ИПМ им.М.В.Келдыша РАН • Электронная библиотека

Препринты ИПМ • Препринт № 144 за 2018 г.

ISSN 2071-2898 (Print)
ISSN 2071-2901 (Online)

Чикиткин А.В., Рогов Б.В.

Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа

Рекомендуемая форма библиографической ссылки: Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша. 2018. № 144. 28 с. doi:10.20948/prepr-2018-144
URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2018-144

О р д е н а Л е н и н а
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
имени М.В.Келдыша
Р о с с и й с к о й а к а д е м и и н а у к

А.В.Чикиткин, Б.В.Рогов

Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа

Москва — 2018

Чикиткин А.В., Рогов Б.В.

Семейство симметричных бикомпактных схем со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа

Для численного решения нестационарных квазилинейных уравнений гиперболического типа предложено семейство полудискретных симметричных бикомпактных схем на основе коллокационных полиномов как в одномерном, так и в многомерном случаях. Представлен дисперсионный анализ полудискретных бикомпактных схем от четвертого до восьмого порядка пространственной аппроксимации из этого семейства. На численных примерах продемонстрирована возможность бикомпактных схем адекватно моделировать распространение волн, в том числе с малыми длинами, на существенно неравномерной разностной сетке в течение длительного времени. Рассмотрены также свойства решений бикомпактных схем в задаче переноса ступенчатого начального профиля.

Ключевые слова: уравнения гиперболического типа, бикомпактные схемы, дисперсионные ошибки, распространение волн

Aleksandr Viktorovich Chikitkin, Boris Vadimovich Rogov

Family of symmetric bicompact schemes with spectral resolution property for hyperbolic equations

For the numerical solution of nonstationary quasilinear hyperbolic equations, a family of symmetric semidiscrete bicompact schemes based on collocation polynomials is constructed in the one- and multidimensional cases. A dispersion analysis of semidiscrete bicompact schemes of fourth to eighth orders of accuracy in space is performed. Numerical examples are presented that demonstrate the ability of the bicompact schemes to adequately simulate wave propagation, including short waves, on highly nonuniform grids at long times. The properties of solutions of bicompact schemes in the problem of transfer of a stepwise initial profile are also considered.

Key words: hyperbolic equations, bicompact schemes, dispersion errors, wave propagation

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект 18-01-00857-а.

1. Введение

Для численного моделирования переноса акустических, электромагнитных и упругих волн на большие расстояния и в течение длительного времени необходимы схемы, обладающие малыми диссипацией и дисперсией. В качестве схем с такими свойствами широко используются симметричные компактные схемы, которые имеют лучшее спектральное разрешение по сравнению с классическими симметричными разностными схемами того же порядка точности [1-3]. В недавней работе [4] предложено семейство полудискретных симметричных компактных схем, обладающих хорошим спектральным разрешением, для численного решения таких много-масштабных задач как задачи вычислительной аэроакустики и прямого численного моделирования турбулентности. Схемы шестого и восьмого порядка точности из данного семейства авторы [4] назвали оптимальными с точки зрения соотношения между точностью и трудоемкостью схем. Однако эти схемы можно использовать в расчетах лишь на равномерных или слабо неравномерных сетках [1, 5], поскольку шаблон схем по каждому пространственному направлению содержит не менее трех целых узлов.

Для численного решения квазилинейного 1D уравнения переноса в работе [6] была предложена полудискретная бикомпактная схема четвертого порядка пространственной аппроксимации, построенная методом прямых на пространственном шаблоне, который расположен в пределах одной ячейки разностной сетки и состоит из двух целых и одного полуцелого узла. Число разностных уравнений схемы равно двум, поэтому эффективный разностный порядок полудискретной схемы, определяемый как разность общего числа узлов шаблона и числа уравнений схемы, равен единице и совпадает с порядком дифференциального уравнения переноса по пространственной переменной. Следствием равенства порядков является совпадение числа граничных условий для дифференциальной и разностной задачи. Кроме того, в случае знакоопределенности скорости переноса полудискретную схему можно решать маршевым по пространственной переменной методом [6]. Порядок аппроксимации бикомпактной схемы сохраняется при переходе от равномерной к существенно неравномерной сетке. Для интегрирования уравнений полудискретной схемы по времени было предложено использовать многостадийные A- и L-устойчивые диагонально-неявные методы Рунге-Кутты (РК), вычислительно эффективные по сравнению с полностью неявными методами РК [7]. Схема [6] была обобщена на случай системы уравнений и на многомерный случай в работах [8-10]. Однако четвертый порядок пространственной аппроксимации может оказаться недостаточным для численного решения многомасштабных задач, где требуются схемы со спектральным разрешением повышенной точности. Поэтому для численного решения уравнений гиперболического типа в [11] было построено семейство симметричных полудискретных бикомпактных схем произвольного четного

порядка пространственной аппроксимации. Пространственные шаблоны неявных бикомпактных схем расположены в пределах одной ячейки разностной сетки и состоят из двух целых и нескольких дробных узлов, при этом значения сеточной функции в ячейке связаны друг с другом с помощью коллокационного полинома.

В настоящей работе представлен дисперсионный анализ схем от четвертого до восьмого порядка пространственной аппроксимации из семейства полудискретных бикомпактных схем [11]. Показано, что фазовая ошибка бикомпактных схем шестого и восьмого порядка не превосходит 0.2 % и 0.03 % соответственно во всем диапазоне значений безразмерного волнового числа. На ряде численных примеров продемонстрирована возможность бикомпактных схем адекватно моделировать распространение волн на существенно неравномерной разностной сетке в течение длительного времени. Рассмотрены также свойства решений бикомпактных схем в задаче переноса ступенчатого начального профиля.

2. Бикомпактные схемы как компактные схемы коллокационного типа

На примере скалярного квазилинейного уравнения переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0,\ \frac{df(u)}{du}>0 \qquad (1)$$

покажем (см. [11]), что полудискретные бикомпактные схемы и, в частности, схема четвертого порядка аппроксимации по пространственной переменной [6] могут быть построены с помощью коллокационных полиномов. Для этого рассмотрим сначала обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ)

$$u_x=\psi(x,u), \qquad (2)$$

где нижний индекс x обозначает дифференцирование по x. На оси x введем неравномерную сетку из целых узлов x_j с шагами $h_{x,j+1/2}=x_{j+1}-x_j$. Поскольку дальнейшие выкладки будут связаны только с одной пространственной ячейкой $[x_j,x_{j+1}]$, второй индекс у шага $h_{x,j+1/2}$ опустим. Пусть заданы *узловые коэффициенты* (далее ради краткости – *узлы*) коллокации – вещественные числа $c_\alpha\in[0,1],\alpha=\overline{1,s}$, где $s\geq 3$ – натуральное число. Будем считать, что узлы коллокации симметричны относительно середины отрезка $[0,1]$ и $c_1=0,\ c_s=1$. Приближенное решение уравнения (2) с начальным условием $u(x_j)=u_j$ на отрезке $[x_j,x_j+h_x]$ будем искать в виде коллокационного полинома $p_s(x)$ степени s, удовлетворяющего следующим условиям:

$$p_s'(x_j + c_\alpha h_x) = \psi(x_j + c_\alpha h_x, p_s(x_j + c_\alpha h_x)),\ \ \alpha = \overline{1,s},\ p_s(x_j) = u_j\ ,$$

где $p_s'(x) = dp_s/dx$. Введем следующие обозначения:

$$u_{j_\alpha} = p_s(x_{j_\alpha}),\ \psi_{j_\alpha} = \psi(x_{j_\alpha}, u_{j_\alpha}),\ x_{j_\alpha} = x_j + c_\alpha h_x,\ \alpha = \overline{1,s} \tag{3}$$

где нижний индекс $j_\alpha \equiv j + c_\alpha$. Производная полинома $p_s(x)$ однозначно может быть выражена с помощью интерполяционного полинома Лагранжа:

$$p_s'(x_j + \xi h_x) = \sum_{\beta=1}^{s} \psi_{j_\beta} l_\beta(\xi),\ l_\beta(\xi) = \prod_{\substack{\alpha=1,\ldots,s \\ \alpha\neq\beta}} \frac{\xi - c_\alpha}{c_\beta - c_\alpha},\ \xi \in [0,1] \tag{4}$$

Интегрируя левое равенство в (4) по ξ на отрезках $[c_\alpha, c_{\alpha+1}]$ ($\alpha = \overline{1,s-1}$) и учитывая обозначения (3), получим $s-1$ линейно независимых связей между u_{j_α} и ψ_{j_α}

$$u_{j_{\alpha+1}} - u_{j_\alpha} = h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} \psi_{j_\beta},\ \ \alpha = \overline{1,s-1} \tag{5}$$

где

$$a_{\alpha\beta} = \int_{c_\alpha}^{c_{\alpha+1}} l_\beta(\xi) d\xi,\ \alpha = \overline{1,s-1},\ \beta = \overline{1,s} \tag{6}$$

Система уравнений (5) является одношаговой коллокационной разностной схемой для интегрирования ОДУ (2), которая эквивалентна некоторому неявному методу РК [7]. Шаблон этой схемы состоит из двух целых узлов и s–2 дробных узлов. Уравнения (5) можно также рассматривать как систему уравнений для определения s–1 сеточных функций: основной функции $\{u_j\}$, определенной в целых узлах, вспомогательных функций $\{u_{j_\alpha}\}$ ($\alpha = \overline{2,s-1}$), определенных в дробных узлах. Эффективный разностный порядок системы разностных уравнений, определяемый как разность общего числа узлов шаблона и общего числа уравнений, равен единице. В силу этого уравнения (5) можно решать маршевым методом по переменной x.

В дальнейшем нам потребуется функция устойчивости [7] одношаговой схемы (5) для ОДУ (2) с линейной правой частью $\psi(x,u) = \lambda u,\ \lambda = const$, т.е. для линейного уравнения Далквиста [7]. В этом случае схема (5) имеет вид

$$u_{j_{\alpha+1}} - u_{j_\alpha} = z\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} u_{j_\beta},\ z = \lambda h_x,\ \alpha = \overline{1, s-1}. \tag{7}$$

Константа λ в общем случае является комплексной величиной. Функция устойчивости $R(z)$ схемы (7) связывает значения рассчитываемой сеточной функции в соседних целых узлах

$$u_{j+1} = R(z) u_j \tag{8}$$

где $u_{j+1} = u_{j_s}$, $u_j = u_{j_1}$, т.к. $c_1 = 0,\ c_s = 1$.

Коллокационная разностная схема, подобная схеме (5) для уравнения (2), для ОДУ

$$f(u)_x = \psi(x, u) \tag{9}$$

имеет вид

$$f_{j_{\alpha+1}} - f_{j_\alpha} = h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} \psi_{j_\beta},\quad f_{j_\alpha} = f(u_{j_\alpha}),\ \alpha = \overline{1, s-1} \tag{10}$$

Чтобы получить полудискретную (разностную по x и непрерывную по t) схему для уравнения переноса (1), в правой части уравнения (9) положим $\psi = -\partial u/\partial t$. В результате из формулы (10) после замены $\psi = -\partial u/\partial t$ получим систему эволюционных ОДУ

$$h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} (\partial u/\partial t)_{j_\beta} + f_{j_{\alpha+1}} - f_{j_\alpha} = 0,\ \alpha = \overline{1, s-1} \tag{11}$$

которая является полудискретной разностной схемой для квазилинейного уравнения (1). Заметим, что, составляя независимые линейные комбинации уравнений (11), можно получить другие эквивалентные формы этой схемы.

В случае $s = 3$ и равномерно расположенных узлов коллокации $c_1 = 0,\ c_2 = 1/2,\ c_3 = 1$ схема (11) состоит из двух уравнений со следующей матрицей коэффициентов $\mathbf{A} = \{a_{\alpha\beta}\}$:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_4 = \begin{bmatrix} \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ -\frac{1}{24} & \frac{1}{3} & \frac{5}{24} \end{bmatrix} \tag{12}$$

Если сложить эти уравнения и вычесть одно из другого, то в результате получим эквивалентную схему

$$\begin{aligned}&\frac{h_x}{6}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j+4\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j+1/2}+\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j+1}\right]+f_{j+1}-f_j=0,\\&\frac{h_x}{4}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_j-\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{j+1}\right]-(f_{j+1}-2f_{j+1/2}+f_j)=0.\end{aligned}\qquad(13)$$

Схема (13) совпадает с полудискретной бикомпактной схемой [6], имеющий четвертый порядок аппроксимации по x [8-10]. Нижний индекс у матрицы **A** в (12) показывает порядок точности схемы по x. Отметим, что узлы коллокации для этой схемы - суть узлы квадратуры Лобатто [7], которые являются корнями следующего полинома:

$$\frac{d^{s-2}}{dx^{s-2}}\left(x^{s-1}(x-1)^{s-1}\right)$$

Функция устойчивости схемы (7) с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_4$ имеет вид

$$R(z)=R_4(z)\equiv\frac{z^2+6z+12}{z^2-6z+12}\qquad(14)$$

и является (2,2)–Паде аппроксимацией экспоненты e^z. Пусть $z=x+iy$, где x, y – действительные величины, а i – мнимая единица, тогда из формулы (14) получим следующие свойства схемы (7) с матрицей коэффициентов (12): 1) А–устойчивость [7], т.е. выполняется $|R(z)|\le 1$ при $\operatorname{Re} z\le 0$; 2) монотонность [12, с.41], т.е. выполняется А–устойчивость и $R(x)>0$ при $x\le 0$.

В случае $s=5$ и равномерно расположенных узлов коллокации $(c_1=0,\ c_2=1/4,\ c_3=1/2,\ c_4=3/4,\ c_5=1)$ схема (11) состоит из четырех уравнений со следующей матрицей коэффициентов:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_6=\frac{1}{2880}\begin{bmatrix}251&646&-264&106&-19\\-19&346&456&-74&11\\11&-74&456&346&-19\\-19&106&-264&646&251\end{bmatrix}\qquad(15)$$

Функция устойчивости схемы (7) с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_6$ имеет вид

$$R(z)=R_6(z)\equiv\frac{3z^4+50z^3+420z^2+1920z+3840}{3z^4-50z^3+420z^2-1920z+3840}\qquad(16)$$

и удовлетворяет следующим неравенствам:

$$|R(z)|\le 1\ \text{ при }\ \operatorname{Re} z\le 0;\ R(x)>0\ \text{ при }\ x\le 0.\qquad(17)$$

Выполнение условий (17) означает, что схема (7) с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_6$ является А–устойчивой и монотонной.

В случае $s=5$ и неравномерно расположенных узлов коллокации $(c_1=0,\ c_2=0.5-\sqrt{3/28},\ c_3=0.5,\ c_4=0.5+\sqrt{3/28},\ c_5=1)$, которые являются узлами квадратуры Лобатто, схема (11) также состоит из четырех уравнений со следующей матрицей коэффициентов:

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}_8=\frac{1}{141120}\times$$
$$\times\begin{bmatrix} 8568+216\sqrt{21} & 19208-504\sqrt{21} & 25088-6144\sqrt{21} & 19208-3864\sqrt{21} & -1512+216\sqrt{21} \\ -2835-216\sqrt{21} & 5649\sqrt{21} & 6144\sqrt{21} & -1281\sqrt{21} & 2835-216\sqrt{21} \\ 2835-216\sqrt{21} & -1281\sqrt{21} & 6144\sqrt{21} & 5649\sqrt{21} & -2835-216\sqrt{21} \\ -1512+216\sqrt{21} & 19208-3864\sqrt{21} & 25088-6144\sqrt{21} & 19208-504\sqrt{21} & 8568+216\sqrt{21} \end{bmatrix} \tag{18}$$

Функция устойчивости схемы (7) с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_8$ имеет вид

$$R(z)=R_8(z)\equiv\frac{z^4+20z^3+180z^2+840z+1680}{z^4-20z^3+180z^2-840z+1680} \tag{19}$$

и является (4,4)–Паде аппроксимацией экспоненты e^z. Эта функция удовлетворяет неравенствам (17), и, следовательно, схема (7) с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_8$ является А–устойчивой и монотонной.

Из способа построения схем (11), (15) и (11), (18) с помощью коллокационных полиномов следует, что порядок их пространственной аппроксимации равен шести и восьми соответственно [7]. В пункте 4 статьи это будет подтверждено численными расчетами.

Несложно построить многомерные бикомпактные схемы на основе коллокационных полиномов. Для простоты покажем это в двумерном случае. Сначала рассмотрим стационарное квазилинейное уравнение переноса

$$f(u)_x+g(u)_y=\psi(x,y,u) \tag{20}$$

Полудискретную схему (10) для уравнения (9) перепишем в таком виде

$$\sum_{\beta=1}^{s} b_{\alpha\beta} f_{j_\beta}=h_x\sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta}\psi_{j_\beta},\ \ \alpha=1,\ldots,s-1 \tag{21}$$

где элементы матрицы $\mathbf{B}=\{b_{\alpha\beta}\}$ даются формулами

$$b_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1, \beta = \alpha \\ 1, \beta = \alpha + 1 \\ 0, \beta \neq \alpha, \alpha + 1 \end{cases}, \ \alpha = \overline{1, s-1}, \ \beta = \overline{1, s} \tag{22}$$

Для уравнения

$$g(u)_y = \psi(y, u) \tag{23}$$

имеем аналогичную (21) разностную схему

$$\sum_{\beta=1}^{s} b_{\alpha\beta} g_{k_\beta} = h_y \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} \psi_{k_\beta}, \ \ \alpha = 1, \ldots, s-1, \tag{24}$$

где нижний индекс $k_\beta \equiv k + c_\beta$, а индексом k занумерованы целые узлы разностной сетки на оси y. Если последовательно применить к уравнению (20) процедуру дискретизации по переменной x, такую же, как при получении схемы (21) для уравнения (9), а затем аналогичную процедуру по переменной y, такую же, как при получении схемы (24) для уравнения (23), то в результате получим уравнения двумерной бикомпактной схемы

$$\begin{gathered} h_y \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha'\beta} b_{\beta'\alpha} f_{j_\alpha k_\beta} + h_x \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} b_{\alpha'\beta} g_{j_\alpha k_\beta} = h_x h_y \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} a_{\alpha'\beta} \psi_{j_\alpha k_\beta}, \\ \alpha', \beta' = \overline{1, s-1} \end{gathered} \tag{25}$$

где $f_{j_\alpha k_\beta} = f(u_{j_\alpha k_\beta}), g_{j_\alpha k_\beta} = g(u_{j_\alpha k_\beta}), \psi_{j_\alpha k_\beta} = \psi(x_{j_\alpha}, y_{k_\beta}, u_{j_\alpha k_\beta}), \ y_{k_\beta} = y_k + c_\beta h_y$, а $u_{j_\alpha k_\beta}$ - значение сеточной функции в узле $(x, y) = (x_{j_\alpha}, y_{k_\beta})$. Чтобы получить бикомпактную схему для нестационарного однородного уравнения переноса

$$u_t + f(u)_x + g(u)_y = 0 \tag{26}$$

достаточно формально подставить в уравнения (25) $\psi(x, y, u) = -u_t$ и получить

$$\begin{gathered} h_x h_y \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} a_{\alpha'\beta} (u_t)_{j_\alpha k_\beta} + h_y \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha'\beta} b_{\beta'\alpha} f_{j_\alpha k_\beta} + h_x \sum_{\alpha=1}^{s} \sum_{\beta=1}^{s} a_{\beta'\alpha} b_{\alpha'\beta} g_{j_\alpha k_\beta} = 0, \\ \alpha', \beta' = \overline{1, s-1} \end{gathered} \tag{27}$$

Если для интегрирования системы ОДУ (27) использовать высокоточные многостадийные диагонально-неявные методы РК, то для экономичного решения системы разностных уравнений на каждой стадии этих методов можно использовать метод итерируемой приближенной факторизации [13].

3. Дисперсионные свойства полудискретных бикомпактных схем

Дисперсионные свойства бикомпактных схем четвертого (13) и шестого (11), (15) порядка точности исследованы в работах [11,14]. В работе [15] найдена оптимизированная полудискретная симметричная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации, она имеет схемную групповую скорость, наименее уклоняющуюся от точной групповой скорости. В настоящей работе анализ дисперсионных свойств бикомпактной схемы восьмого порядка (11), (18) представлен впервые. Однако ради сравнения свойств бикомпактных схем с разным порядком точности будут также приведены и результаты дисперсионного анализа схем четвертого и шестого порядка из работ [11,14].

Обычно для оценок дисперсии и диссипации, вносимых схемами, используется задача Коши для уравнения (1) с линейной функцией

$$f(u) = cu,\ \ c = const > 0 \tag{28}$$

периодическими начальными данными $u(x,0) = \exp(ikx)$ и точным решением

$$u(x,t) = e^{ik(x-ct)} \tag{29}$$

где k – физическое волновое число, c – фазовая скорость.

Согласно формуле (11) бикомпактная схема из п.2 для уравнения (1) с функцией (28) имеет вид

$$h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} (\partial u/\partial t)_{j_\beta} + c(u_{j_{\alpha+1}} - u_{j_\alpha}) = 0,\ \ \alpha = \overline{1, s-1} \tag{30}$$

Будем искать основную полудискретную функцию $u_m(t)$ в (30), определенную в целых узлах, в виде бегущей волны

$$u_m(t) = e^{ik(x_m - c^* t)} = e^{ikx_m} e^{-ik^* ct},\ \ m = j, j+1, \tag{31}$$

где c^* – схемная (численная) фазовая скорость, $k^* = kc^*/c$ – эффективное (численное) волновое число [16], а вспомогательные полудискретные функции $u_{j_\alpha}(t)$, определенные в дробных узлах, в виде

$$u_{j_\alpha}(t) = \rho_{\alpha-1} e^{ikx_{j_\alpha}} e^{-ik^* ct},\ \rho_{\alpha-1} = const,\ \alpha = \overline{2, s-1}. \tag{32}$$

Подставляя функции (31), (32) в систему линейных ОДУ (30), получим s–1 алгебраических уравнений для определения s–1 неизвестных величин: ρ_α ($\alpha = \overline{1, s-2}$) и безразмерного эффективного волнового числа $\varphi^* = k^* h_x$. Из вида функций (31), (32) следует, что

$$(\partial u/\partial t)_{j_\beta} = -ik^* c u_{j_\beta}, \ \beta = \overline{1,s},$$

поэтому уравнение (30) дает следующую связь между этими функциями

$$u_{j_{\alpha+1}} - u_{j_\alpha} = ik^* h_x \sum_{\beta=1}^{s} a_{\alpha\beta} u_{j_\beta}, \ \alpha = \overline{1,s-1}. \tag{33}$$

Сравнивая уравнения (7) и (33), а также, учитывая формулу (8), получим связь между функциями (31) в целых узлах

$$u_{j+1} = R(i\varphi^*) u_j \tag{34}$$

где $R(z)$ является функцией устойчивости одношаговой схемы (7). Подставляя затем в формулу (34) функции (31), находим связь между φ^* и безразмерным волновым числом $\varphi = kh_x$

$$R(i\varphi^*) = e^{i\varphi}. \tag{35}$$

Отметим, что из формул (14), (16) и (19) следует, что

$$\left| R_m(i\varphi^*) \right| = 1, \ m = 4,6,8,$$

поэтому, решение уравнения (35) существует, когда в нем $R(z)$ есть функция устойчивости $R_m(z)$, $m = 4,6,8$. Рассмотрим решения уравнения (35) для этих функций устойчивости.

Для полудискретной бикомпактной схемы (30) четвертого порядка точности с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_4$ уравнение (35) с $R(z) = R_4(z)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$(\varphi^*)^2 + 6\,\mathrm{ctg}(\varphi/2)\varphi^* - 12 = 0. \tag{36}$$

Из (36) получаем явную зависимость φ от φ^*

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{6\varphi^*}{12 - (\varphi^*)^2} \right). \tag{37}$$

График зависимости (37) для $\varphi \in [-\pi, \pi]$ показан на рис. 1 в виде трех кривых. Эти кривые не пересекаются, причем только одна из них (кривая 1) проходит через точку (0,0) в плоскости (φ, φ^*) и соответствует физическому решению.

Функция (37) является нечетной, поэтому дальнейшее рассмотрение будет ограничено случаем $\varphi \in [0, \pi]$. Зависимость (37) нетрудно обратить на кривой 1 и получить, что

$$\varphi^* = 3\left[\sqrt{\mathrm{ctg}^2(\varphi/2) + 4/3} - \mathrm{ctg}(\varphi/2)\right],\ \varphi \in [0, \pi]. \tag{38}$$

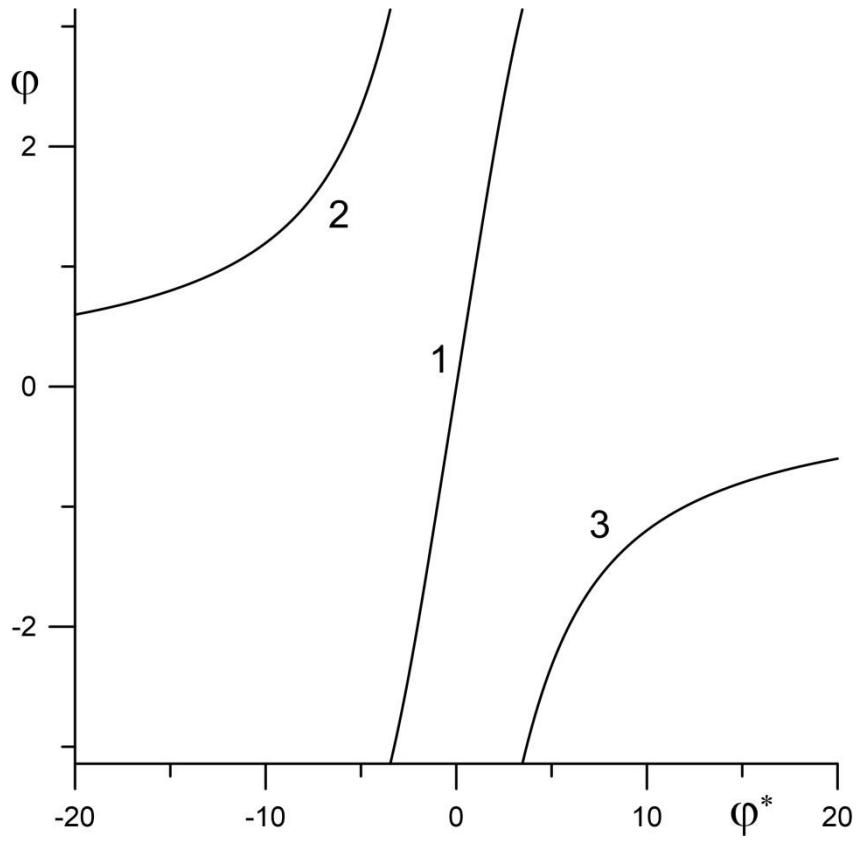

Рис. 1. Безразмерное точное волновое число как функция безразмерного эффективного волнового числа для полудискретной бикомпактной схемы 4-го порядка точности.

Групповая скорость c_g распространения пакета волн для бикомпактной схемы четвертого порядка равна

$$\frac{c_g}{c} = \frac{d\varphi^*}{d\varphi} = \frac{3}{2\sin^2(\varphi/2)}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4\,\mathrm{tg}^2(\varphi/2)/3}}\right)$$

и является положительной величиной для всех безразмерных волновых чисел. Поэтому при расчете переноса волн на существенно неравномерной разностной сетке с использованием этой схемы отсутствует [14] эффект отражения волн от сетки и образования паразитных волн [17-19].

Заметим, что, как было отмечено выше, эффективный разностный порядок системы дифференциально-разностных уравнений (30) равен единице и совпадает с порядком по x дифференциального уравнения (1). Для счета по

полудискретной бикомпактной схеме (30) требуется только одно граничное условие слева, которое совпадает с граничным условием для дифференциального уравнения (1) с функцией (28), и не требуется какого-либо дополнительного граничного условия справа. Поэтому в формировании численного решения будет участвовать только одна ветвь решения уравнения (37), которая определяется одним граничным условием и описывается кривой 1 на рис. 1. Если бы эффективный разностный порядок схемы (30) был бы выше единицы, и, соответственно, число разностных граничных условий было бы больше одного, то такая схема была бы способна поддерживать паразитные численные волны [3, с.539].

На рис. 2 представлены графики зависимости безразмерного эффективного волнового числа φ^* от безразмерного точного волнового числа φ для ряда симметричных компактных схем. Жирная прямая линия на рисунке показывает идеальную зависимость $\varphi^* = \varphi$. На рис. 3 приведены графики зависимости безразмерной схемной групповой скорости $c_g / c = d\varphi^* / d\varphi$ от величины φ для тех же схем, что и на рис. 2. Из графиков на рис. 3 видно, что безразмерная схемная групповая скорость является положительной в случае бикомпактной схемы четвертого порядка и неотрицательной в случае компактной схемы CCS-T4 четвертого порядка [4] для всех длин волн. Традиционные трехдиагональные компактные схемы четвертого, шестого и восьмого порядка точности из [20] дают отрицательные значения групповой скорости в коротковолновом диапазоне длин волн. Отметим, что согласно теории управления групповой скоростью для схем сквозного счета [21, 22] бикомпактная схема относится к схемам «быстрого типа», а схема CCS-T4 [4] и традиционные компактные схемы - к схемам «медленного типа».

Фазовую ошибку схемы обычно характеризуют величиной $\left|\varphi^*/\varphi - 1\right| = \left|c^*/c - 1\right|$. Из рис. 2 видно, что эта ошибка для бикомпактной схемы более чем в два раза меньше по сравнению с компактной схемой CCS-T4 [4]. Максимальные фазовые ошибки для бикомпактной схемы и компактной схемы CCS-T4 [4] равны 10.3 % и 23.6 %. Эти ошибки достигаются при самой короткой длине волны, разрешимой на сетке, ей соответствует значение $\varphi = \pi$. Заметим, что число разностных уравнений и в бикомпактной схеме четвертого порядка и в схеме CCS-T4 [4] равно двум. В то же время, шаблон бикомпактной схемы состоит из двух целых и одного полуцелого узла, а шаблон схемы CCS-T4 – из трех целых и трех полуцелых узлов.

Для полудискретной бикомпактной схемы (30) шестого порядка точности с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_6$ уравнение (35) с $R(z) = R_6(z)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$3(\varphi^*)^4 + 50\,\mathrm{ctg}(\varphi/2)(\varphi^*)^3 - 420(\varphi^*)^2 - 1920\,\mathrm{ctg}(\varphi/2)\varphi^* + 3840 = 0. \qquad (39)$$

Из уравнения (39) можно явно выразить φ через φ^*:

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\varphi^*\left[1920-50(\varphi^*)^2\right]}{3\left[(\varphi^*)^4-140(\varphi^*)^2+1280\right]}\right). \qquad (40)$$

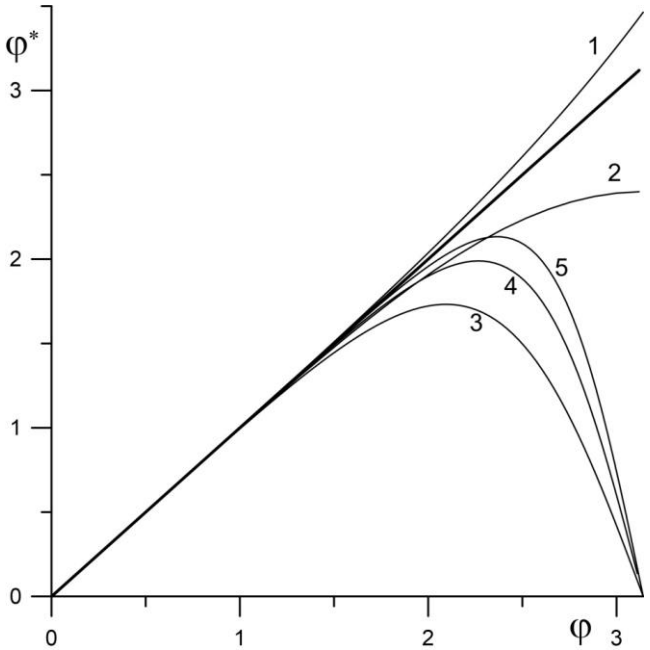

Рис. 2. Безразмерное эффективное волновое число как функция безразмерного точного волнового числа для различных симметричных полудискретных схем. Кривые: 1 – бикомпактная схема 4-го порядка аппроксимации; 2 – компактная схема CCS-T4 4-го порядка [4]; 3 – трехдиагональная стандартная компактная схема 4-го порядка [20]; 4 – трехдиагональная стандартная компактная схема 6-го порядка [20]; 5 – трехдиагональная компактная схема 8-го порядка [20]. Толстой прямой показана идеальная зависимость $\varphi^* = \varphi$.

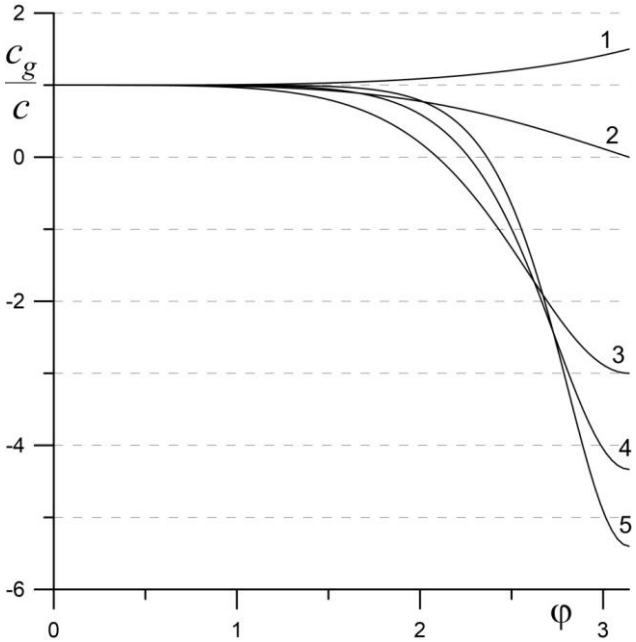

Рис. 3. Безразмерная схемная групповая скорость c_g/c как функция безразмерного точного волнового числа для различных симметричных полудискретных схем. Кривые: 1 – бикомпактная схема 4-го порядка; 2 – компактная схема CCS-T4 4-го порядка [4]; 3 – трехдиагональная стандартная компактная схема 4-го порядка [20]; 4 – трехдиагональная стандартная компактная схема 6-го порядка [20]; 5 – трехдиагональная компактная схема 8-го порядка [20].

Для бикомпактной схемы (30) восьмого порядка точности с матрицей коэффициентов $\mathbf{A}_8$ уравнение (35) с $R(z) = R_8(z)$ можно преобразовать к следующему виду:

$$(\varphi^*)^4 + 20\,\mathrm{ctg}(\varphi/2)(\varphi^*)^3 - 180(\varphi^*)^2 - 840\,\mathrm{ctg}(\varphi/2)\varphi^* + 1680 = 0\,. \qquad (41)$$

Из уравнения (41) можно явно выразить φ через φ^*:

$$\varphi = 2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{20\varphi^*\left[42-(\varphi^*)^2\right]}{(\varphi^*)^4-180(\varphi^*)^2+1680}\right). \qquad (42)$$

Графики зависимостей (40) и (42) для $\varphi\in[-\pi,\pi]$ показаны в виде пяти кривых на рис. 4 и 5 соответственно. Эти кривые не пересекаются, причем только одна из них (кривая 1) проходит через точку (0,0) в плоскости (φ,φ^*) и соответствует физическому решению.

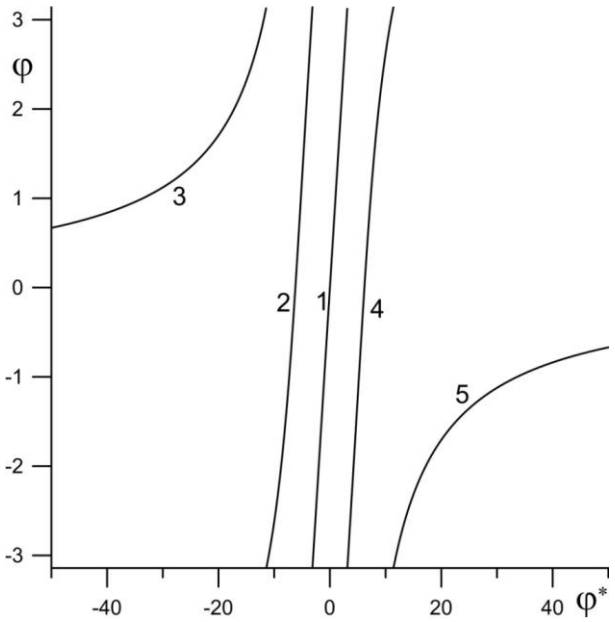

Рис. 4. Безразмерное точное волновое число как функция безразмерного эффективного волнового числа для полудискретной бикомпактной схемы 6-го порядка точности.

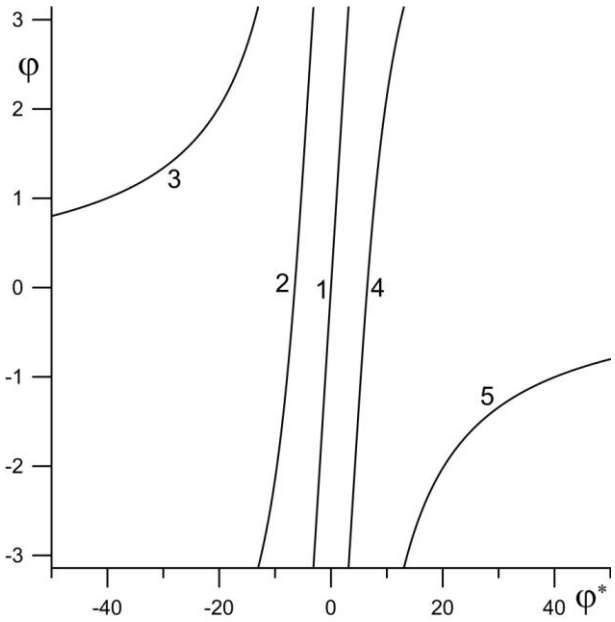

Рис. 5. Безразмерное точное волновое число как функция безразмерного эффективного волнового числа для полудискретной бикомпактной схемы 8-го порядка точности.

На рис. 6 представлены графики зависимости $\left|\varphi^*/\varphi-1\right|$ от безразмерного волнового числа φ для полудискретной бикомпактной схемы шестого порядка точности и полудискретной компактной схемы CCS-T6 [4] того же порядка, которая является наилучшей из найденных в литературе линейных схем для уравнения переноса с точки зрения малости фазовой ошибки $\left|\varphi^*/\varphi-1\right|$ для всех безразмерных волновых чисел $\varphi\in[0,\pi]$. Видно, что максимальная фазовая ошибка бикомпактной схемы в 16 раз меньше, чем аналогичная ошибка схемы CCS-T6 [4] при значении $\varphi=\pi$, которое соответствует самой короткой длине волны, разрешимой на сетке. На рис. 7 приведены графики зависимости безразмерной схемной групповой скорости c_g/c от величины φ для тех же схем, что и на рис. 6. Отметим, что согласно теории управления групповой

скоростью для схем сквозного счета [21, 22] бикомпактная схема шестого порядка точности и схема CCS-T6 [4] относятся к схемам «медленного типа».

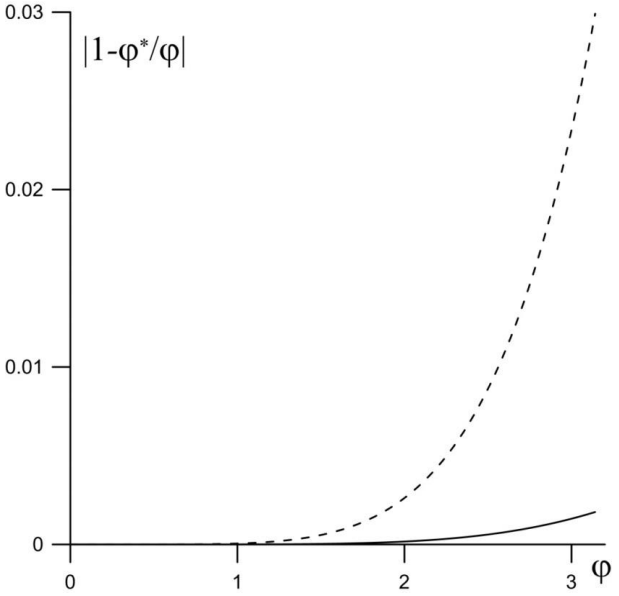

Рис. 6. Фазовая ошибка полудискретных компактных схем. Сплошная кривая показывает зависимость ошибки от безразмерного волнового числа для бикомпактной схемы 6-го порядка точности, штриховая кривая – для компактной схемы CCS-T6 6-го порядка точности [4].

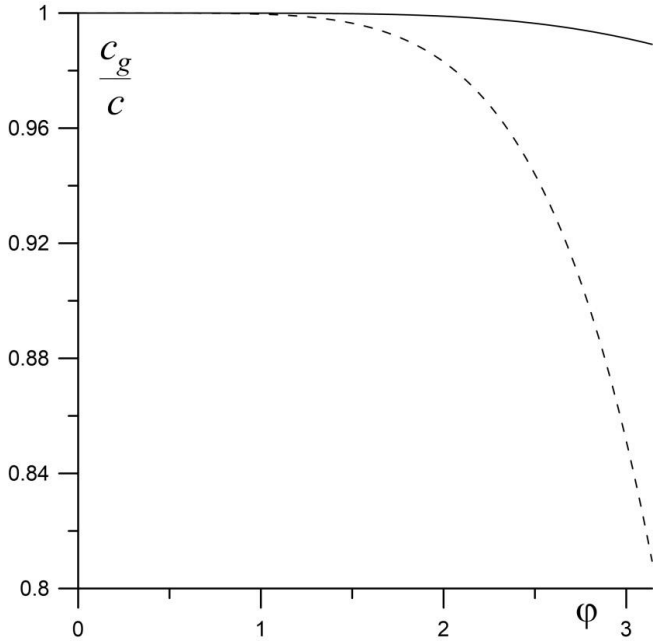

Рис. 7. Безразмерная схемная групповая скорость полудискретных компактных схем. Сплошная кривая показывает зависимость скорости от безразмерного волнового числа для бикомпактной схемы 6-го порядка точности, штриховая кривая – для компактной схемы CCS-T6 6-го порядка точности [4].

На рис. 8 представлены графики зависимости $\left|\varphi^*/\varphi - 1\right|$ от φ для полудискретной бикомпактной схемы восьмого порядка точности и полудискретной компактной схемы CCS-T8 [4] того же порядка, которая является наилучшей из найденных в литературе линейных схем для уравнения переноса с точки зрения малости фазовой ошибки для всех безразмерных волновых чисел $\varphi \in [0, \pi]$. Максимальная фазовая ошибка бикомпактной схемы в 27 раз меньше, чем аналогичная ошибка схемы CCS-T8 [4] при значении $\varphi = \pi$. На рис. 9 приведены графики зависимости безразмерной схемной групповой скорости c_g/c от величины φ для тех же схем, что и на рис. 8. Отметим, что согласно теории управления групповой скоростью для схем сквозного счета [21, 22] бикомпактная схема восьмого порядка точности относится к схемам «быстрого типа», а схема CCS-T8 [4] - к схемам «медленного типа».

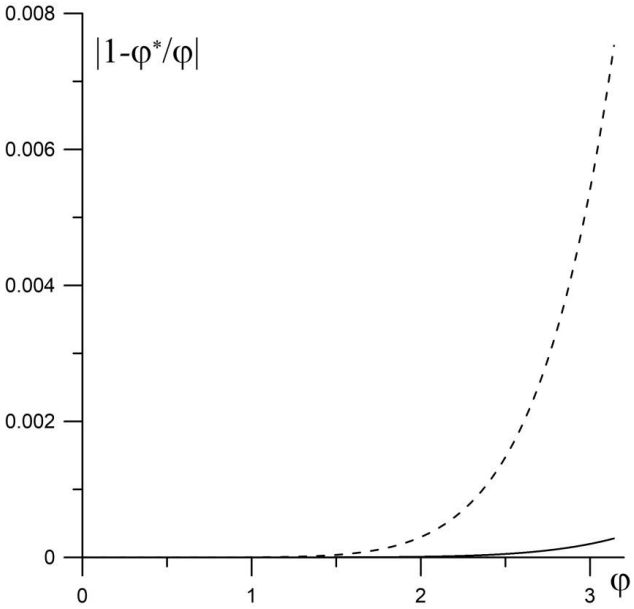

Рис. 8. Фазовая ошибка полудискретных компактных схем. Сплошная кривая показывает зависимость ошибки от безразмерного волнового числа для бикомпактной схемы 8-го порядка точности, штриховая кривая – для компактной схемы CCS-T8 8-го порядка точности [4].

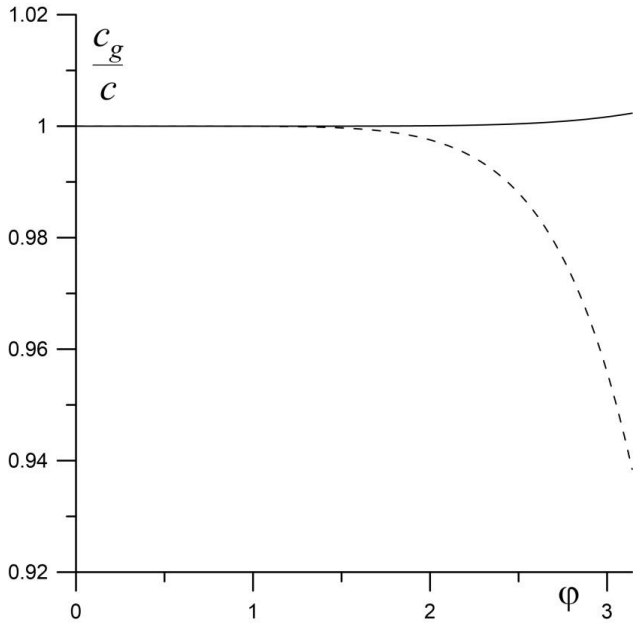

Рис. 9. Безразмерная схемная групповая скорость полудискретных компактных схем. Сплошная кривая показывает зависимость скорости от безразмерного волнового числа для бикомпактной схемы 8-го порядка точности, штриховая кривая – для компактной схемы CCS-T8 8-го порядка точности [4].

Отметим, что дисперсионный анализ полудискретных бикомпактных схем был ограничен их исследованием в пределах одной разностной ячейки, поскольку шаблон схем содержится в одной ячейке. Вследствие этого малость дисперсионной ошибки бикомпактных схем сохраняется при переходе от равномерной к существенно неравномерной сетке. В отличие от бикомпактных схем шаблоны полудискретных компактных схем CCS-T4 и CCS-T6 [4] состоят из трех целых и трех полуцелых узлов, а шаблон полудискретной схемы CCS-T8 [4] – из четырех целых и четырех полуцелых узлов. Таким образом, шаблоны схем из [4] расположены в пределах нескольких ячеек разностной сетки, поэтому спектральные свойства этих схем, определенные на равномерной сетке, можно приближенно переносить только на случай слабо неравномерной сетки [1, 5]. В случае же существенно неравномерной сетки такой перенос неправомерен.

4. Результаты расчетов

Для оценки способности схем правильно воспроизводить коротковолновые гармоники на больших интервалах времени при решении уравнений переноса в

работе [23] предложена следующая тестовая задача Коши. Требуется численно решить уравнение переноса

$$u_t + u_x = 0 \tag{43}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = \left[2 + \cos(\sigma x)\right] \exp\left[-\ln 2 \left(\frac{x}{10}\right)^2\right] \tag{44}$$

и параметром $\sigma = 1.7$ до моментов времени $t = 400$ и $t = 800$, используя равномерную сетку с шагом $h = 1$. При таком шаге параметр σ совпадает с волновым числом φ. В [23] предлагается сравнить точное и численное решения при $t = 400$ и $t = 800$.

В настоящей работе задача (43), (44) решается на отрезке $x \in [-50, 50]$ с периодическими граничными условиями. Для интегрирования по времени применяется однократно диагонально неявный метод РК четвертого порядка точности с пятью неявными стадиями SDIRK54 [24], который является *L*-устойчивым и жестко точным. Его таблица Бутчера [7] такова

$$\begin{array}{c|ccccc}
1/4 & 1/4 & & & & \\
0 & -1/4 & 1/4 & & & \\
1/2 & 1/8 & 1/8 & 1/4 & & \\
1 & -3/2 & 3/4 & 3/2 & 1/4 & \\
1 & 0 & 1/6 & 2/3 & -1/12 & 1/4 \\
\hline
 & 0 & 1/6 & 2/3 & -1/12 & 1/4
\end{array}.$$

Применение этого метода к системе уравнений полудискретной бикомпактной схемы дает абсолютно устойчивую полностью дискретную разностную схему [7]. В расчетах по бикомпактным схемам четвертого и шестого порядков число Куранта CFL бралось равным 0.1, а в расчетах по бикомпактной схеме восьмого порядка CFL = 0.06. Было проверено, что ошибка дискретизации по времени значительно меньше ошибки дискретизации по пространству.

В таблицах 1-3 показаны значения численной ошибки Err в нормах L_1 и L_∞, а также локальные порядки сходимости p численного решения в момент времени t = 800 для разных значений шага h. Видно, что реальный порядок сходимости решения близок к порядку пространственной аппроксимации схемы.

На рис. 10 маркерами-кружочками показаны результаты расчета задачи (43), (44) в момент времени $t = 800$ при σ = 1.7 и двух значениях шага (*a*) $h = 1/2$ и (*b*) $h = 1/4$ с помощью бикомпактной схемы четвертого порядка.

Сплошная кривая на рисунке показывает точное решение. Из рисунка видно заметное различие между точным и численным решением при $h = 1/2$. При меньшем значении шага $h = 1/4$ точное и численное решения визуально близки друг к другу.

Таблица 1

Ошибки и порядки сходимости бикомпактной схемы 4-го порядка. Параметры расчетов: CFL=0.1, $\sigma = 1.7$.

	Целые узлы				**Все узлы**			
h	$\|Err\|_1$	p	$\|Err\|_\infty$	p	$\|Err\|_1$	p	$\|E\|_\infty$	p
1	3.58e-1		1.01e+0		3.51e-1		1.01e+0	
1/2	1.61e-1	1.15	9.21e-1	0.14	1.61e-1	1.12	9.33e-1	0.11
1/4	1.09e-2	3.88	6.29e-2	3.87	1.09e-2	3.88	6.34e-2	3.87
1/8	6.88e-4	3.98	4.00e-3	3.97	6.89e-4	3.99	4.00e-3	3.98

Таблица 2

Ошибки и порядки сходимости бикомпактной схемы 6-го порядка. Параметры расчетов: CFL=0.1, $\sigma = 1.7$.

	Целые узлы				**Все узлы**			
h	$\|Err\|_1$	p	$\|Err\|_\infty$	p	$\|Err\|_1$	p	$\|Err\|_\infty$	p
1	1.64e-2		9.59e-2		1.66e-2		9.59e-2	
1/2	2.89e-4	5.83	1.65e-3	5.86	2.91e-4	5.83	1.68e-3	5.83
1/4	4.70e-6	5.94	2.67e-5	5.95	4.71e-6	5.95	2.72e-5	5.95
1/8	7.76e-8	5.92	4.40e-7	5.92	7.74e-8	5.93	4.41e-7	5.95

Таблица 3

Ошибки и порядки сходимости бикомпактной схемы 8-го порядка. Параметры расчетов: CFL=0.06, $\sigma = 2.5$.

	Целые узлы				**Все узлы**			
h	$\|Err\|_1$	p	$\|Err\|_\infty$	p	$\|Err\|_1$	p	$\|Err\|_\infty$	p
1	1.70e-2		9.31e-2		1.71e-2		9.82e-2	
1/2	7.31e-5	7.86	4.05e-4	7.84	7.31e-5	7.87	4.22e-4	7.86
1/4	2.57e-7	8.15	1.42e-6	8.15	2.53e-7	8.17	1.43e-6	8.20

На рис. 11 и 12 показаны результаты расчета задачи (43), (44) в момент времени $t = 800$ при шаге $h = 1$ по бикомпактным схемам шестого и восьмого порядка точности соответственно. В расчете по схеме шестого порядка параметр $\sigma = 1.7$, а в расчете по схеме восьмого порядка $\sigma = 2.5$. Сплошные кривые на рисунках показывают точное решение. Видно, что волновой пакет переносится по сетке без искажений и с правильной скоростью, численное решение близко к точному решению.

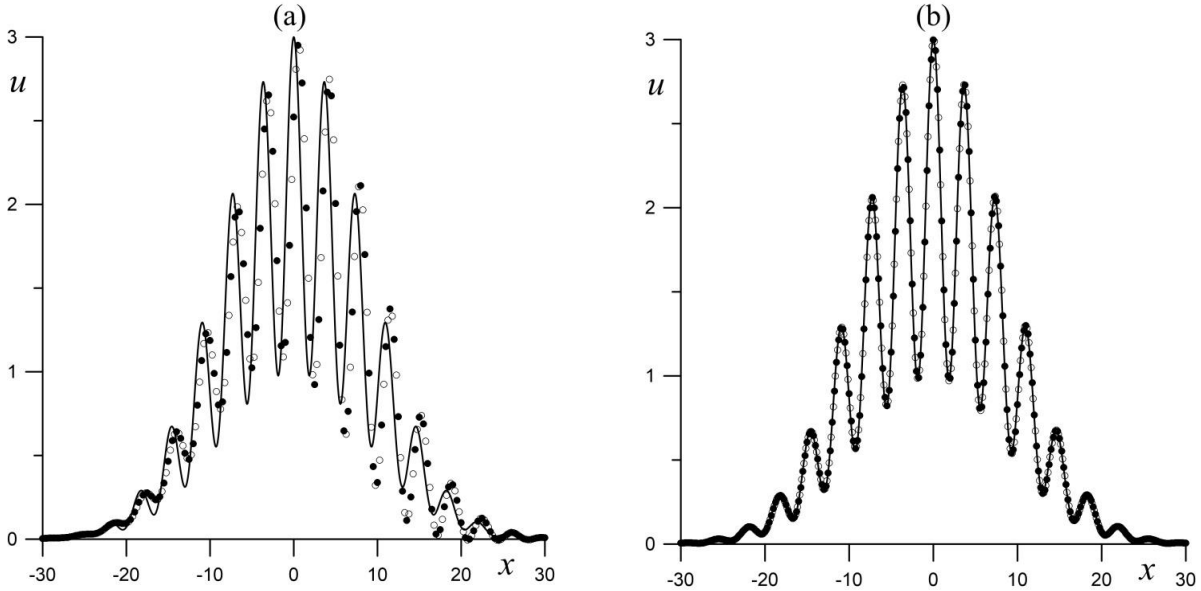

Рис. 10. Профили решений в задаче о переносе волнового пакета в момент времени t = 800 при $\sigma = 1.7$. Сплошная линия – точное решение. Численное решение, рассчитанное по бикомпактной схеме 4-го порядка, показано черными кружками в целых узлах, а светлыми кружками - в дробных узлах. Варианты расчетов: (a) h = 1/2, (b) h = 1/4.

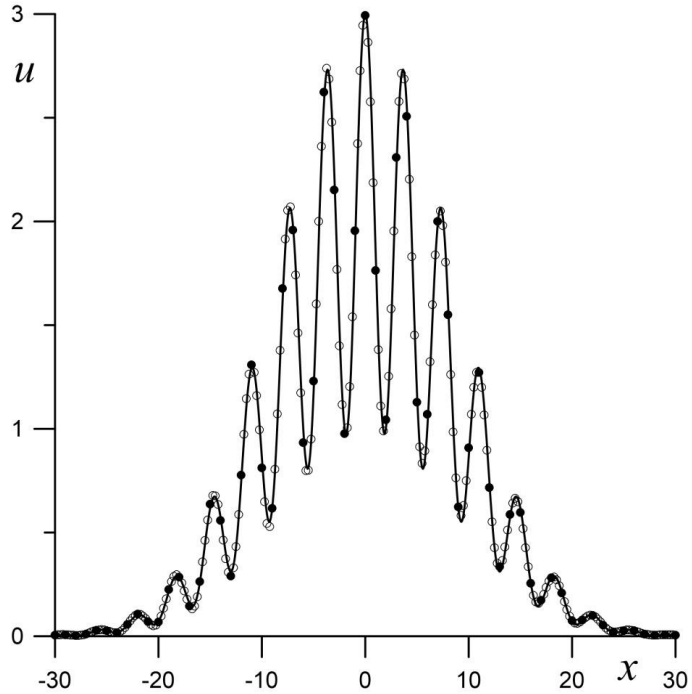

Рис. 11. Профили решений в задаче о переносе волнового пакета в момент времени t = 800 при $\sigma = 1.7$. Сплошная линия – точное решение. Численное решение, рассчитанное по бикомпактной схеме 6-го порядка на сетке с шагом h = 1, показано черными кружками в целых узлах, а светлыми кружками - в дробных узлах.

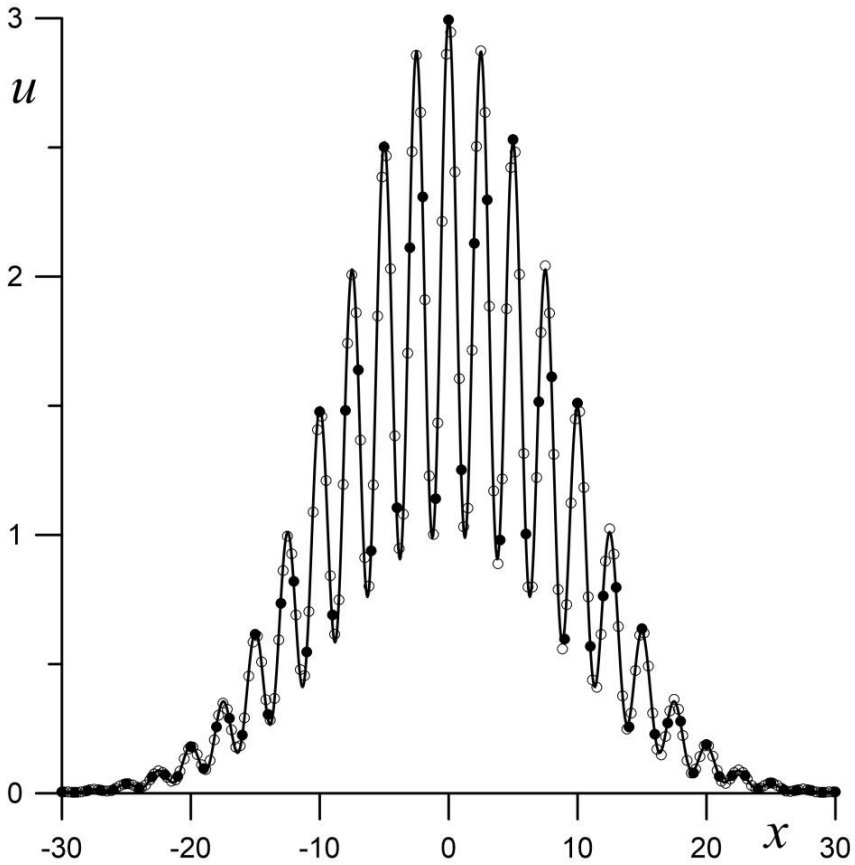

Рис. 12. Профили решений в задаче о переносе волнового пакета в момент времени t = 800 при $\sigma = 2.5$. Сплошная линия – точное решение. Численное решение, рассчитанное по бикомпактной схеме 8-го порядка на сетке с шагом h = 1, показано черными кружками в целых узлах, а светлыми кружками - во вспомогательных узлах.

На рис. 13 показаны результаты расчета задачи (43), (44) в момент времени $t = 800$ при σ = 2.5 на неравномерной пространственной сетке по бикомпактной схеме восьмого порядка точности. Первые два шага сетки были равны 0.5, а затем шаги чередовались – 1.0, 0.5, 1.0, 0.5,…. Из рис. 13 видно, что волновой пакет переносится по такой сетке без искажений, численное решение близко к точному решению.

Рассмотрим две задачи, аналогичные задаче [19], о переносе импульса по неравномерной сетке.

В первой задаче на отрезке $x \in [0,4]$ решается уравнение переноса (43) с начальным условием

$$u(x,0) = \begin{cases} \left(0.25 - (x-0.5)^2\right)^{11}, & x \in [0,1], \\ 0, & x \notin [0,1]. \end{cases} \tag{45}$$

и периодическими граничными условиями. В расчетах используется кусочно-равномерная сетка с шагом $h = 0.05$ на отрезке $[0,2]$ и с шагом $h = 0.5$ на отрезке $[2,4]$.

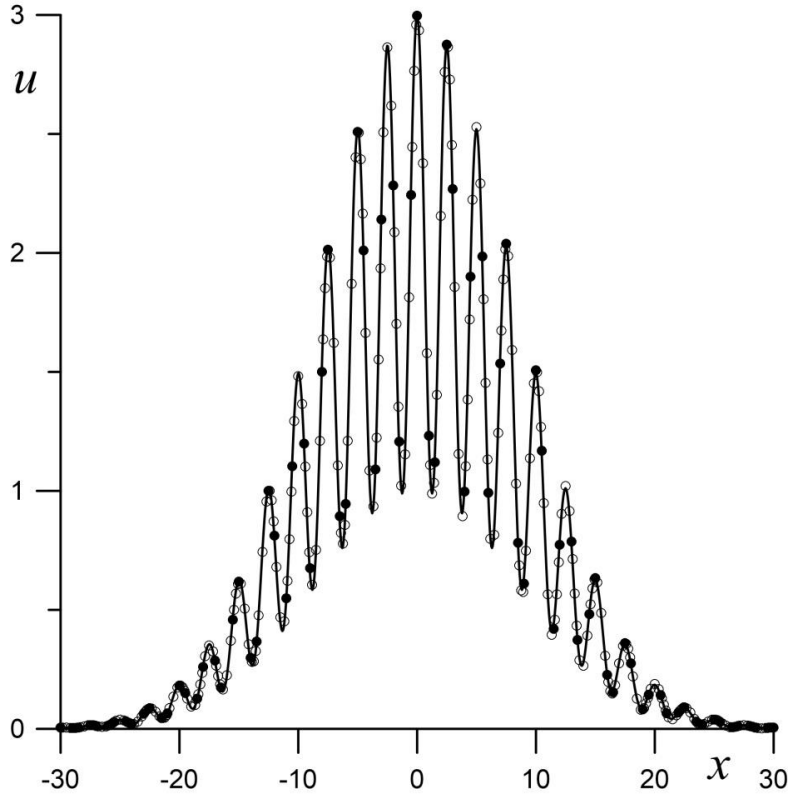

Рис. 13. Профили решений в задаче о переносе волнового пакета в момент времени $t = 800$ при $\sigma = 2.5$. Сплошная линия – точное решение. Численное решение, рассчитанное по бикомпактной схеме 8-го порядка на неравномерной сетке с чередующимися шагами $h = 1/2$ и $h = 1$, показано черными кружками в целых узлах, а светлыми кружками - во вспомогательных узлах.

На рис. 14*a* и 14*b* представлены результаты расчета задачи (43), (45) для двух моментов времени $t = 1$ и $t = 2$ с помощью полудискретной бикомпактной схемы восьмого порядка. Для интегрирования по времени используется метод SDIRK54 [24] четвертого порядка точности с временным шагом $\tau = 0.01$. Из приведенных графиков видно, что импульс переносится схемой без искажений, не наблюдается образование паразитных волн вблизи $x = 2$.

Во второй задаче расчет проводится на том же пространственном отрезке $x \in [0,4]$ с той же кусочно-равномерной сеткой, но рассматривается система уравнений акустики

$$\mathbf{u}_t + \bar{\mathbf{A}}\mathbf{u}_x = 0,\ \mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix},\ \bar{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

с начальными условиями

$$\mathbf{u}(x,0)=\begin{pmatrix}\sin(\pi x)^2-\cos(\pi x)\\ \sin(\pi x)^2+\cos(\pi x)\end{pmatrix} \tag{47}$$

и периодическими граничными условиями.

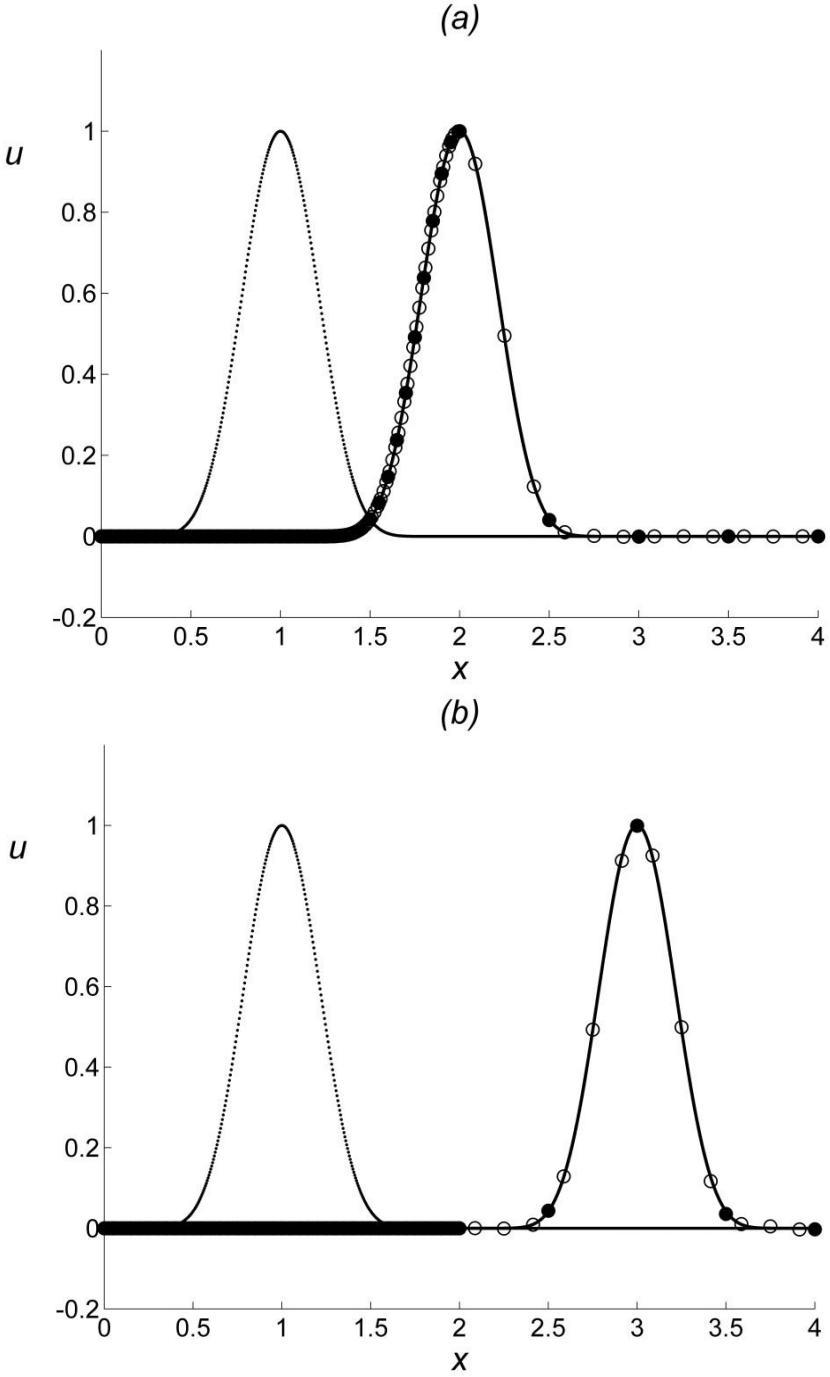

Рис. 14. Профили решений в задаче о переносе импульса по существенно неравномерной сетке. Пунктирная линия – начальное условие, сплошная линия – точное решение в момент времени: (a) $t = 1$, (b) $t = 2$; маркеры показывают численное решение в тот же момент времени: черные кружки в целых узлах, а светлые кружки во вспомогательных узлах.

На рис. 15*a* и 15*b* маркерами показаны результаты расчета второй задачи с помощью той же бикомпактной схемы, которая была использована в первой задаче, и с тем же шагом по времени. Из данных на рис. 15 видно, что бикомпактная схема без искажений, адекватно воспроизводит две компоненты решения u_1 и u_2 при расчете на неравномерной сетке.

Продемонстрируем свойства бикомпактных схем шестого и восьмого порядков в задаче о переносе ступенчатой функции (см. пример 1 в [21]). В этой задаче решается линейное уравнение переноса (43) с начальными условиями

$$u(x,0)=\begin{cases}1,\ 0\le x<\dfrac{5}{12},\\ 0,\ \dfrac{5}{12}\le x\le 1,\end{cases}$$

на равномерной сетке с пространственным шагом h = 1/200 до временного шага N = 500 при CFL = 0.1. В настоящей работе для численного решения этой задачи использовались полудискретные бикомпактные схемы шестого и восьмого порядков пространственной аппроксимации. Для интегрирования этих схем по времени использовалась хорошо известная однократно диагонально неявная трехстадийная схема РК третьего порядка точности по времени SDIRK33 [25].

На рис. 16a и 17a представлены графики основной компоненты численного решения – сеточной функции в целых узлах. Из рисунков видно, что основные компоненты являются практически монотонными функциями. Такое поведение этих компонент согласуется с выполнением условий монотонности (17) для функции устойчивости схемы (7) интегрирования по пространству, которая использовалась при построении бикомпактных схем.

На рис. 16b и 17b показаны осцилляции численного решения, которые связаны с его вспомогательными компонентами, определенными на множестве дробных узлов. Эти осцилляции имеют малые амплитуды и локализованы вблизи разрыва точного решения, показанного на рисунках сплошными линиями. Данные, приведенные на рис. 16b и 17b, подтверждают теорию управления групповой скоростью для схем сквозного счета [21, 22]. Бикомпактная схема шестого порядка с групповой скоростью меньшей, чем точная, в основном генерирует осцилляции за движущимся разрывом. Бикомпактная схема восьмого порядка с групповой скоростью большей, чем точная, в основном генерирует осцилляции перед движущимся разрывом. Для устранения осцилляций в численном решении на каждом временном слое можно применить конструкцию в виде гибридной схемы [26, 27]. Однако бикомпактные схемы содержат внутренний фильтр: основная компонента численного решения является практически монотонной. Эту компоненту можно рассматривать как фильтрованное решение. Важно только в процессе счета с

использованием симметричных бикомпактных схем контролировать схемную диссипацию за счет подходящего выбора временного интегрирования.

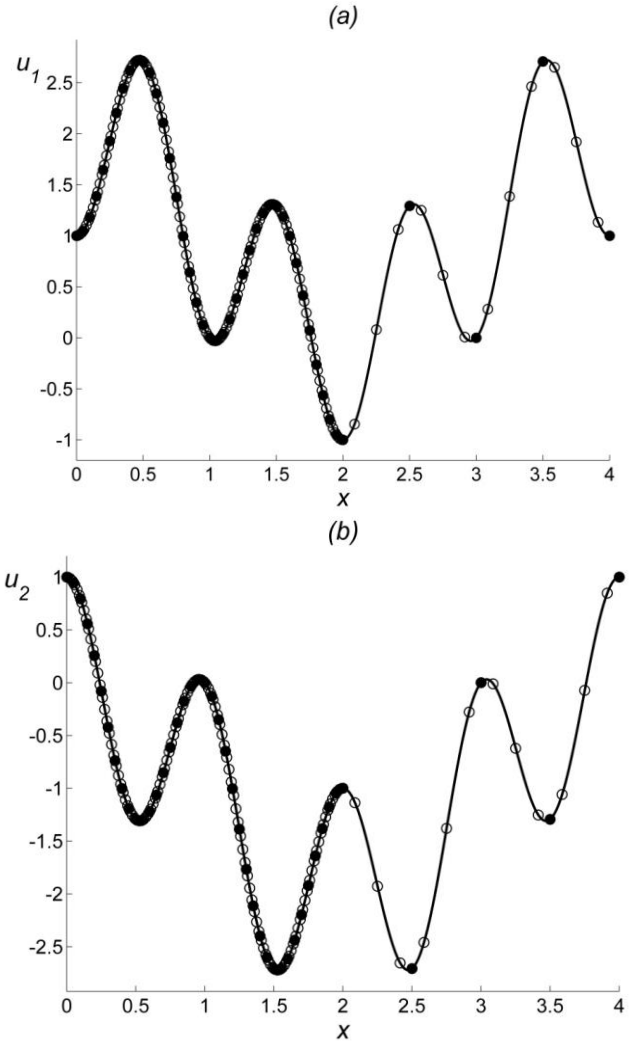

Рис. 15. Решение задачи (46), (47) в момент времени $t = 4$: (a) первая компонента решения, (b) вторая компонента решения. Сплошные линии показывают точные решения; маркеры показывают численное решение: черные кружки в целых узлах, а светлые кружки во вспомогательных узлах.

5. Заключение

В этой статье мы представили дисперсионный анализ схем от четвертого до восьмого порядка точности из предложенного семейства полудискретных симметричных бикомпактных схем для численного решения квазилинейного уравнения переноса. Показано, что фазовая ошибка бикомпактных схем шестого и восьмого порядка не превосходит 0.2% и 0.03% соответственно во всем диапазоне значений безразмерного волнового числа. Сравнение бикомпактных схем с компактными схемами из [4] показало, что максимальная фазовая ошибка полудискретных бикомпактных схем шестого и восьмого порядков точности меньше фазовой ошибки полудискретных компактных схем

[4] того же порядка точности в 16 и 27 раз соответственно. Приведены численные примеры, которые показали возможности бикомпактных схем адекватно моделировать перенос коротких волн на существенно неравномерной сетке в течение длительного времени.

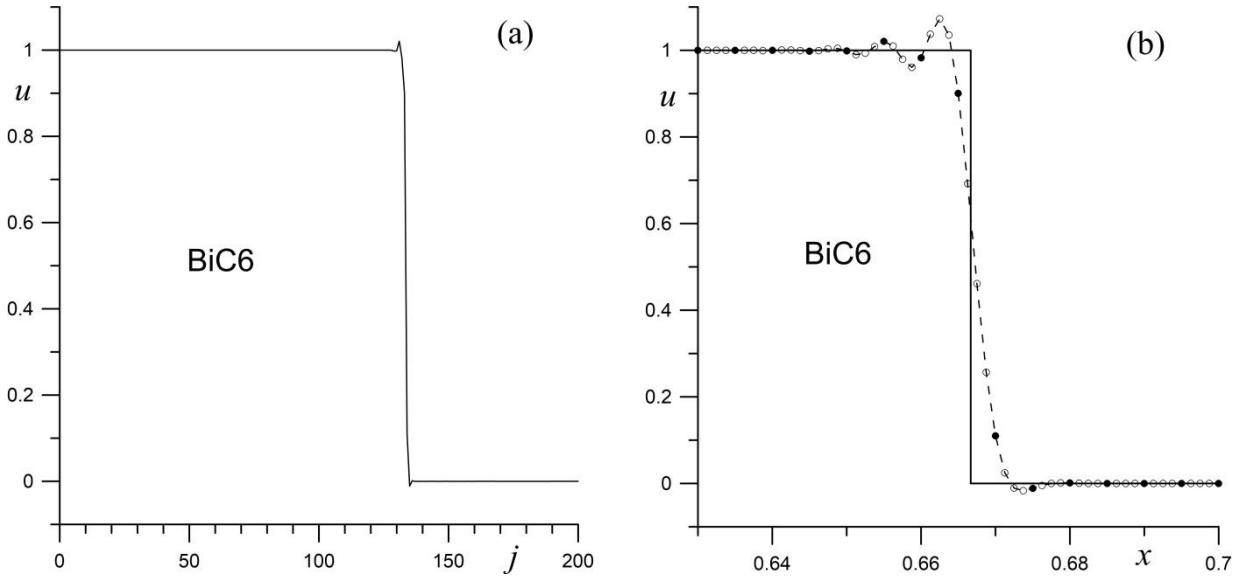

Рис. 16. Решение задачи о переносе функции-ступеньки, рассчитанное по бикомпактной схеме 6-го порядка BiC6. (a) Зависимость численного решения *u* в целых узлах от номера узла *j*. (b) Решение *u* как функция *x* в области разрыва решения: черные кружки показывают значения численного решения в целых узлах, светлые кружки – в дробных узлах, сплошная линия – точное решение.

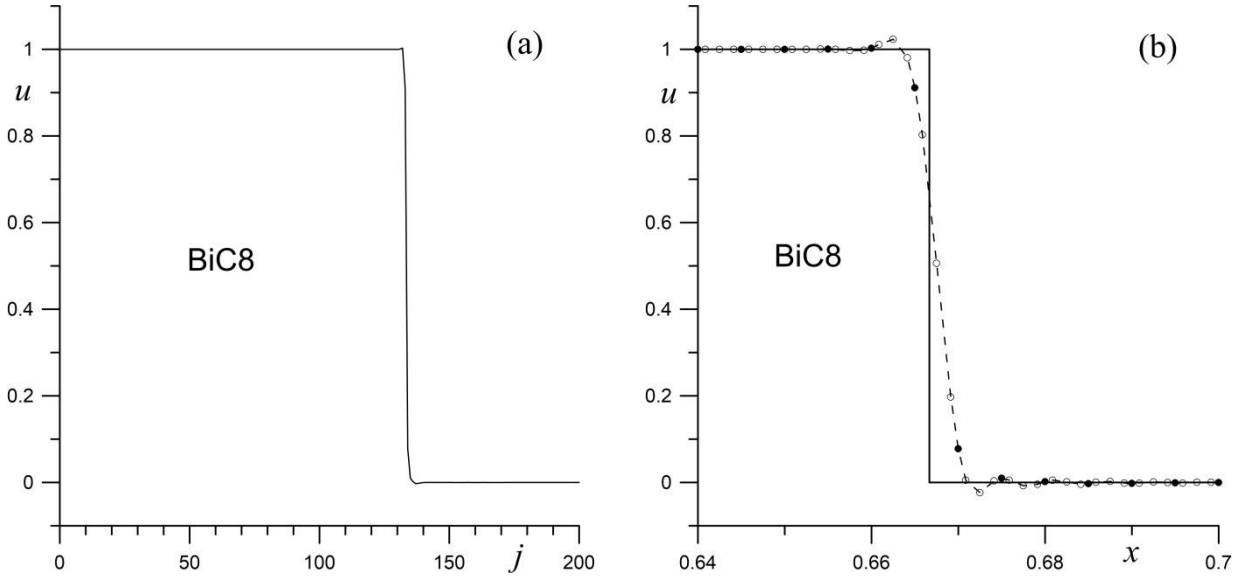

Рис. 17. Решение задачи о переносе функции-ступеньки, рассчитанное по бикомпактной схеме 8-го порядка BiC8. Варианты (a) и (b) означают то же, что и на рис. 16.

Библиографический список

1. Colonius T., Lele S.K. Computational aeroacoustics: progress on nonlinear problems of sound generation // Prog. Aerosp. Sci. 2004. V. 40. P. 345–416.

2. Ekaterinaris J.A. High-order accurate, low numerical diffusion methods for aerodynamics // Prog. Aerosp. Sci. 2005. V. 41. P. 192–300.

3. Kurbatskii K.A., Mankbadi R.R. Review of computational aeroacoustics algorithms // Int. J. Comput. Fluid Dyn. 2004. V. 18. P. 533-546.

4. Liu X., Zhang S., Zhang H., Shu C.-W. A new class of central compact schemes with spectral-like resolution I: Linear schemes // J. Comput. Phys. 2013. V. 248. P. 235–256.

5. Bogey C., Bailly C. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations // J. Comput. Phys. 2004. V. 194. P. 194–214.

6. Рогов Б.В., Михайловская М.Н. Монотонная высокоточная компактная схема бегущего счета для квазилинейных уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 2. С. 172-177.

7. Hairer E., Wanner G. Solving Ordinary Differential Equations II: Stiff and Differential-Algebraic Problems. Berlin: Springer-Verlag, 1996.

8. Михайловская М.Н., Рогов Б.В. Монотонные компактные схемы бегущего счета для систем уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52, № 4. С. 672-695.

9. Рогов Б.В. Высокоточная монотонная компактная схема бегущего счета для многомерных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2013. Т.53, №2. С. 264-274.

10. Chikitkin A.V., Rogov B.V., Utyuzhnikov S.V. High-order accurate monotone compact running scheme for multidimensional hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 2015. V. 93. P. 150–163.

11. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации со свойством спектрального разрешения для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2017. Т.476, №4. С. 381–386.

12. Калиткин Н.Н., Корякин П.В. Численные методы: в 2 кн. Кн. 2. Методы математической физики. М.: Издательский центр «Академия», 2013. 304 с.

13. Брагин М.Д., Рогов Б.В. Метод итерируемой приближенной факторизации операторов высокоточной бикомпактной схемы для систем многомерных неоднородных квазилинейных уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2018. Т. 58, № 3. С. 313-325.

14. Рогов Б.В., Брагин М.Д. О свойствах спектрального разрешения симметричных бикомпактных схем четвертого порядка аппроксимации // Докл. АН. 2017. Т. 475, № 2. С. 140-144.

15. Чикиткин А.В., Рогов Б.В. Оптимизированная бикомпактная схема шестого порядка аппроксимации с высоким спектральным разрешением для уравнений гиперболического типа // Докл. АН. 2018. Т. 478, № 6. С.631-636.

16. Zingg D.W. Comparison of high-accuracy finite-difference methods for linear wave propagation // SIAM J. Sci. Comput. 2000. V. 22, No. 2. P. 476–502.

17. Vichnevetsky R. Wave propagation analysis of difference schemes for hyperbolic equations: a review // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 1987. V. 7. P. 409-452.

18. Vichnevetsky R. Wave propagation and reflection in irregular grids for hyperbolic equations // Appl. Numer. Math. 1987. V. 3. P. 133-166.

19. Visbal M.R., Gaitonde D.V. Very high-order spatially implicit schemes for computational acoustics on curvilinear meshes // J. Comput. Acoust. 2001. V. 9. P. 1259-1286.

20. Lele S.K. Compact Finite Difference Schemes with Spectral-like Resolution // J. Comput. Phys. 1992. V. 103. P. 16-42.

21. Fu D., Ma Y. A high order accurate difference scheme for complex flow // J. Comput. Phys. 1997. V. 134. P. 1–15.

22. Li X., Fu D., Ma Y. Optimized group velocity control scheme and DNS of decaying compressible turbulence of relative high turbulent Mach number // Int. J. Numer. Meth. Fluids. 2005. V. 48. P. 835–852.

23. Tam C.K.W. Benchmark problems – category 1. Problem 1–aliasing // In: NASA/CP-2004-212954. 2004. P. 3.

24. Скворцов Л.М. Диагонально неявные FSAL-методы Рунге–Кутты для жестких и дифференциально-алгебраических систем // Матем. моделирование. 2002. Т. 14, № 2. С. 3–17.

25. Alexander R. Diagonally implicit Runge-Kutta methods for stiff O.D.E.'s // SIAM J. Numer. Anal. 1977. V. 14. P. 1006–1021.

26. Брагин М.Д., Рогов Б. В. Гибридные бикомпактные схемы с минимальной диссипацией для уравнений гиперболического типа // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2016. Т. 56. № 6. С. 958-972.

27. Брагин М.Д., Рогов Б. В. Новая гибридная схема для расчета разрывных решений гиперболических уравнений // Препринты ИПМ им.М.В.Келдыша. 2016. № 22. 22 с. URL: http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2016-22.

Оглавление

1. Введение 3
2. Бикомпактные схемы как компактные схемы коллокационного типа 4
3. Дисперсионные свойства полудискретных бикомпактных схем 10
4. Результаты расчетов 17
5. Заключение 25
Библиографический список 27