени прохождения светом характерного пространственного масштаба задачи. Проводимость материалов, по которым течет электрический ток, достаточно высока, так что в них выполнены условия применимости магнитогидродинамического (в данном случае — квазистационарного) приближения уравнений Максвелла [4, 5]. Процесс протекания тока в проводнике в этом случае будет описываться параболическим уравнением, а электромагнитное поле в диэлектрике — эллиптическим.

В § 2 проанализирован метод, представленный в [2]. Изложены особенности применения метода и возможные его модификации.

В § 3 предложены методы решения задачи в случае дифференциального оператора смешанного типа.

В § 4 показана применимость разработанных методов к решению задачи моделирования электромагнитного поля вокруг системы бесконечных проводников с током.

Изложение проведено на примере двумерных задач.

2. Решение эллиптических задач в неограниченной области

В [2] рассмотрен метод решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области (в частности, уравнений Лапласа, Гельмгольца и бигармонического уравнения). Основным соотношением метода является третья формула Грина [6]:

$$u(P) = \int_V \Phi_P f \, dV + \int_{\partial V} \Upsilon\left(\Phi_P, u\right) \, dS, \tag{2.1}$$

где Φ_P — фундаментальное решение соответствующего оператора задачи, $\Upsilon(\Phi_P, u)$ — подынтегральная функция, соответствующая оператору задачи.

Рассмотрим подробнее особенности применения метода на примере решения уравнения Пуассона [7]:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta u = 0, \ \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2 \backslash D_S, \end{cases} \tag{2.2}$$

где $D_S = \operatorname{supp} f$ — носитель f.

Здесь и далее предполагается, что искомое решение удовлетворяет условиям регулярности на бесконечности [6, 7]. В двумерном случае, в частности, это означает, что решение ограничено всюду. Это, в свою очередь, накладывает ограничение на функцию f, стоящую в правой части уравнения. Будем считать эти условия выполненными во всех рассматриваемых в работе задачах. Для сокращения записи в формулировках задач они опущены. Условия сопряжения решения на границе области D_S также опущены.

Для (2.2) третья формула Грина запишется следующим образом:

$$u(P) = \int_{D_S} \Phi_P^L f \, dV, \tag{2.3}$$

где Φ_P^L — фундаментальное решение оператора Лапласа [5],

$$\Phi_P^L(\mathbf{r}) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_P|} \right),$$

$\mathbf{r}_P$ — радиус-вектор точки P. Интегрирование в выражении (2.3) ведётся по $\mathbf{r}$.

В [2] показано, что проекция решения задачи (2.2) на некоторую ограниченную односвязную область D: $D_S \subset D$ совпадает с результатом последовательного решения двух задач в конечных подобластях $\mathbb{R}^2$. Обозначим эти области (рис. 1): большую — D, меньшую — D'.

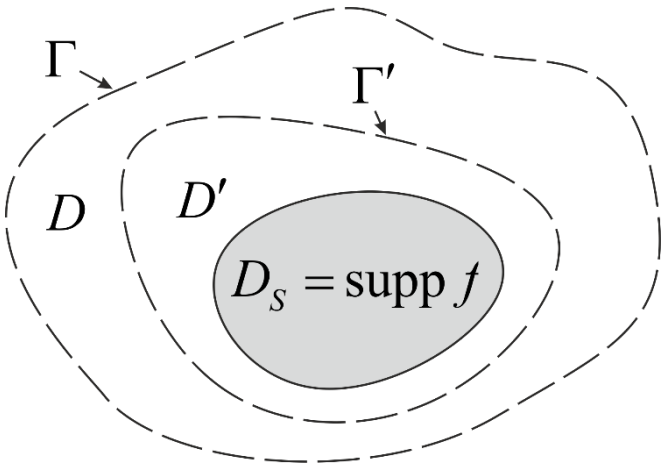

Рис. 1. Структура расчётной области

Область D выбирается произвольным образом так, чтобы она полностью включала в себя область $D_S = \operatorname{supp} f$. Внутри области D действует тот же оператор, что и в исходной задаче, но на границе Γ этой области ставятся некоторые достаточно произвольные граничные условия. В силу того, что на следующем шаге метода потребуется вычислять и значение функции, и её нормальную производную на границе Γ, целесообразно задать граничные условия третьего рода. Таким образом, приходим к следующей постановке задачи:

$$\begin{cases} \Delta v = f, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta v = 0, \ \mathbf{r} \in D \backslash D_S, \\ \left(\alpha v + \dfrac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \end{cases} \tag{2.4}$$

где α — числовой параметр.

Для (2.4) также можно выписать третью формулу Грина:

$$v(P) = \int\limits_{D_S} \Phi_P^L f \, dV + \int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{2.5}$$

Сопоставляя (2.3) и (2.5), можно заметить, что

$$v(P) = u(P) + \int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \, . \tag{2.6}$$

Для того чтобы учесть влияние границы искусственной области, необходимо вычислить значение интеграла

$$I(P) = \int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} - v \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS \tag{2.7}$$

в каждой точке области D. Заметим, что вблизи границы Γ функция Φ_P^L имеет особенность, поэтому целесообразно искать решение задачи (2.2) не в области D, а в области D': $D_S \subset D' \subset D$. Это позволит не вычислять интегралы с особенностями.

Также отметим, что прямое вычисление интеграла I рационально применять только при параллельной реализации метода, т.к. интегралы можно вычислять независимо. В случае проведения расчётов на одном процессоре ЭВМ численное интегрирование стоит заменить решением следующей вспомогательной задачи:

$$\begin{cases} \Delta w = 0, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta w = 0, \ \mathbf{r} \in D' \backslash D_S, \\ w\big|_{\Gamma'} = \displaystyle\int\limits_{\Gamma} v \left(\alpha \Phi_P + \frac{\partial \Phi_P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \end{cases} \tag{2.8}$$

Тогда $u = v + w$. Можно заменить (2.8) сходной задачей:

$$\begin{cases} \Delta u = f, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta u = 0, \quad \mathbf{r} \in D' \backslash D_S, \\ u\big|_{\Gamma'} = v + \int\limits_{\Gamma} v \left(\alpha \Phi_P + \dfrac{\partial \Phi_P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \end{cases} \tag{2.9}$$

В случае решения (2.2) задачи (2.8) и (2.9) приводят к идентичным результатам, однако в дальнейшем при усложнении оператора будем применять метод только в форме (2.9).

Альтернативным способом численного нахождения проекции решения задачи (2.2) на некоторую конечную область D может быть метод задания на границе этой конечной области D искусственных граничных условий, тех же самых, что и на бесконечности:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = f, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta \tilde{u} = 0, \quad \mathbf{r} \in D \backslash D_S, \\ \tilde{u}\big|_{\Gamma} = g(\mathbf{r}). \end{cases} \tag{2.10}$$

При решении задач с помощью сеточных численных методов точность решения определяется шагом сетки, а при увеличении расчётной области ошибка, определяемая заданием граничного условия в форме (2.10), уменьшается. Поэтому для решения задач в неограниченной области можно использовать метод расширения области. Т.е. можно найти такой размер расчётной области, что влияние искусственной границы будет меньше, чем погрешность численного метода.

С целью сравнения метода [2] и метода расширения области проведена серия вычислительных экспериментов. В качестве тестовой выбрана задача, описанная в [2]:

$$\Delta u = f, \ \mathbf{r} \in \mathbb{R}^2,$$
$$f(r,\varphi) = \begin{cases} \left(1 - r/R_0\right)^m \cdot \cos\varphi, & r \le R_0, \\ 0, & r > R_0. \end{cases} \tag{2.11}$$

Точное решение задачи имеет вид:

$$U(r,\varphi) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=2}^{m+2} y_k r^k + C_1 r \right) \cdot \cos\varphi, & r \le R_0; \\ C_2 \dfrac{\cos\varphi}{r}, & r > R_0, \end{cases}$$

где $y_k = \dfrac{(-1)^k C_m^{k-2}}{R_0^{k-2}(k^2-1)}$, $C_m^k = \dfrac{m!}{k!\,(m-k)!}$ — биномиальные коэффициенты, $C_1 = -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=2}^{m+2}(k+1) y_k R_0^{\,k-1}$, $C_2 = \sum\limits_{k=2}^{m+2} y_k R_0^{\,k+1} + C_1 R_0^2$.

При численном решении используем дискретизацию области и разностную схему, описанные в [2]. Погрешность аппроксимации этой схемы на четырежды непрерывно дифференцируемых решениях равна $O\left(h_\varphi^2 + h_r^2\right)$ [8, 9]. Результаты серии расчётов, в которой варьировался параметр α в граничных условиях, приведены в таблице 1. Для оценки погрешности здесь и далее используется равномерная норма $\|u\|_C = \max_i\left(|u_i|\right)$. Результаты позволяют сделать вывод, что метод устойчив по вспомогательным граничным условиям и сохраняет второй порядок точности разностной схемы.

Таблица 1. Результаты решения тестовой задачи (2.11) для $m=1,\ R_0=0.85,$ $R=1.0,\ R'=0.9$.

Шаг h^*	N_r	N_φ	$\|u_h-u\|_C/\|u\|_C$ $\alpha=10^{-9}$	p	$\|u_h-u\|_C/\|u\|_C$ $\alpha=10$	p	$\|u_h-u\|_C/\|u\|_C$ $\alpha=10^{9}$	p
h	10	50	$6.93\cdot10^{-3}$		$8.57\cdot10^{-3}$		$8.74\cdot10^{-3}$	
h / 2	20	100	$1.50\cdot10^{-3}$	2.20	$1.57\cdot10^{-3}$	2.46	$1.58\cdot10^{-3}$	2.46
h / 4	40	200	$3.61\cdot10^{-4}$	2.07	$3.85\cdot10^{-4}$	2.04	$3.87\cdot10^{-4}$	2.04
h / 8	80	400	$8.94\cdot10^{-5}$	2.00	$9.53\cdot10^{-5}$	2.00	$9.59\cdot10^{-5}$	2.00

Здесь и далее R — радиус расчётной области с границей Γ, R' — радиус вспомогательной области с границей Γ', $p=\log_2\left(\left(\|u_h-u\|_C/\|u\|_C\right)\Big|_{h^*}\Big/\left(\|u_h-u\|_C/\|u\|_C\right)\Big|_{h^*/2}\right)$ — величина, характеризующая порядок метода, $(\ \cdot\ )\big|_{h^*}$ — значение, вычисленное на сетке с шагом h^*.

Таблица 2. Результаты решения тестовой задачи (2.11) для $m=1,\ R_0=0.85,$ $R=1.0,\ \alpha=10$.

Шаг	N_r	N_φ	$R-R'$	Кол-во ячеек сетки между R и R' (по радиусу)	$\|u_h-u\|_C/\|u\|_C$
h / 8	80	400	0.1	8	$9.53\cdot10^{-5}$
h / 8	80	400	0.05	4	$9.51\cdot10^{-5}$
h / 8	80	400	0.025	2	$9.85\cdot10^{-5}$
h / 8	80	400	0.0125	1	$7.70\cdot10^{-4}$

Можно показать, что более существенное, чем параметр α, влияние на результат применения метода оказывает выбор области D', т.к. приближение границы Γ' к Γ приводит к возникновению особенности в интегралах I (2.7). Серия расчётов подтверждает, что при приближении границы Γ' к Γ ошибка,

определяемая способом задания граничных условий, становится больше, чем ошибка, определяемая аппроксимацией дифференциального оператора внутри расчётной области (таблица 2).

Результаты расчётов методом расширения области (таблица 3) позволяют сделать вывод, что при проведении расчётов этим методом на регулярных сетках с постоянными шагами для достижения приемлемой точности требуется существенное увеличение расчётной области.

Таблица 3. Результаты решения тестовой задачи (2.11) методом расширения области для $m=1,\ R_0=1.0$.

Шаг	N_r	N_φ	R	$\|u_h-u\|_C / \|u\|_C$
h / 8	160	400	2.0	0.199
h / 8	320	400	4.0	$4.62\cdot10^{-2}$
h / 8	640	400	8.0	$1.13\cdot10^{-2}$
h / 8	1280	400	16.0	$2.76\cdot10^{-3}$
h / 8	2560	400	32.0	$6.49\cdot10^{-4}$
h / 8	5120	400	64.0	$1.21\cdot10^{-4}$

3. Решение задач с дифференциальным оператором смешанного типа в неограниченной области

3.1. Метод задания интегральных граничных условий

Рассмотрим задачу с оператором смешанного типа:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f,\ \mathbf{r}\in D_S, \\ \Delta u = 0,\ \mathbf{r}\in \mathbb{R}^2\backslash D_S, \end{cases} \tag{3.1}$$

где ∂D_S — граница области D_S.

Применим метод конечных разностей для аппроксимации производной по времени.

$$\begin{cases} \Delta\hat{u} - \dfrac{1}{a^2\tau}\hat{u} = -\dfrac{1}{a^2}\hat{f} - \dfrac{u}{a^2\tau}, & \mathbf{r}\in D_S, \\ \Delta\hat{u} = 0, & \mathbf{r}\in \mathbb{R}^2\backslash D_S. \end{cases} \tag{3.2}$$

По сравнению с ситуацией, рассмотренной ранее в § 2, в области D_S на искомую функцию $\hat{u}$ действует оператор типа Гельмгольца, а во внешней области — оператор Лапласа. Эти операторы имеют разные фундаментальные решения, обозначим их Φ_P^H и Φ_P^L соответственно.

В области D_S ($P \in D_S$) имеем

$$\hat{u}(P) = \int\limits_{D_S} \Phi_P^H \left(-\frac{u}{a^2\tau} - \frac{1}{a^2}\hat{f} \right) dV + \int\limits_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^H \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^H}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{3.3}$$

В области $D \backslash D_S$ (D — некоторая область, такая что $D_S \subset D$, $P \in D \backslash D_S$)

$$\hat{u}(P) = \int\limits_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS + \int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{3.4}$$

В случае, когда $D = \mathbb{R}^2$, второй интеграл в правой части равенства (3.4) должен быть равен нулю, поэтому

$$\hat{u}(P) = \int\limits_{\Gamma_S} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{3.5}$$

Заметим, что формулу, аналогичную (3.5), можно выписать для любой области $D \backslash D''$, где D'': $D_S \subset D'' \subset D$, а $\hat{u} \in D'' \backslash D_S$ можно вычислять по значениям на границе Γ'' области D'':

$$\hat{u}(P)\big|_{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma''} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \tag{3.6}$$

На основе формул (3.2) и (3.6) можно построить численный метод решения задачи (3.1).

Выберем в качестве расчётной области некоторую конечную область D: $D_S \subset D$. Выберем область D'': $D_S \subset D'' \subset D$ так, чтобы обеспечить максимальную точность вычисления интегралов (3.6) для точек границы Γ. Теперь значение функции $\hat{u}$ на границе Γ области D полностью определяется значениями функции $\hat{u}$ на границе области D'' и вычисляется по формуле (3.6).

Таким образом, для получения решения задачи (3.1) в конечной области D необходимо решить следующую интегро-дифференциальную задачу:

$$\begin{cases} \Delta \hat{u} - \dfrac{1}{a^2\tau}\hat{u} = -\dfrac{1}{a^2}\hat{f} - \dfrac{u}{a^2\tau}, \ \mathbf{r} \in D_S, \\ \Delta \hat{u} = 0, \ \mathbf{r} \in D / D_S, \\ \hat{u}(P)\big|_{\Gamma} = \displaystyle\int\limits_{\Gamma''} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \end{cases} \tag{3.7}$$

Отметим, что метод не накладывает жёстких ограничений на вид оператора в области $D_S = \operatorname{supp} f$. Для его применимости достаточно, чтобы вне этой области действовал оператор с известным фундаментальным решением.

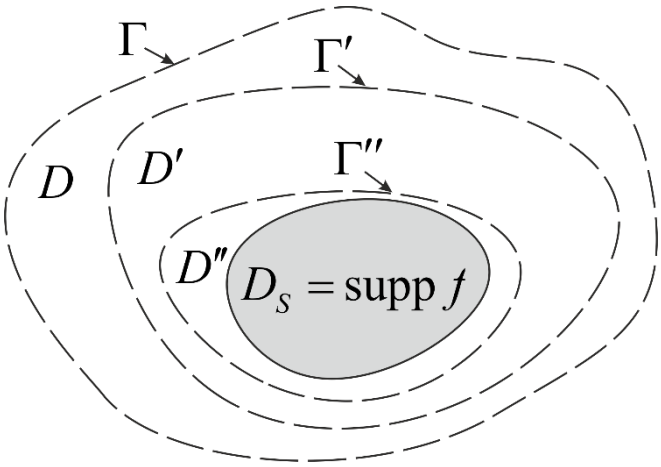

Рис. 2. Структура расчётной области для трёхэтапного метода

3.2. Трёхэтапный метод

Можно решить задачу (3.2) по-другому. Запишем третью формулу Грина, считая, что во всей области D решается уравнение Лапласа, а правая часть зависит от решения на новом временном слое:

$$\hat{u}(P) = \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV + \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \left(-\frac{u}{a^2\tau} - \frac{1}{a^2}\hat{f} \right) dV + \int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS. \qquad (3.8)$$

Метод, описанный в разделе 3.1, строится на основе знания того факта, что слагаемое $\int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P^L \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P^L}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$ не вносит вклада в истинное решение, т.к. в случае неограниченной области для точек $P \in \mathbb{R}^2 \backslash D_S$ выполнено

$$\hat{u}(P) = \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV + \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \left(-\frac{u}{a^2\tau} - \frac{1}{a^2}\hat{f} \right) dV. \qquad (3.9)$$

Для нового метода будет существенно то, что равенством (3.8) описывается не только зависимость решения в области $D \backslash D_S$ от решения внутри области D_S, но и обратная зависимость в случае ограниченной области D. В частности, изменение $\hat{u}$ внутри области D_S влияет на значение $\hat{u}$ на границе области D через слагаемое $\int\limits_{D_S} \Phi_P \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV$, а изменение $\hat{u}$ на границе области D влияет на $\hat{u}$ внутри области D_S через $\int\limits_{\Gamma} \left(\Phi_P \frac{\partial \hat{u}}{\partial \mathbf{n}} - \hat{u} \frac{\partial \Phi_P}{\partial \mathbf{n}} \right) dS$.

Построим численный метод типа предиктор-корректор на основе формулы (3.8).

Этап 1. Предположим, что значение искомой функции на границе Γ медленно изменяется с течением времени и это изменение оказывает слабое

влияние на изменение интеграла $\int\limits_{D_S} \Phi_P \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV$, тогда при переходе на новый временной слой будем задавать в качестве граничных условий значение решения на границе в предыдущий момент времени.

$$\begin{cases} v_t - a^2\Delta\hat{v} = f, \ \mathbf{r} \in D_S; \\ \Delta\hat{v} = 0, \ \mathbf{r} \in D \backslash D_S, \\ \hat{v}\big|_\Gamma = u\big|_\Gamma, \\ v(t_{i-1}) = u. \end{cases}$$

Получаем значение функции на следующем временном слое в некоторой конечной области D с граничными условиями, соответствующими граничным условиям на бесконечности в предыдущий момент времени $u_{i-1}\big|_\Gamma$, но не соответствующими граничным условиям на бесконечности в новый момент времени.

Этап 2. В силу второй части предположения этапа 1 и (3.8)

$$\hat{v}(P) \approx \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV + \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \left(-\frac{u}{a^2\tau} - \frac{1}{a^2} \hat{f} \right) dV + \int\limits_\Gamma \left(\Phi_P^L \frac{\partial\hat{v}}{\partial\mathbf{n}} - \hat{v}\frac{\partial\Phi_P^L}{\partial\mathbf{n}} \right) dS. \qquad (3.10)$$

Сравнивая (3.9) и (3.10), делаем вывод, что для вычисления $\hat{u}$ необходимо учесть влияние слагаемого $\int\limits_\Gamma \left(\Phi_P^L \frac{\partial\hat{v}}{\partial\mathbf{n}} - \hat{v}\frac{\partial\Phi_P^L}{\partial\mathbf{n}} \right) dS$ на $\hat{v}$. Алгоритм для решения похожей задачи уже рассматривался: выбираем область D': $D_S \subset D' \subset D$, вычисляем интеграл $\int\limits_\Gamma \left(\Phi_P^L \frac{\partial\hat{v}}{\partial\mathbf{n}} - \hat{v}\frac{\partial\Phi_P^L}{\partial\mathbf{n}} \right) dS$ для точек $P \in \Gamma'$, где Γ' — граница области D', и решаем вторую вспомогательную задачу:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta\hat{u} = f, \ \mathbf{r} \in D_S; \\ \Delta\hat{u} = 0, \ \mathbf{r} \in D \backslash D_S, \\ \hat{u}\big|_{\Gamma'} = \hat{v}_i + \int\limits_\Gamma \left(\Phi_P \frac{\partial\hat{v}_i}{\partial\mathbf{n}} - \hat{v}_i \frac{\partial\Phi_P}{\partial\mathbf{n}} \right) dS, \\ u(t_{i-1}) = u. \end{cases}$$

Этап 3. В результате выполнения этапа 2 получено значение искомой функции в области D'. Однако задача — эволюционная, так что при выполнении этапа 1 на следующем временном слое необходимо знать значение $\hat{u}$ в точках $P \in \Gamma$. Для этого необходимо ввести область D'': $D_S \subset D'' \subset D'$ и воспользоваться формулой (3.6) из раздела 3.1. Если пропустить данный этап алгоритма, то при переходе с одного временного слой на другой будет происходить накопление ошибки.

Этапы 1–3 на каждом временном слое могут быть выполнены повторно, если на этапе 1 при задании граничных условий использовать $\hat{u}\big|_{\Gamma}$ вместо $u\big|_{\Gamma}$. Использование уточнённого на этапе 3 значения функции на границе приведёт к более точному выполнению приближённого равенства $\int\limits_{D_S} \Phi_P^L \frac{\hat{u}}{a^2\tau} dV \approx \int\limits_{D_S} \Phi_P^L \frac{\hat{v}}{a^2\tau} dV$.

Результаты расчётов показывают, что при «правильном» выборе размера расчётной области итерационное уточнение увеличения точности не даёт, но приводит к существенным затратам вычислительных ресурсов.

Точность результата работы алгоритма для решения эллиптических уравнений из § 2 не зависела от расстояния между границами вспомогательных областей, при применении же трёхэтапного метода к решению задач с оператором смешанного типа конфигурация областей существенна. Этот факт связан с тем, что точность построенного метода зависит от точности выполнения предположения этапа 1. В свою очередь утверждение этого предположения можно удовлетворить с любой степенью точности, расширяя расчётную область D. Далее будет показано, что при решении многих практических задач требуется лишь незначительное расширение расчётной области по сравнению с минимальной для корректного решения задач.

Анализ алгоритма показывает, что точность вычислений будет выше, если Γ'' будет выбрана так, что расстояние от неё до границы области D_S будет минимальным, а Γ' будет близка к Γ. Совпадение Γ и Γ', как и в случае, описанном в разделе 2, приведёт к необходимости вычисления интегралов с особенностями.

3.3. Применение различных методов к решению тестовой задачи

Применим построенный алгоритм к решению следующей задачи:

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = f, \ r \le R_0, \\ \Delta u = 0, \ r > R_0, \end{cases} \tag{3.11}$$

$$f(r,\varphi,t) = a^2\left(\sum_{k=2}^{2+m}\left(1 - r^2\lambda_n^2 - k^2\right)r^{k-2}y_k - C_1 r\lambda_n^2\right)e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\varphi.$$

Начальное условие (при $r \le R_0$):

$$u(r,\varphi,0) = \left(\sum_{k=2}^{m+2}\left(y_k r^k\right) + C_1 r - \frac{2c}{\lambda_n R_0^2 (J_0(R_0\lambda_n) - J_2(R_0\lambda_n))} J_1(r\lambda_n)\right)\cos\varphi.$$

Здесь m и n — задаваемые параметры; J_j — функция Бесселя j-го порядка ($j = 0,1,2$); $\lambda_n = \frac{\mu_n}{R_0}$, где μ_n — n-ый корень уравнения $J_1(\mu_n) = 0$;

$$y_k = \frac{(-1)^k C_m^{k-2}}{R_0^{k-2}\left(k^2-1\right)}; \quad \gamma = 2; \quad C_1 = -\frac{1}{1+\gamma}\sum_{k=2}^{m+2}\left(\left(k\gamma+1\right)y_k R_0^{k-1}\right); \quad C_2 = \sum_{k=2}^{m+2}\left(y_k R_0^{k+1}\right) + C_1 R_0^2;$$

$$c = C_2\left(1-\frac{1}{\gamma}\right).$$

Аналитическое решение имеет вид:

$$u(r,\varphi,t) = \begin{cases} \left(\sum_{k=2}^{m+2}\left(y_k r^k\right) + C_1 r + \frac{2c}{\lambda_n R_0^2 (J_0(R_0\lambda_n) - J_2(R_0\lambda_n))} J_1(r\lambda_n)\right) e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\varphi, \ r \le R_0; \\ \frac{C_2}{r} e^{-\lambda_n^2 a^2 t}\cos\varphi, \ r > R_0. \end{cases}$$

Зададим $m=1,\ n=2,\ a=0.1,\ R_0=1.0.$ График аналитического решения задачи при данных значениях параметров представлен на рис. 3. Для наглядности графики растянуты вдоль вертикальной оси в 100 раз.

Результаты серии вычислительных экспериментов представлены в таблице 4. В силу того, что погрешность расчётов состоит не только из ошибки метода задания граничного условия, но и ошибки аппроксимации оператора задачи, в первом столбце приведена погрешность численного метода при аналитическом задании граничного условия. Решение, полученное при постановке таких граничных условий, будем считать эталонным.

Сравнивая результаты применения трёхэтапного метода и метода интегрального задания граничных условий с эталонными, видим, что постановка в качестве граничного условия аналитического решения не повышает точность результата. Это означает, что ошибка численного решения превышает ошибку от задания искусственный граничных условий.

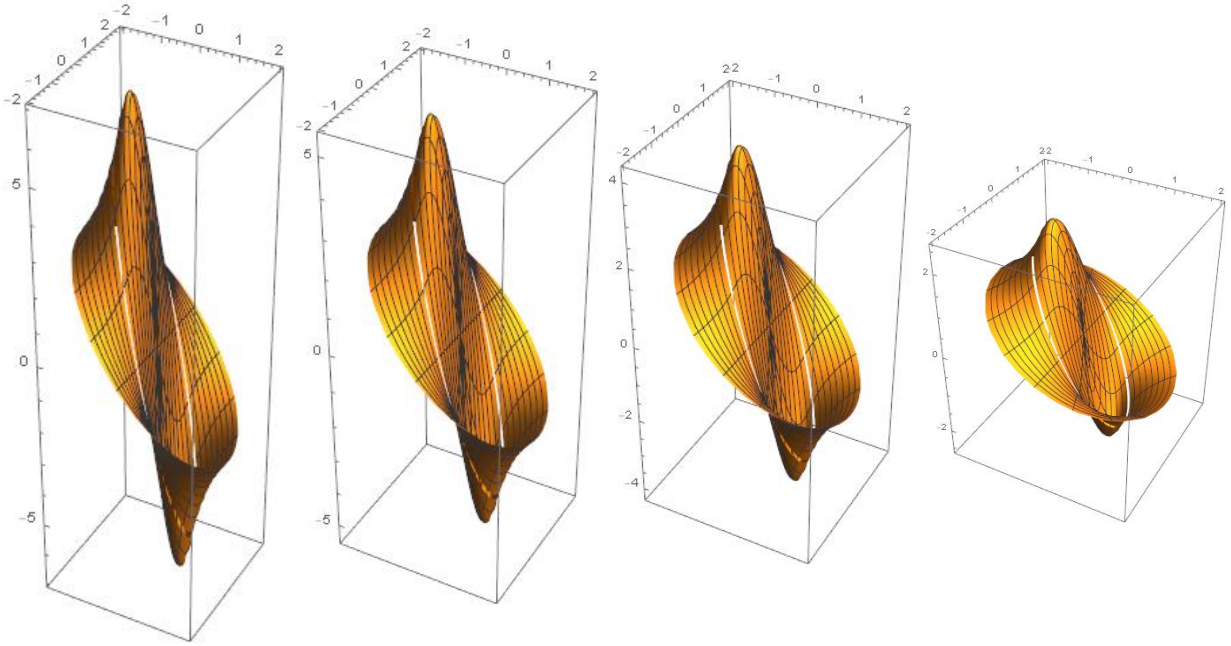

Рис. 3. Аналитическое решение задачи (3.11) в разные моменты времени t = 0.0, 0.5, 1.0, 2.0 (слева направо)

Таблица 4. Результаты решения тестовой задачи (3.11) с помощью трёхэтапного алгоритма и с использованием аналитического решения для задания граничных условий при $R_0 = 1.0,\ R = 2.0,\ \tau = 0.01,\ h = 0.2,\ T = 1.0$ и 0.01.

h^* τ	Число шагов по времени	$\frac{\lVert u_h - u \rVert_C}{\lVert u \rVert_C}$ аналитическое задание ГУ	p	$\frac{\lVert u_h - u \rVert_C}{\lVert u \rVert_C}$ применение трёхэтапного алгоритма	p	$\frac{\lVert u_h - u \rVert_C}{\lVert u \rVert_C}$ интегральные граничные условия	p
h τ	100 1	$9.82221 \cdot 10^{-3}$ $3.14373 \cdot 10^{-3}$		$9.82246 \cdot 10^{-3}$ $3.92573 \cdot 10^{-3}$		$9.82221 \cdot 10^{-3}$ $3.22406 \cdot 10^{-3}$	
h / 2 $\tau/4$	400 4	$2.46644 \cdot 10^{-3}$ $4.78738 \cdot 10^{-4}$	1.99	$2.46644 \cdot 10^{-3}$ $5.7553 \cdot 10^{-4}$	1.99	$2.46644 \cdot 10^{-3}$ $4.55433 \cdot 10^{-4}$	1.99
h / 4 $\tau/16$	1 600 16	$5.4133 \cdot 10^{-4}$ $6.86649 \cdot 10^{-5}$	2.19	$5.4133 \cdot 10^{-4}$ $7.91834 \cdot 10^{-5}$	2.19	$5.4133 \cdot 10^{-4}$ $7.45626 \cdot 10^{-5}$	2.19
h / 8 $\tau/64$	6 400 64	$1.31647 \cdot 10^{-4}$ $2.04168 \cdot 10^{-5}$	2.04	$1.31647 \cdot 10^{-4}$ $2.04168 \cdot 10^{-5}$	2.04	$1.31647 \cdot 10^{-4}$ $2.33421 \cdot 10^{-5}$	2.04
h/16 $\tau/256$	25 600 256	$3.28173 \cdot 10^{-5}$ $4.95498 \cdot 10^{-6}$	2.01	$3.28173 \cdot 10^{-5}$ $6.68925 \cdot 10^{-6}$	2.01	$3.28173 \cdot 10^{-5}$ $7.2379 \cdot 10^{-6}$	2.01

Здесь, как и ранее, $p = \log_2\left(\left(\lVert u_h - u \rVert_C / \lVert u \rVert_C\right)\Big|_{h^*} \Big/ \left(\lVert u_h - u \rVert_C / \lVert u \rVert_C\right)\Big|_{h^*/2}\right)$ — величина, характеризующая порядок метода, $(\ \cdot\ )\big|_{h^*}$ — значение, вычисленное на сетке с шагом h^*.

Отметим, что в таблице 4 приведены результаты, полученные на два момента времени: $T = 0.01$ (нижняя строка в каждой ячейке) и $T = 1.0$ (верхняя строка в каждой ячейке). Результаты, полученные в момент времени $T = 1.0$, с машинной точностью совпадают для всех методов расчёта. Это ещё раз подтверждает корректность построенных методов.

Отметим, что интегральное задание граничных условий существенно усложнило систему линейных алгебраических уравнений по сравнению с исходной (с аналитическим заданием граничного условия). Это привело к увеличению времени расчёта (таблица 5). При применении трёхэтапного метода на каждом этапе решалась одна система линейных алгебраических уравнений, по сложности сопоставимая с исходной. Таким образом, время работы трёхэтапного метода не более чем в два раза больше, чем время решения задачи с аналитическим заданием граничных условий.

Отметим, что для решения задачи (3.11) в бесконечной области также можно использовать метод расширения области. Результат применения такого метода можно видеть в таблице 6.

Таблица 5. Результаты решения тестовой задачи (3.11) с помощью трёхэтапного алгоритма и с использованием аналитического решения для задания граничных условий при $R_0 = 1.0,\ R = 2.0,\ \tau = 0.01,\ h = 0.2,\ T = 0.1,\ d = t/t_a$ — замедление.

	Время расчёта 100 временных слоёв, с (аналитическое задание ГУ)	d	Время расчёта 100 временных слоёв, с (применение трёхэтапного алгоритма)	d	Время расчёта 100 временных слоёв, с (интегральные граничные условия)	d
h τ	0.219	1.0	0.350	1.60	0.263	1.20
h / 2 $\tau/4$	1.06	1.0	1.89	1.78	1.61	1.52
h / 4 $\tau/16$	8.35	1.0	15.0	1.79	18.6	2.23
h / 8 $\tau/64$	149	1.0	245	1.64	325	2.18
h/16 $\tau/256$	3480	1.0	6760	1.94	7210	2.07

Сравнивая таблицы 4 и 6, можно заметить, что для достижения той же точности, что и с помощью трёхэтапного алгоритма, в методе расширения области требуется сетка, число ячеек которой в 16 раз больше (для двумерной задачи). В случае трёхмерной постановки задачи следует ожидать, что расчётную область придётся увеличивать в 64 раза.

Таблица 6. Результаты решения тестовой задачи (3.11) с помощью метода расширения расчётной области при $R_0 = 1.0,\ \tau = 0.01,\ T = 1.0$.

h^* τ	Кол-во шагов по t	$\frac{\lVert u_h - u\rVert_C}{\lVert u\rVert_C}$ аналит. ГУ	p	$\frac{\lVert u_h - u\rVert_C}{\lVert u\rVert_C}$ р. обл. 1 + 3	p	$\frac{\lVert u_h - u\rVert_C}{\lVert u\rVert_C}$ р. обл. 1 + 7	p	$\frac{\lVert u_h - u\rVert_C}{\lVert u\rVert_C}$ р. обл. 1 + 15	p	$\frac{\lVert u_h - u\rVert_C}{\lVert u\rVert_C}$ р. обл. 1 + 31	p
h τ	100	$9.82\cdot10^{-3}$		$5.67\cdot10^{-2}$		$1.30\cdot10^{-2}$		$1.01\cdot10^{-2}$		$1.02\cdot10^{-2}$	
h/ 2 $\tau/4$	400	$2.47\cdot10^{-3}$	1.99	$5.12\cdot10^{-2}$	0.15	$1.21\cdot10^{-2}$	0.10	$2.90\cdot10^{-3}$	1.80	$2.44\cdot10^{-3}$	2.06
h/4 $\tau/16$	1 600	$5.40\cdot10^{-4}$	2.19	$5.23\cdot10^{-2}$	-0.03	$1.25\cdot10^{-2}$	-0.04	$3.07\cdot10^{-3}$	-0.09	$7.44\cdot10^{-4}$	1.71

4. Решение задач с интегро-дифференциальным оператором в неограниченной области

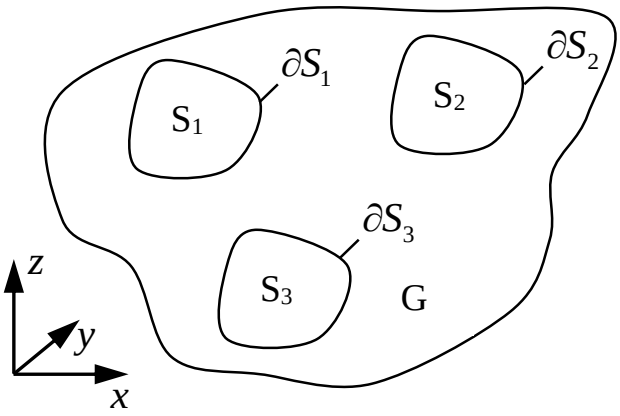

Рис. 4. Схема пространственно-двумерной области

Применим разработанные методы к решению более сложной задачи — моделированию электромагнитного поля в окрестности бесконечных проводников.

Пусть в области G имеется N проводников, по которым протекают токи I_k, где $k \le N$, т.е. $G_1 = \bigcup_{k=1}^{N} S_k$, S_k — область, занимаемая k-ым проводником, ∂S_k — его боковая поверхность (рис. 4).

Пусть электрическая проводимость проводников достаточно высока, чтобы можно было пренебречь током смещения $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ по сравнению с током проводимости $\mathbf{j}$. Тогда для моделирования электромагнитного поля можно использовать систему уравнений Максвелла в квазистационарном (МГД) приближении [4]:

$$\begin{cases} \operatorname{rot}\mathbf{H} = 4\pi\sigma\mathbf{E}, \ (\mathbf{r},\ t) \in G \times (0,\ \mathrm{T}), \\ \operatorname{rot}\mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \\ \mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}. \end{cases} \tag{4.1}$$

Здесь и далее **E** — вектор напряженности электрического поля в системе координат, в которой вещество покоится, **H** — вектор напряженности магнитного поля, **j** — вектор плотности тока, σ — удельная проводимость, **u** — вектор скорости движения вещества, **r** = (x, y, z) — радиус-вектор, t — время.

Система уравнений (4.1) и все дальнейшие формулы записаны в безразмерном виде (в частности, **H** = **B**, где **B** — вектор магнитной индукции).

В двумерном случае систему уравнений Максвелла можно разбить на независимые подсистемы [5]: первая подсистема описывает компоненты $H_x,\ H_z,\ E_y$; вторая подсистема описывает компоненты $H_y,\ E_x,\ E_z$. Общее электромагнитное поле является суммой двух перечисленных полей. Двумерная задача обязательно должна учитывать ток в направлении y, поэтому векторные переменные для первой подсистемы представим следующим образом: $\mathbf{H}=(H_x,\ 0\ ,H_z)^T,\ \mathbf{E}=(0,\ E,\ 0)^T,\ \mathbf{j}=(0,\ j,\ 0)^T,\ \mathbf{A}=(0,\ A,\ 0)^T$.

Важнейшим требованием к модели бесконечных проводников является обеспечение совпадения полных токов, текущих по проводникам расчётной области, с соответствующими токами I_k во внешних цепях устройства:

$$\int\limits_{S_k} \sigma E\ dS = I_k. \tag{4.2}$$

Классическое решение, имеющее непрерывные $H_x,\ H_z,\ E$, не может обеспечить выполнение данного условия. Для его выполнения необходимо разрешить напряжённости электрического поля E иметь скачок при переходе через границы проводников ∂S_k [5]. Вычислив величину скачка согласно закону сохранения полного тока (4.2), после введения векторного потенциала A получим математическую модель (4.3), состоящую из интегро-дифференциальных уравнений для проводящих подобластей, эллиптического уравнения для диэлектрической подобласти и граничных условий [5].

$$\begin{aligned}
&4\pi\sigma\left(\frac{\partial A}{\partial t}-\frac{1}{\int\limits_{\partial S_k}\sigma\ dS}\cdot\left(\int\limits_{\partial S_k}\sigma\frac{\partial A}{\partial t}\ dS+I_k\right)\right)=\Delta A \qquad в\ S_k,\\
&\Delta A=0 \qquad в\ \mathbb{R}^2\backslash\bigcup_k S_k,\\
&A\big|_{t=0}=0,\ \left[A\right]\big|_{\partial S_k}=0.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Будем рассматривать задачу, в которой проводники на рис. 4 являются системой рельсов электродинамического ускорителя рельсового типа. Такая система характеризуется симметричным расположением проводников, поэтому расчёты будут проводиться в четверти пространства (рис. 5). На оси симметрии OX зададим граничные условия симметрии, т.е. равенство нулю нормальной производной A, а на оси OZ — условие асимметрии, т.е. равенство нулю A, на остальных границах расчётной области — условия, которые соответствуют моделированию в бесконечной области.

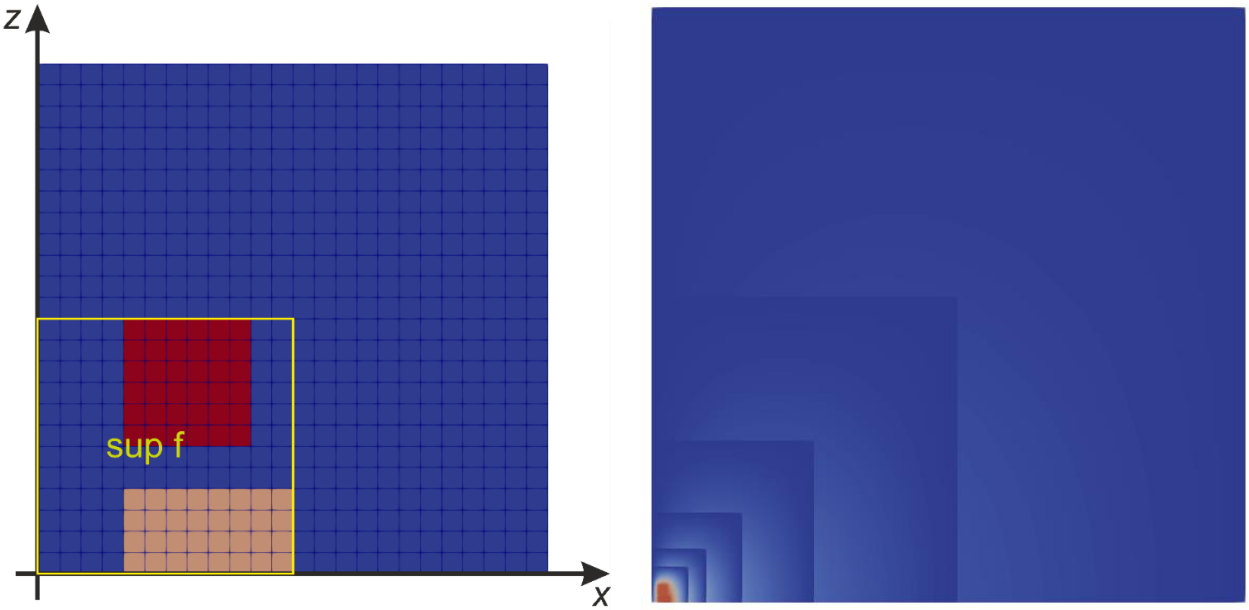

Рис. 5. Структура расчётной области (слева): синим цветом отмечен диэлектрик, красным и оранжевым цветом — проводники. Результаты проведения серии вычислительных экспериментов методом расширения расчётной области (справа): цветом показано распределение векторного потенциала **A** в областях (1+1), (1+2), (1+4), (1+8), (1+16), (1+32)

Внешнюю цепь питания в данной работе не учитываем, считая ток в проводниках заданным в виде функции или таблично.

Результат решения двумерной задачи может быть использован, например, при задании граничных условий для трёхмерной задачи моделирования электромагнитного поля в рельсотроне.

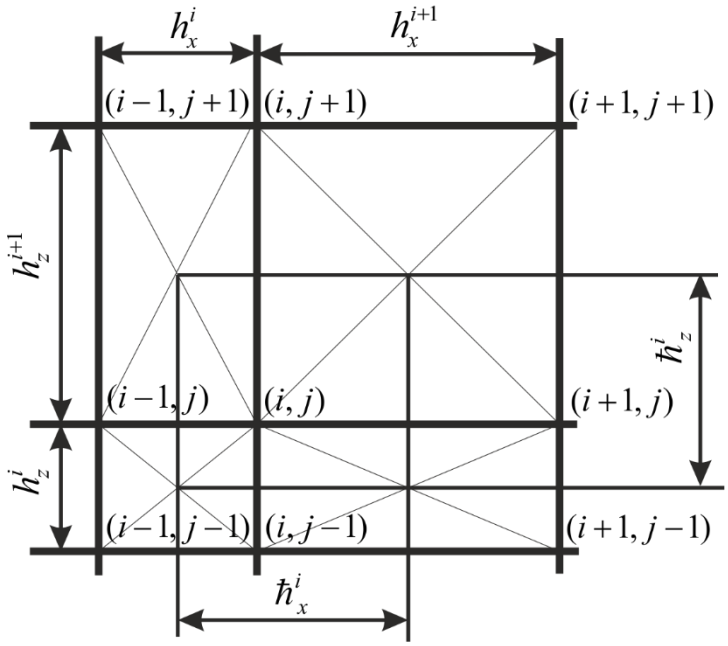

Рис. 6. Вид сетки в расчётной области

Для численного решения задачи введём в пространственной области G регулярную прямоугольную сетку с шагами переменной длины (рис. 6). Отнесём сеточную функцию A к узлам сетки. Используем метод конечных разностей (неявную схему) для аппроксимации производной по времени [5, 10].

$$
\begin{aligned}
&4\pi\sigma\left(\frac{\hat{A}-A}{\tau}-\frac{1}{\int\limits_{\partial S_k}\sigma\, dS}\cdot\left(\int\limits_{\partial S_k}\sigma\frac{\hat{A}-A}{\tau}\, dS+I_k\right)\right)=\Delta\hat{A} \qquad в\ S_k,\\
&\Delta\hat{A}=0 \qquad в\ G\backslash\bigcup_k S_k,\\
&A\big|_{t=0}=0,\ \left[A\right]\big|_{\partial S_k}=0,\ A\big|_{x=0}=A\big|_{x\to\infty}=A\big|_{z\to\infty}=0,\ A_z\big|_{z=0}=0,\\
&\Delta\hat{A}=\frac{1}{\hbar_x^i}\left(\frac{\hat{A}_{i+1,j}-\hat{A}_{i,j}}{h_x^{i+1}}-\frac{\hat{A}_{i,j}-\hat{A}_{i-1,j}}{h_x^i}\right)+\frac{1}{\hbar_z^i}\left(\frac{\hat{A}_{i,j+1}-\hat{A}_{i,j}}{h_z^{i+1}}-\frac{\hat{A}_{i,j}-\hat{A}_{i,j-1}}{h_z^i}\right).
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

Погрешность аппроксимации схемы равна $O\left(h_x^2+h_z^2+\tau\right)$.

Проведём серии расчётов с различными размерами расчётной области и различными характерными шагами по пространству и времени разными методами. За единицу измерения размера области выберем сторону минимального квадрата, в который можно вписать все проводники и начало координат (рис. 5). На рис. 5 (слева) изображена область, которую обозначим (1+1), т.е. её «размер» равен двум.

Таблица 7. Результаты моделирования электромагнитного поля при h = 0.1, τ = 0.05, T = 5.0.

h	τ	Метод интегрального граничного условия		Трёхэтапный метод (1 итерация на одном временном слое)		Метод расширения области		
		Относит. ошибка (норма C)	Время расчёта, с	Относит. ошибка (норма C)	Время расчёта, с	Относит. ошибка (норма C)	Размер области	Время расчёта, с
h	τ	$1.58\cdot10^{-2}$	10.22	$1.54\cdot10^{-2}$	12.83	$1.41\cdot10^{-2}$	1+8	50.52
h/2	$\tau/4$	$3.70\cdot10^{-3}$	71.68	$3.60\cdot10^{-3}$	76.64	$3.95\cdot10^{-3}$	1+16	3 591
h/4	$\tau/16$	$7.37\cdot10^{-4}$	702.6	$7.09\cdot10^{-4}$	770.9	—	—	—
h/8	$\tau/64$	—	12 174	—	14 118	—	—	—

Наиболее надёжным методом учёта граничных условий является метод использования интегральных граничных условий, поэтому за эталонное

выберем решение, полученное этим методом на сетке, наиболее подробной из рассматриваемых. В таблице 7 приведены результаты решения задачи различными методами (ошибка вычислялась сравнением с эталонным решением). На рис. 7 показаны двумерные распределения вектора напряжённости электрического поля и вектора напряжённости магнитного поля вокруг рельсов.

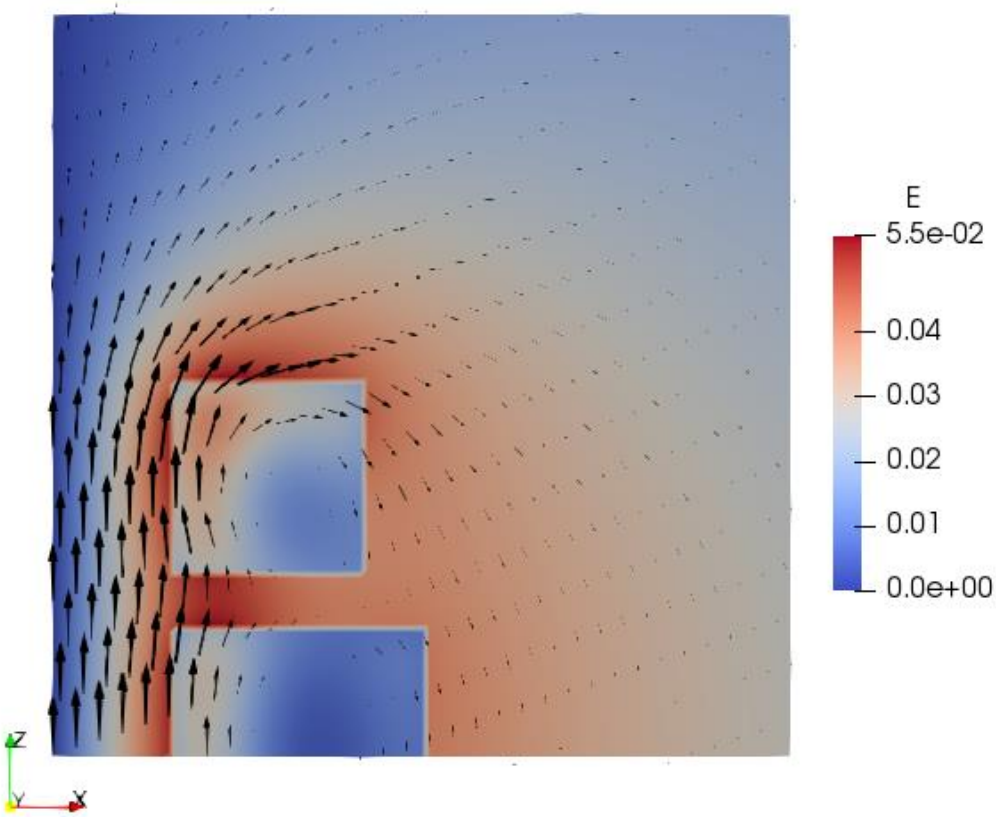

Рис. 7. Решение пространственно-двумерной задачи в момент времени t = 1.0. Цветом указано распределение вектора напряжённости электрического поля, стрелками — напряжённость магнитного поля

Простейшим методом задания граничных условий является метод расширения области. Как и в предыдущих двух случаях, этот метод требует больше вычислительных ресурсов, чем другие методы (таблица 7): для того чтобы повысить точность расчёта в 4 раза, требуется не только уменьшить шаг по пространству в 2 раза и шаг по времени в 4 раза, но и увеличить в 4 раза размер расчётной области. На рис. 5 (справа) показан набор расчётных областей различных размеров: (1+1), (1+2), (1+4), (1+8), (1+16), (1+32), наложенных друг на друга.

При проведении серии расчётов (таблица 6) использовалась регулярная сетка. Отметим, что использование сетки со сгущением может существенно уменьшить вычислительную сложность задачи без потери точности (таблица 8). Сопоставляя таблицы 8 и 9, можно сделать вывод, что качество сетки во внешней по отношению к исследуемой области (минимальной области,

содержащей все проводники) влияет на точность расчётов незначительно, а положение границы расчётной области влияет сильно.

Таблица 8. Результаты моделирования электромагнитного поля методом расширения области на сетке со сгущением (сгущение проводилось согласно закону геометрической прогрессии). Размер области зафиксирован и равен девяти (1+8), h = 0.1, τ = 0.05, T = 5.0.

Коэффициент геометрической прогрессии	Число ячеек по одному направлению	$\frac{\lVert u_h - u \rVert_C}{\lVert u \rVert_C}$	Время расчёта, с
1.0	108	$1.41 \cdot 10^{-2}$	50.52
1.00912	84	$1.41 \cdot 10^{-2}$	33.92
1.03980	60	$1.42 \cdot 10^{-2}$	22.60
1.06730	48	$1.43 \cdot 10^{-2}$	18.66
1.16645	36	$1.48 \cdot 10^{-2}$	14.79
2.17934	24	$2.50 \cdot 10^{-2}$	11.49

Решение задачи с помощью метода задания интегральных граничных условий требует решения системы уравнений с заполненными строками, соответствующими границе. При использовании трёхэтапного метода необходимо решать две системы, но с разреженными строками, относящимися к граничным условиям. Результаты расчётов (таблица 7) показывают, что в случае конкретной задачи итерационный метод неэффективен. Это связано с тем, что оператор задачи интегро-дифференциальный и в строках матрицы системы линейных алгебраических уравнений, относящихся к проводникам, имеется большое количество ненулевых элементов.

Таблица 9. Результаты моделирования электромагнитного поля методом расширения области на регулярной сетке при h = 0.1, τ = 0.05, T = 5.0, f — величина, характеризующая сходимость метода при расширении области.

Размер области	Число ячеек по одному направлению	$\frac{\lVert u_h - u \rVert_C}{\lVert u \rVert_C}$	f	Время расчёта, с
1+1	24	$3.85 \cdot 10^{-1}$		11.5
1+2	36	$1.25 \cdot 10^{-1}$	3.08	15.7
1+4	60	$5.58 \cdot 10^{-2}$	2.24	21.5
1+8	108	$1.41 \cdot 10^{-2}$	3.96	50.5
1+16	204	$1.33 \cdot 10^{-2}$	1.06	182.8

Заключение

Разработаны методы, позволяющие решать задачи с операторами смешанного типа в неограниченной области. Существенно то, что вне некоторой ограниченной области оператор задачи является оператором Лапласа.

Метод расширения расчётной области прост в применении, не требует изменения вычислительного алгоритма по отношению к решению краевой задачи, однако требует существенного увеличения размера расчётной области и, как следствие, либо увеличивает вычислительную сложность задачи, либо приводит к необходимости проводить расчёты на сетках с существенно отличающимися шагами.

Трёхэтапный метод не изменяет тип оператора, но приводит к необходимости решать вспомогательные задачи.

Метод задания интегральных граничных условий приводит к изменению типа решаемых уравнений, существенно увеличивает число ненулевых элементов в матрице системы линейных алгебраических уравнений, но надёжен и не требует ни решения дополнительных задач, ни проведения нескольких итераций на одном временном слое.

На основе анализа методов построен и программно реализован вычислительный алгоритм для моделирования двумерного электромагнитного поля в неограниченной области. Результаты вычислительных экспериментов могут быть использованы при задании граничных условий в более сложной задаче моделирования трёхмерного электромагнитного поля в рельсотроне.

Список литературы

[1] Tsynkov S.V. Numerical solution of problems on unbounded domains. A review // Appl. Math. 1998. V. 27. P. 465 – 532.

[2] Галанин М.П., Низкая Т.В. Разработка и применение численного метода решения линейных эллиптических уравнений в неограниченной области // Препринты ИПМ им. М.В. Келдыша, 2005. № 2, 29 с.

[3] Ильгамов М.А., Гильманов А.Н. Неотражающие условия на границах расчётной области. — М.: Физматлит. 2003. 240 с.

[4] Галанин М.П., Попов Ю.П. Квазистационарные электромагнитные поля в неоднородных средах: Математическое моделирование. М.: Наука. Физматлит, 1995. 320 с.

[5] Галанин М.П., Лотоцкий А.П., Попов Ю.П., Храмцовский С.С. Численное моделирование пространственно трехмерных явлений при электромагнитном ускорении проводящих макротел // Математическое моделирование. 1999. Т. 11, № 8. С. 3 — 22.

[6] Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. — М.: Наука. Физматлит. 1972. 736 с.

[7] Свешников А.Г., Боголюбов А.Н., Кравцов В.В. Лекции по математической физике. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 1993. 352 с.

[8] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука. 1978. 592 с.

[9] Самарский А.А. Теория разностных схем. — М.: Наука. Физматлит. 1989. 616 с.

[10] Галанин М.П., Савенков Е.Б. Методы численного анализа математических моделей. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2010. 591 с.

Оглавление

1. Введение и постановка задачи 3
2. Решение эллиптических задач в неограниченной области 3
3. Решение задач с дифференциальным оператором смешанного типа в неограниченной области 8
   3.1. Метод задания интегральных граничных условий 8
   3.2. Трёхэтапный метод 10
   3.3. Применение различных методов к решению тестовой задачи 12
4. Решение задач с интегро-дифференциальным оператором в неограниченной области 16

Заключение 22

Список литературы 23